Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 29, No. 1, 2011, pág. 1–14

Grupos de nudos con dos generadores

Christian Pommerenke[a], Margarita Toro[b,*,†]

[a] Technische Universität Berlin, Institut für Mathematik, D-10623 Berlin, Germany.

[b] Universidad Nacional de Colombia, Escuela de Matemáticas, Medellín, Colombia.

Resumen. Se estudian grupos de nudos que admiten una presentación con dos generadores y una relación. Decimos que una presentación $\langle a, b \mid r\rangle$ es palindrómica si r es una palabra palíndromo, es decir, r es una palabra que se lee lo mismo de adelante para atrás que de atrás para adelante. Estudiamos condiciones bajo las cuales es posible cambiar la presentación dada para obtener una presentación palindrómica. Probamos que si el grupo G de un nudo admite una representación fiel en un subgrupo discreto de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, entonces G admite una presentación palindrómica.
Keywords: grupo de nudo, presentación de grupos, nudos hiperbólicos, nudos de tunel uno, palíndromes, puentes.
MSC2000: 57M05, 57M25, 20F67, 20Cxx

Knot groups with two generators

Abstract. We study knot groups that admit a presentation with two generators and one relation. We say that a presentation $\langle a, b \mid r\rangle$ is palindromic if r is a palindrome, that is, if r is a word that reads the same forwards and backwards. We study conditions that allow us to change the given presentation to obtain a palindromic presentation. We prove that if the knot group G admits a faithful discrete $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-representation then G admits a palindromic presentation.
Keywords: knot group, group presentation, hyperbolic groups, tunnel one knots, palindrome, bridges.

* Parcialmente financiado por COLCIENCIAS, código 1118-521-28160.
† Autor para correspondencia: *E-mail*: `mmtoro@unal.edu.co`
Recibido: 21 de Marzo de 2011, Aceptado: 13 de Mayo de 2011.

1. Introducción

Los grupos que admiten dos generadores y una relación han sido ampliamente estudiados, tanto desde el punto de vista puramente algebraico como por sus aplicaciones en topología, dado que muchos espacios importantes tienen grupo fundamental de este tipo. Estamos interesados en esta familia de grupos, en especial los que provienen de teoría de nudos.

Una clase particular de grupos con dos generadores y una relación, son aquellos de la forma

$$G = \langle a, b \mid p \rangle ,$$

donde la palabra $p = p(a, b)$ es un palíndromo, es decir, una palabra que se lee lo mismo de atrás para adelante que de adelante para atrás. A este tipo de presentación la llamamos *presentación palindrómica.*

El resultado central que probamos es el siguiente:

Teorema 1.1. *Sea K un nudo hiperbólico en S^3 y sea $G = \pi\left(S^3 \backslash K\right)$ su grupo fundamental. Si G admite una presentación con 2 generadores, entonces admite una presentación palindrómica.*

En [7] fue probado, usando argumentos algebraicos y geométricos, que todo nudo de número de túnel 1 admite una presentación palindrómica. Aquí utilizamos métodos algebraicos para probar el resultado para nudos hiperbólicos. De hecho, la prueba se puede extender para aquellos nudos cuyo grupo G admita una presentación de la forma $G = \langle a, b \mid rel \rangle$ tal que la función $\tilde{}$ inducida por $a \to a^{-1}$, $b \to b^{-1}$ es un automorfismo de grupos.

El problema de estudiar los grupos de nudos con dos generadores cae en el marco de estudiar variedades con grupos cuya presentación admite dos generadores. Se involucran técnicas avanzadas y especializadas de 3-variedades (ver [2]), pero en este trabajo nos concentraremos en técnicas algebraicas.

El trabajo está organizado de la siguiente forma. Con el fin de que el artículo pueda ser leído por un público no experto, en la segunda sección damos algunas definiciones básicas y resultados conocidos de grupos de nudos y presentamos dos conjeturas abiertas que motivan la importancia de nuestro resultado. En este trabajo nos concentramos en estudiar grupos de nudos y no abordamos el problema de estudiar grupos de enlaces.

En la tercera sección hacemos un breve estudio del comportamiento de los palíndromos. Es interesante anotar que estas palabras han sido el objeto de estudio y clasificación en [5]. En la cuarta sección estudiamos los resultados de Fine, Levin y

Rosenberg en [4] sobre subgrupos de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ con dos generadores y una relación. Estos resultados nos permiten probar el Teorema 1.1. Finalizamos el artículo con algunos comentarios sobre líneas de investigación abiertas relacionadas con nuestro trabajo.

2. Grupos de nudos

El complemento del nudo $E\,(K) = S^3 \setminus V(K)$, donde $V\,(K)$ es una vecindad tubular de K, es un importante invariante de nudos. El grupo $G\,(K)$ de un nudo K es el grupo fundamental de su complemento $E\,(K)$, es decir, $G\,(K) = \pi_1(S^3 \setminus V(K)) = \pi_1\,(K)$. Este grupo es un invariante muy estudiado. Para el caso de nudos primos, determina totalmente el tipo del nudo, por un importante resultado de Gordon y Luecke en 1989 (ver [6]). Para nudos compuestos ya no es un invariante tan completo.

Las siguientes son definiciones y propiedades conocidas de grupos de nudos. Para más detalles ver [1] y [9].

El grupo de un nudo no es metabeliano, es decir, su segundo conmutador no es trivial.

Se dice que un nudo es *hiperbólico* si admite una representación fiel en un subgrupo discreto de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Muchos nudos son hiperbólicos, y el estudio de sus representaciones es un tema fértil de investigación. Representaciones de grupos con dos generadores han sido estudiadas en [13] y [12]. En nuestro trabajo nos vamos a concentrar en este tipo de nudos.

Recordemos que la *deficiencia* de una presentación es la diferencia entre el número de generadores y relaciones. La *deficiencia de un grupo* es el máximo entre las deficiencias de todas las presentaciones, si existe. Se sabe que los grupos de nudos tienen deficiencia 1, ver [1].

Como el grupo $G\,(K)$ de un nudo K tiene deficiencia 1, no es posible obtener una presentación con dos generadores y ninguna relación. Es decir, el grupo de un nudo no puede ser el grupo libre en dos generadores.

Recordemos que si un nudo no es primo, entonces se puede escribir como una suma conexa $K = K_1 \# K_2$, con cada uno de ellos un nudo no trivial, y se sabe que $G\,(K) = G\,(K_1) * G\,(K_2)$, con $G\,(K_i) \neq \mathbb{Z}, i = 1, 2$. Por tanto, si K es un nudo y su grupo tiene presentación con dos generadores, entonces es un nudo primo, ya que un grupo con estas condiciones no puede ser el producto libre amalgamado de dos grupos diferentes de $\mathbb{Z}$ (ver [11]).

Los nudos se acostumbran representar mediante diagramas en el plano, como una colección de arcos, como se muestra en la Figura 1. Intuitivamente, un puente es un arco del diagrama que pasa al menos por encima de un cruce. Un nudo admite muchos diagramas en puentes. Al mínimo número de puentes de todos los posibles diagramas se lo llama *número de puentes* del nudo.

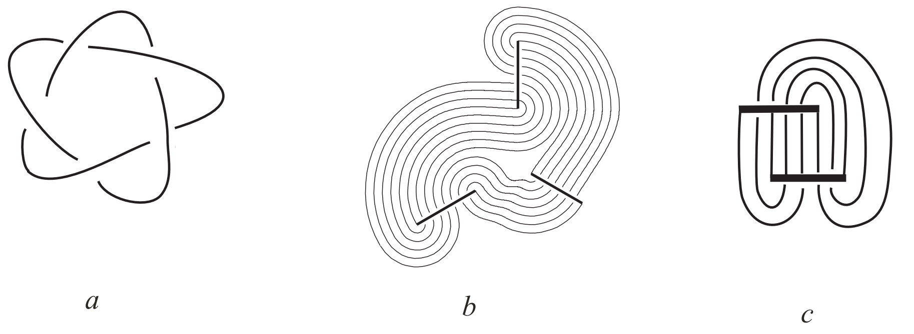

Figura 1. Ejemplos de diagramas de nudos.

En la Figura 1 el diagrama a tiene una presentación en 5 puentes, el diagrama b tiene una presentación en 3 puentes y el nudo del diagrama c tiene una presentación en 2 puentes.

En general, no se ha encontrado un método que nos permita determinar el número de puentes para un nudo arbitrario.

Se conocen muchos métodos para hallar presentaciones de grupos de nudos. Las dos más utilizadas son la de Wirtinger (que utiliza todos los arcos) y la de puentes. Para más detalles ver [1].

En esta presentación de Wirtinger hay un generador por cada arco del diagrama y una relación por cada cruce,

$$G(K) = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_n \rangle,$$

donde las relaciones tienen la forma $r_i : x_i^{-e_i} x_{\sigma_i} x_i^{e_i} x_{i+1}^{-1}$, con e_i el signo del cruce.

Cuando se tiene un diagrama de s puentes de un nudo, se puede encontrar la presentación del grupo del nudo con s generadores y $s-1$ relaciones. Se tiene un generador por cada puente y las relaciones se construyen al ir recorriendo los puentes por debajo.

Por ejemplo, para K el nudo 4_1 de la Figura 2, una presentación de Wirtinger es

$$G(4_1) = \left\langle x_1, \ldots, x_4 \mid x_2^{-1} x_4 x_2 x_1^{-1}, x_4^{-1} x_2 x_4 x_3^{-1}, x_1 x_3 x_1^{-1} x_4^{-1} \right\rangle.$$

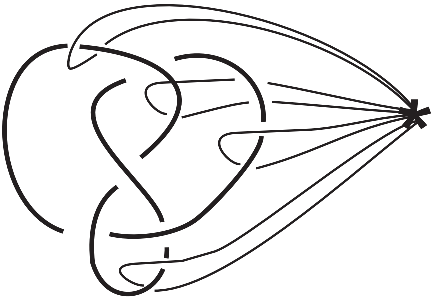

Figura 2. Diagrama de 4 puentes del nudo 4_1 y generadores meridionales del grupo.

Como la deficiencia es 1, podemos omitir una cualquiera de las relaciones. Haciendo modificaciones sobre esta presentación, se puede llevar a

$$G = \left\langle x_2, x_4 \mid x_4^{-1}x_2^{-1}x_4x_2x_4^{-1}x_2x_4x_2^{-1}x_4^{-1}x_2 \right\rangle;$$

tomando $a = x_2$, $b = x_4$ y la palabra $w = ba^{-1}b^{-1}a$, se llega a la presentación

$$G = \langle a, b \mid aw = wb \rangle,$$

que corresponde a la presentación que hubiéramos obtenido si consideramos el diagrama del nudo 4_1 que se muestra en la Figura 3.

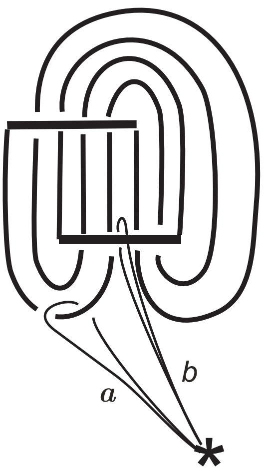

Figura 3. Diagrama de dos puentes del nudo 4_1.

Este diagrama está en forma de puentes, y este nudo tiene dos puentes.

Los generadores que corresponden a curvas que envuelven el nudo sólo una vez se llaman *meridianos.* Por ejemplo, las curvas de la Figuras 1 y 2 son meridianos.

Tenemos así el resultado:

Proposición 2.1. *Si un nudo admite una presentación con s puentes, entonces su grupo admite una presentación con s generadores.*

El recíproco no es cierto, como probamos más adelante, pero se tienen algunas conjeturas que son recíprocos parciales.

Dos familias importantes y conocidas con grupos con dos generadores son *los nudos toroidales* y los *nudos de dos puentes.*

Los nudos toroidales están completamente clasificados (ver [1]). El grupo de un nudo toroidal de tipo (p, q), p y q primos relativos, admite una presentación de la forma $\langle a, b \mid a^q = b^p \rangle$. Aquí los generadores no son meridianos.

El nudo de dos puentes de tipo p/q, p y q primos relativos, tiene grupo con dos generadores, y presentación dada por $\langle x, y; xw = wy \rangle$, donde

$$w = y^{k_n} x^{k_{n-1}} \cdots y^{k_1} x^{k_1} y^{k_2} \cdots y^{k_{n-1}} x^{k_n}, \qquad k_\nu \in \{1, -1\}\,,\ n = p - 1, \qquad (1)$$

y para $\nu = 1, \cdots, n$,

$$k_\nu = (-1)^{\left[\nu q^{-1}/p\right]}\,,$$

donde q^{-1} es el recíproco de q en $\mathbb{Z}_{2p}$ y $[x]$ representa la parte entera de x (ver [1]). Los generadores de esta presentación son meridianos.

Examinemos ahora una conjetura sobre el significado geométrico de propiedades algebraicas.

Conjetura 2.2. *Si el grupo de un nudo admite una presentación con n generadores que son meridianos, entonces es de n puentes.*

Se probó a principios de este siglo que es cierta para nudos de 2 puentes (ver [2] y [3]), pero no se tiene algún resultado en general.

Los nudos toroidales son contraejemplos que muestran que no se puede suprimir la hipótesis de que los generadores sean meridianos.

Se dice que un nudo *es de túnel 1* si es posible agregar un arco cuyos extremos estén sobre el nudo de tal forma que se obtiene un grafo cuyo complemento es un cuerpo de dos asas. En términos de grupos, esto se traduce en que el grupo del nudo admite una presentación con dos generadores.

Se sabe que los nudos toroidales y los nudos de dos puentes son nudos de número de túnel 1 (ver [10]).

Es natural entonces plantear la siguiente conjetura:

Conjetura 2.3. *Si un nudo admite una presentación con dos generadores, entonces es de número de túnel 1.*

Es en el marco de esta conjetura que se inscribe nuestro trabajo, ya que se sabe (ver [7]), que todo nudo de número de túnel 1 admite una presentación palindrómica. Nuestro resultado entra a fortalecer esta conjetura.

2.1. Grupos libres

Sea F el grupo libre $\langle a, b\rangle$. Cada palabra $w \neq 1$ en F puede ser escrita en forma única como

$$w = a^{e_1} b^{f_1} \cdots a^{e_m} b^{f_m}, \qquad e_\mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \ \ (\mu = 2, \cdots, m-1), \tag{2}$$

con $e_0, e_m \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. La suma de los exponentes en a y b son, respectivamente,

$$\sigma_a(w) = e_1 + e_2 + \cdots + e_m, \quad \sigma_y(w) = f_1 + f_2 + \cdots + f_m, \tag{3}$$

y son invariantes bajo conjugación en F. Como en [13, p. 206], consideramos el automorfismo $w \to \widetilde{w} \in F$ inducido por $a \to a^{-1}$ y $b \to b^{-1}$. Tomamos $\widetilde{1} = 1$ y

$$\widetilde{w} = a^{-e_1} b^{-f_1} \cdots a^{-e_m} b^{-f_m}. \tag{4}$$

También definimos $\overleftarrow{w}$ como

$$\overleftarrow{w} = \widetilde{w}^{-1} = b^{f_m} a^{e_m} \cdots b^{f_1} a^{e_1}.$$

Para $w, u \in F$, denotamos $w \equiv u$ si existe $q \in F$ tal que $w = quq^{-1}$.

Estas funciones son involuciones, y además tenemos que

$$\overleftarrow{w}^{-1} = \widetilde{w}, \ \ w^{-1} = \overleftarrow{\widetilde{w}} = \widetilde{\overleftarrow{w}}.$$

3. Sobre palíndromos y cuasi palíndromos

Una palabra $p = p(a, b)$ es un palíndromo si se lee lo mismo de atrás para adelante que de adelante para atrás, es decir, si $p = \overleftarrow{p}$. Para nuestros propósitos necesitamos refinar un poco más y clasificar los palíndromos. Decimos que p es un (a, b)-*palíndromo* si

$$p = a^{l_n} b^{s_n} a^{l_{n-1}} \cdots b^{s_1} a^{l_0} b^{s_1} a^{l_{n-1}} b^{s_n} a^{l_n}, \text{ con } n \in \mathbb{N},$$

$l_0 \in \mathbb{Z},\ l_i, s_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, i = 1, \cdots, n$; y si $l_n > 0$ (respectivamente $l_n < 0$), decimos que p es un $+(a,b)$-palíndromo (respectivamente $-(a,b)$-palíndromo). Decimos que p es un (b,a)*-palíndromo* si

$$p = b^{s_n} a^{l_n} \cdots a^{l_1} b^{s_0} a^{l_1} \cdots a^{l_n} b^{s_n}, \text{ con } n \in \mathbb{N},$$

$s_0 \in \mathbb{Z},\ l_i, s_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, i = 1, \cdots, n$, y es un $+(b,a)$-palíndromo ($-(b,a)$-palíndromo) si $s_n > 0$ ($s_n < 0$).

Un (a,b)-palíndromo puede ser construido en un proceso recursivo:

$$\begin{aligned} &p_0 = a^{l_0}, \qquad l_0 \in \mathbb{Z}, \\ &p_k = a^{l_k} b^{s_k} p_{k-1} b^{s_k} a^{l_k}, \quad l_k, s_k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad \text{y } p_{k-1} \text{ es un } (a,b)\text{-palíndromo.} \end{aligned}$$

Todo palíndromo p puede ser escrito como

$$p = \overleftarrow{w} x w,$$

con $w \in \langle a, b\rangle$ y $x \in \{1, a, b\}$. Si $x \neq 1$ decimos que w tiene un *centro*.

Cuando una palabra w tiene la forma $w = xr$ ó $w = rx$, r es un palíndromo y $x \in \{a, b\}$, decimos que p es un *cuasi palíndromo*. El siguiente lema nos muestra que al multiplicar un (a,b)-palíndromo y un (b,a)-palíndromo el resultado se puede re-escribir como un palíndromo o un cuasi palíndromo. Estos resultados son de utilidad cuando las palabras son relatores de una presentación.

Lema 3.1. *Sean p un (a,b)-palíndromo y q un (b,a)-palíndromo. Entonces podemos rotar a pq y escribirla como xr, con $x \in \{1, a, b\}$ y r un palíndromo.*

Demostración. Sean p un (a,b)-palíndromo y q un (b,a)-palíndromo; entonces existen $u, v \in \langle a, b\rangle$ y $x, y \in \{1, a, b\}$ tales que

$$p = \overleftarrow{u} x u, \qquad q = \overleftarrow{v} y v.$$

Por tanto,

$$pq = \overleftarrow{u} x u \overleftarrow{v} y v = \widetilde{u}^{-1} x u \widetilde{v}^{-1} y v,$$

así que si efectuamos la rotación

$$\widetilde{u} p q \widetilde{u}^{-1} = x u \widetilde{v}^{-1} y v \widetilde{u}^{-1}$$

y tomamos

$$w = u \overleftarrow{v}, \qquad \overleftarrow{w} = v \overleftarrow{u}, \qquad r = w y \overleftarrow{w},$$

tenemos que r es palíndromo y que

$$\widetilde{u} p q \widetilde{u}^{-1} = x r. \qquad ☑$$

El siguiente lema fue probado en [8]. Nosotros damos una prueba un poco diferente y más corta.

Lema 3.2. *Si un grupo G tiene una presentación cuasi palindrómica, esto es, $G = \langle a, b \mid w \rangle$ con $w = w(a,b)$ un cuasi palíndromo, entonces G admite una presentación palindrómica. Recíprocamente, si G admite una presentación palindrómica, entonces también admite una presentación cuasi palindrómica.*

Demostración. Para la prueba utilizamos la construcción de un (a,b)-palíndromo en forma recursiva:

$$\begin{aligned} &p_0 = a^{l_0}, \qquad l_0 \in \mathbb{Z}, \\ &p_k = a^{l_k} b^{s_k} p_{k-1} b^{s_k} a^{l_k}, \quad l_k, s_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \text{y} \quad p_{k-1} \text{ es un } (a,b)\text{-palíndromo,} \end{aligned}$$

y hacemos inducción sobre el número de pasos en la construcción. De hecho, probaremos un resultado más explícito.

Consideremos un cambio de generador dado por $\gamma(a) = tb^{-1}$ y $\gamma(b) = b$, donde $\gamma : \langle a, b \rangle \to \langle t, b \rangle$ es un isomorfismo de grupos libres. Probaremos por inducción que:

- si p es un $+(a,b)$-palíndromo, entonces $\gamma(p)$ es un cuasi palíndromo de la forma qb^{-1}, donde q es un (t,b)-palíndromo; y,
- si p es un $-(a,b)$-palíndromo, entonces $\gamma(p)$ es un cuasi palíndromo de la forma bq, donde q es un (t,b)-palíndromo.

Veamos el caso $k = 0$. Supongamos que $p_0 = a^{l_0}$.

Si $l_0 > 0$, entonces

$$\gamma\left(a^{l_0}\right) = \left(tb^{-1}\right)^{l_0} = (tb^{-1} \cdots b^{-1}t)b^{-1} = q_0 b^{-1},$$

donde q_0 es un (t,b)-palíndromo.

Si $l_0 < 0$, entonces

$$\gamma\left(a^{l_0}\right) = \left(bt^{-1}\right)^{-l_0} = b(t^{-1}bt^{-1} \cdots bt^{-1}) = bq_0,$$

con q_0 un (t,b)-palíndromo.

Supongamos que se cumple la hipótesis de inducción para todos los palíndromos formados en menos de k pasos, y veámoslo para $p_k = a^{l_k} b^{s_k} p_{k-1} b^{s_k} a^{l_k}$, con $l_k, s_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y p_{k-1} un (a,b)-palíndromo.

Si p_k es un $+(a,b)$-palíndromo y p_{k-1} es un $+(a,b)$-palíndromo, entonces

$$\begin{aligned}\gamma(p_k) &= \gamma(a)^{l_k} b^{s_k} \gamma(p_{k-1}) b^{s_k} \gamma(a)^{l_k} = \left(tb^{-1}\right)^{l_k} b^{s_k} (q_{k-1}b^{-1}) b^{s_k} \left(tb^{-1}\right)^{l_k} \\ &= t\left(b^{-1}t\right)^{l_k-1} b^{s_k-1} q_{k-1} b^{s_k-1} \left(tb^{-1}\right)^{l_k-1} tb^{-1},\end{aligned}$$

donde, por inducción, q_{k-1} es un (t,b)-palíndromo. Si tomamos

$$q_k = t\left(b^{-1}t\right)^{l_k-1} b^{s_k-1} q_{k-1} b^{s_k-1} \left(tb^{-1}\right)^{l_k-1} t,$$

entonces q_k es un (t,b)-palíndromo y

$$\gamma(p_k) = q_k b^{-1}.$$

Si p_k es un $+(a,b)$-palíndromo y p_{k-1} es un $-(a,b)$-palíndromo, entonces

$$\gamma(p_k) = \left(tb^{-1}\right)^{l_k} b^{s_k} (bq_{k-1}) b^{s_k} \left(tb^{-1}\right)^{l_k} = t\left(b^{-1}t\right)^{l_k-1} b^{s_k} q_{k-1} b^{s_k} \left(tb^{-1}\right)^{l_k-1} tb^{-1},$$

donde q_{k-1} es un (t,b)-palíndromo. Si ahora tomamos

$$q_k = t\left(b^{-1}t\right)^{l_k-1} b^{s_k} q_{k-1} b^{s_k} \left(tb^{-1}\right)^{l_k-1} t,$$

entonces q_k es un (t,b)-palíndromo y

$$\gamma(p_k) = q_k b^{-1}.$$

Ahora, si p_k es un $-(a,b)$-palíndromo, entonces p_k^{-1} es un $+(a,b)$-palíndromo y $\gamma\left(p_k^{-1}\right) = q_k b^{-1}$, con q_k un (t,b)-palíndromo, por lo que

$$(\gamma(p_k))^{-1} = \gamma\left(p_k^{-1}\right) = q_k b^{-1},$$

así que

$$\gamma(p_k) = bq_k$$

y se cumple el resultado.

Con este resultado, consideremos ahora un grupo G con presentación palindrómica, $G = \langle a, b \mid p\rangle$ con p un $+(a,b)$-palíndromo; entonces, haciendo el cambio de generadores dado por γ, tenemos que G admite una presentación de la forma

$$G = \left\langle b, t \mid qb^{-1}\right\rangle,$$

con q un (t,b)-palíndromo. Y si p es un $-(a,b)$-palíndromo, el cambio de generadores nos lleva a

$$G = \langle b, t \mid bq\rangle,$$

donde, de nuevo, q es un (t,b)-palíndromo.

Recíprocamente, si G admite una presentación cuasi palindrómica, $G = \langle a, b \mid w\rangle$ con w un cuasi palíndromo, mediante rotación e inversos podemos llegar a que $w = bp$ con p un (a,b)-palíndromo ó $w = ap$, con p un $+(a,b)$-palíndromo.

(i) Si $w = bp$, y p es $+(a,b)$-palíndromo, entonces $\gamma(w) = b\left(qb^{-1}\right)$ con q un (t,b)-palíndromo. Haciendo simplificación cíclica obtenemos el relator q.

(ii) Si $w = bp$, y p es $-(a,b)$-palíndromo, entonces $\gamma(w) = b(bq)$ con q un (t,b)-palíndromo. Rotando el relator, obtenemos la palabra bqb.

En cualquiera de los dos casos, G admite una presentación palindrómica en los generadores b y t.

(iii) Si $w = ap$ con p un $+(a,b)$-palíndromo, entonces $\gamma(w) = tb^{-1}\left(qb^{-1}\right) = th$, así que tenemos ahora la presentación cuasi palíndrome para G, $G = \langle b, t \mid th\rangle$, donde h es un $-(b,t)$-palíndrome. Esto nos lleva al caso (ii) anterior, y por tanto, repitiendo el proceso con la sustitución dada por $\lambda(b) = st^{-1}$ y $\lambda(t) = t$, donde $\lambda : \langle b, t\rangle \to \langle s, t\rangle$ es un isomorfismo de grupos libres, obtenemos una presentación palindrómica para G. ☑

4. Resultado central

Los siguientes dos teoremas fueron probados por Fine, Levin y Rosenberg, usando una notación diferente.

Teorema 4.1 ([4], Prop. 3.2). *Sea $w \in F = \langle a, b\rangle$ como en (2), y tal que $w \equiv \overleftarrow{w}$, es decir, w y $\overleftarrow{w}$ son conjugados. Entonces tenemos solo cuatro posibilidades:*

(i) $w = a^l q$, con q un (b,a)-palíndromo,

(ii) $w = a^l q_1 a^l q_2$, con q_1, q_2 dos (b,a)-palíndromos,

(iii) $w = pb^l$, con p un (a,b)-palíndromo,

(iv) $w = p_1 b^l p_2 b^l$, con p_1, p_2 dos (a,b)-palíndromos,

donde $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Recíprocamente, si w satisface alguna de las propiedades, entonces $w \equiv \overleftarrow{w}$.

Teorema 4.2 ([4], Prop. 3.4). *Sea $w \in F = \langle a, b\rangle$ como en (2) y tal que $w \equiv \widetilde{w}$. Entonces existe $v \in F$ y $l \in \mathbb{N}$ tal que*

$$w = (v\widetilde{v})^l . \tag{5}$$

Recíprocamente, si w satisface (5) entonces $w \equiv \widetilde{w}$.

Llegamos así a nuestro resultado central:

Teorema 4.3. *Si G es un nudo hiperbólico tal que su grupo tiene dos generadores y una relación, entonces G admite una presentación de la forma*

$$G = \langle a, t \mid p \rangle ,$$

donde $p = p\,(a, t)$ es un palíndromo en a y t.

Demostración. Sea $G = \pi_1\,(K) = \langle a, b \mid w \rangle$ y K un nudo hiperbólico. Entonces existe una representación fiel de G en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, por lo que podemos considerar a G como un subgrupo de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Entonces, por [4] la función $\widetilde{\ }$ dada por (4) define un automofismo de G. Puesto que G no es metabeliano, por [4, Theo. 3.1], $w \equiv \overleftarrow{w}$ ó $w \equiv \widetilde{w}$.

El caso $w \equiv \widetilde{w}$ no es posible, ya que por el Teorema 4.2, $w = (v\widetilde{v})^l$, pero como G es libre de torsión, entonces $l = 1$ y $\sigma_a\,(w) = \sigma_a\,(v) + \sigma_a\,(\widetilde{v}) = 0$ y $\sigma_b\,(w) = 0$. Pero entonces, como $G_{ab} = \langle a, b \mid \sigma_a\,(w)\,a + \sigma_b\,(w)\,b \rangle \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, se llega a una contradicción, dado que como G es el grupo de un nudo, entonces se tiene que $G_{ab} \approx \mathbb{Z}$.

Concluimos así que $w \equiv \overleftarrow{w}$, y se cumple uno de los casos del Teorema 4.1.

Si se cumple (i) ó (iii), entonces w es un cuasi palíndromo, y por el Lema 3.2, podemos encontrar una presentación palindrómica para G.

Si (ii) ó (iv) se cumple, entonces w es el producto de un (a, b)-palíndromo y un (b, a)-palíndromo; entonces, por Lema 3.1, w se puede reescribir como un palíndromo ó un cuasi palíndromo, y de nuevo, por Lema 3.2 obtenemos el resultado. Nótese que como w es un relator y la reescritura se efectúa utilizando rotación, no hay problema en usar el Lema 3.1. ☑

Un punto central para esta prueba es el hecho de que en G la función $\widetilde{\ }$ sea un automorfismo de grupos. En el caso de nuestra prueba ese resultado se deduce de la existencia de una representación fiel en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, pero el resultado seguirá siendo cierto en todos aquellos grupos de nudos en los cuales $\widetilde{\ }$ sea un automorfismo. En particular, el siguiente lema nos indica que si el grupo tiene una presentación palindrómica, se cumple esta condición.

Lema 4.4. *Si G es un grupo que admite una presentación palindrómica, es decir, existe una presentación de la forma $G = \langle a, t \mid p \rangle$, donde $p = p\,(a, t)$ es un palíndromo en a y t, entonces la función $\widetilde{\ }$ inducida por $a \to a^{-1}$ y $b \to b^{-1}$ es un automorfismo de G.*

Demostración. Como p es un palíndromo, existe $w \in \langle a, t\rangle$ tal que $p = wx\overleftarrow{w}$, con $x \in \{1, a, b\}$. Para probar que la función $\widetilde{\ }$ es un homomorfismo de grupos basta probar que en el grupo libre $\langle a, t\rangle$ se cumple que $\widetilde{p} \in \langle p\rangle$, donde $\langle p\rangle$ es la clausura normal de p. Ahora

$$\widetilde{p} = \widetilde{wx\overleftarrow{w}} = \widetilde{w}x^{-1}\widetilde{\overleftarrow{w}} = \overleftarrow{w}^{-1}x^{-1}w^{-1} = (wx\overleftarrow{w})^{-1} \in \langle p\rangle\,,$$

o sea que en efecto $\widetilde{\ }$ es homomorfismo, y como además se sabe que es biyección, tenemos el resultado. ☑

Este lema y el resultado anterior nos proporciona una equivalencia entre el hecho de que un nudo tenga presentación palindrómica y que su grupo fundamental admita a $\widetilde{\ }$ como un automorfismo. Esto nos lleva a la pregunta: *¿Será que si el grupo G de un nudo L tiene dos generadores tales que $\widetilde{\ }$ es un automorfismo, se cumple que L es un nudo de número de túnel 1?*

5. Comentarios finales

Es muy interesante el hecho de que si uno pasa a grupos de nudos con 3 generadores y dos relaciones, ya se sabe muy poco. Desde el punto de vista algebraico, estos grupos son muy difíciles de tratar, y desde el punto de vista topológico tampoco hay mucho que se pueda decir.

Se sabe que si el nudo es de tres puentes, entonces admite una presentación de la forma

$$\left\langle a, b, c \mid awb^{-1}w^{-1},\ auc^{-1}u^{-1}\right\rangle \tag{6}$$

para un par de palabras $w, u \in \langle a, b, c\rangle$, donde a, b, c son meridianos del nudo. Pero no se tiene el tipo de descripción para las palabras w y u que se conoce para la palabra de los nudos de dos puentes. De hecho, los nudos de tres puentes no están clasificados aún.

El recíproco de este tampoco se sabe, es decir si el grupo del nudo admite una presentación de la forma (6), donde los generadores sean meridianos, no se sabe si es o no de tres puentes.

Si nos salimos del campo de los nudos clásicos y consideramos nudos virtuales, la deficiencia no tiene que ser 1, puede ser 0. Es decir, tenemos que considerar nudos con presentación de la forma

$$G = \langle a, b \mid r(a, b), s(a, b)\rangle$$

para dos palabras r y s. Dentro de estos se estudian todos los casos clásicos. Se requiere que $G_{ab} \simeq \mathbb{Z}$. Esto da restricciones sobre las palabras. De hecho, podemos pedir que a y b sean meridianos, aunque aquí este concepto no tiene mucha interpretación geométrica, ya que este grupo no necesariamente corresponde al grupo fundamental de una variedad.

Referencias

[1] Burde G. and Zieschang H., *Knots*, Gruyter Studies in Mathematics, 5. Walter de Gruyter, Berlin, 1985.

[2] Boileau M. and Weidmann R., "The structure of 3-manifolds with two-generated fundamental group", *Topology* 44 (2005), no. 2, 283–320.

[3] Callahan J., "Conjugate generators of knot and link groups", *J. Knot Theory Ramifications* 19 (2010), no. 7, 905–916.

[4] Fine B., Levin F. and Rosenberger G., "Faithful complex representations of one relator groups", *New Zealan J. Math.* 26 (1997), no. 1, 45–52.

[5] Gilman J. and Keen L., "Discreteness criteria and the hyperbolic geometry of palindromes", *Conform. Geom. Dyn.* 13 (2009), 76–90.

[6] Gordon C. and Luecke J., "Knots are determined by their complements", *Bull. Amer. Math. Soc.* 20 (1989), no. 1, 83–87.

[7] Hilden M., Tejada D. and Toro M., "Tunnel number one knots have palindrome presentations", *J. Knot Theory Ramifications* 11 (2002), no. 5, 815–831.

[8] Hilden M., Tejada D. & Toro M., "Topología y simplificación de presentaciones de grupos", *Lect. Mat.* 23 (2002), no. 2, 75–96.

[9] Kawauchi A., *A survey of knot theory*, Birkhäuser Verlag, 1996.

[10] Morimoto K. and Sakuma M., "On unknotting tunnels for knots", *Math. Ann.* 289 (1991), no. 1, 143–167.

[11] Norwood F., "Every two generator knot is prime", *Proc. Amer. Math. Soc.* 86 (1982), no. 1, 143–147.

[12] Pommerenke C. and Toro M., "On the two-parabolic subgroups of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$", *Rev. Colombiana Mat.* 45 (2011), no. 1, 37–50.

[13] Riley R., "Nonabelian representations of 2-bridge knot groups", *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 35 (1984), no. 138, 191–208.