Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 29, No. 2, 2011, pág. 127–142

Acerca del retículo de las pretopologías sobre un conjunto X

Félix A. Páez Díaz*

Universidad Pontificia Bolivariana, Departamento de Ciencias Básicas, Bucaramanga, Colombia.

Resumen. Mostramos que $(\mathrm{Pretop}(X), \leq)$, el retículo de las pretopologías sobre un conjunto arbitrario X, siempre tiene un esqueleto, y presentamos una caracterización de los coátomos en $\mathrm{Pretop}(X)$ en términos de ultratopologías sobre X.
Palabras claves: retículo, pretopologías, esqueletos de retículos completos, ultratopologías.
MSC2000: 06B30, 54H12, 06F30.

About the lattice of pretopologies on an set X

Abstract. We show that $(\mathrm{Pretop}(X), \leq)$, the lattice of pretopologies on an arbitrary set X, always has a framework; we present a characterization of the co-atoms in $\mathrm{Pretop}(X)$ in terms of ultratopologies on X.
Keywords: lattice, pretopologies, complete lattices frameworks, ultratopologies.

1. Introducción

La noción de pretopología sobre un conjunto X se introduce como una función del conjunto 2^X de los subconjuntos de X, en sí mismo satisfaciendo ciertas propiedades.

Este concepto ha sido estudiado ampliamente por G. Choquet, quien en primera instancia les da el nombre de espacios $\mathcal{V}_D$, y después introduce estos espacios a partir de cierta colección de filtros de vecindades ([5]). Posteriormente dichos espacios son estudiados por E. Čech, quien les da el nombre de espacios de clausura ([4]), y por D. C. Kent, quien los introduce como una clase particular de funciones convergentes ([10] y [11]).

Estos espacios han encontrado recientemente importantes aplicaciones en áreas como Ciencias Sociales, Teoría de Juegos y Procesamiento Matemático de Imágenes (ver [1], [2] y [12]), al igual que en Biología en el estudio de espacios de Fenotipo y Genotipo (ver

*Autor para correspondencia: *E-mail*: felix.paez@upb.edu.co.

Recibido: 12 de septiembre de 2011, Aceptado: 14 de diciembre de 2011.

[14] y [15]); así mismo en Lógica para, a partir de su retículo, determinar la semántica proposicional de la programación lineal (ver [13]).

En [3] se identifican las pretopologías sobre un conjunto X con un subretículo de filtros en X^X, y a partir de esta identificación se estudia gran parte de la estructura de $(\mathrm{Pretop}(X), \leq)$. En este escrito presentamos una caracterización de los coátomos en $\mathrm{Pretop}(X)$, en términos de ultratopologías sobre X. Nos basamos en algunas de las propiedades presentadas en [3] para mostrar que $\mathrm{Pretop}(X)$ siempre tiene un esqueleto.

2. Nociones básicas

Pretopologías

Una *pretopología o un operador pretopológico* sobre un conjunto X es una función $p : 2^X \to 2^X$ que satisface:

$(K1)$ $p(\emptyset) = \emptyset$;

$(K2)$ $A \subseteq p(A)$ para cada $A \subseteq X$;

$(K3)$ $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$ para cada $A, B \subseteq X$.

El par (X, p) es llamado un *espacio pretopológico* y el conjunto $p(A)$ es llamado la *clausura* de A en (X, p).

Si además de las propiedades $(K1) - (K3)$ p satisface la propiedad

$(K4)$ $p(p(A)) = p(A)$ para cada $A \subseteq X$,

entonces p recibe el nombre de *operador de clausura de Kuratowski* (u *operador topológico de clausura*) sobre X.

En lo que sigue de este escrito denotamos el conjunto de todas las pretopologías sobre X, al igual que el conjunto de todas las topologías sobre X, mediante $\mathrm{Pretop}(X)$ y $\mathrm{Top}(X)$, respectivamente.

Observación 2.1. Si denotamos por

$$\mathcal{K}(X) = \{p \in \mathrm{Pretop}(X) \mid p(p(A)) = p(A) \text{ para cada } A \subseteq X\},$$

y definimos $F : \mathcal{K}(X) \to \mathrm{Top}(X)$ mediante

$$F(p) := \tau_p = \{X \smallsetminus p(X \smallsetminus A) \mid A \subseteq X\},$$

y $G : \mathrm{Top}(X) \to \mathcal{K}(X)$ mediante

$$G(\tau) := p_\tau, \text{ donde } p_\tau(A) = adh_\tau(A) \text{ para cada } A \subseteq X$$

$(adh_\tau(A)$ denota la adherencia de A respecto a la topología $\tau)$, entonces los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}(X) \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "I_{\mathcal{K}(X)}"'] & \mathrm{Top}(X) \arrow[d, "G"] \arrow[dl, phantom, "\equiv"] \\ & \mathcal{K}(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Top}(X) \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "I_{\mathrm{Top}(X)}"'] & \mathcal{K}(X) \arrow[d, "F"] \arrow[dl, phantom, "\equiv"] \\ & \mathrm{Top}(X) \end{tikzcd}$$

conmutan. Es decir, $p_{\tau_p} = p$ y $\tau_{p_\tau} = \tau$. Esto es una consecuencia directa de [17, Teorema 3.7, p. 25]. En vista de esto, una topología puede pensarse como un operador de clausura de Kuratowski. Por tanto, para una función $p : 2^X \to 2^X$ que satisface $(K1) - (K4)$, los términos operador de clausura de Kuratowski y topología se pueden intercambiar sin lugar a ambigüedad.

Una pretopología puede ser definida de manera conveniente mediante la especificación de una colección de subconjuntos de X, para cada $x \in X$, en el siguiente sentido: si p es una pretopología sobre X, para cada $x \in X$ p define una colección $\mathcal{V}_p(x)$ dada por

$$\mathcal{V}_p(x) = \{A \subseteq X \mid x \in X \setminus p(X \setminus A)\} \tag{1}$$

que satisface:

$(V1)$ $x \in V$ para cada $V \in \mathcal{V}_p(x)$;

$(V2)$ Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_p(x)$, existe $V_3 \in \mathcal{V}_p(x)$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$;

$(V3)$ Si $V_1 \in \mathcal{V}_p(x)$ y $V_1 \subseteq V_2$, entonces $V_2 \in \mathcal{V}_p(x)$.

Si además de $(V1) - (V3)$, $\mathcal{V}_p(x)$ satisface la condición

$(V4)$ Si $V \in \mathcal{V}_p(x)$, existe $V_1 \in \mathcal{V}_p(x)$ tal que $V \in \mathcal{V}_p(y)$ para cada $y \in V_1$,

entonces p es una topología sobre X.

Recíprocamente, si para cada $x \in X$, se asigna una colección $\mathcal{V}(x)$ de subconjuntos de X que satisfacen las condiciones $(V1) - (V3)$, entonces existe una única pretopología $p_{\mathbf{V}}$ sobre X para la cual el filtro de vecindades $\mathcal{V}_{p_{\mathbf{V}}}(x)$ de cada x es precisamente $\mathcal{V}(x)$ (ver [4, Teorema 14B.10, p. 243]).

Dicha pretopología está definida por

$$p_{\mathbf{V}}(A) = \{x \in X \mid A \cap V \neq \emptyset \text{ para cada } V \in \mathcal{V}(x)\}. \tag{2}$$

Nótese que las condiciones $(V1) - (V3)$ implican que $\mathcal{V}_p(x)$ es un filtro sobre X.

Observación 2.2. De lo anterior se sigue que si

$$\mathcal{N}(X) = \{\mathbf{V} = \{\mathcal{V}(x)\}_{x \in X} \mid \text{para cada } x \in X,\ \mathcal{V}(x) \subseteq 2^X \text{ y satisface } (V1) - (V3)\},$$

y si $H : \mathrm{Pretop}(X) \to \mathcal{N}(X)$ es la función definida por $H(p) = \mathbf{V}_p = \{\mathcal{V}_p(x)\}_{x \in X}$, y $J : \mathcal{N}(X) \to \mathrm{Pretop}(X)$ es la función definida por $J(\mathbf{V}) = p_{\mathbf{V}}$ (como en (2)), los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pretop}(X) \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "I_{\mathrm{Pretop}(X)}"'] & \mathcal{N}(X) \arrow[d, "J"] \\ & \mathrm{Pretop}(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{N}(X) \arrow[r, "J"] \arrow[dr, "I_{\mathcal{N}(X)}"'] & \mathrm{Pretop}(X) \arrow[d, "H"] \\ & \mathcal{N}(X) \end{tikzcd}$$

conmutan. Es decir, $p_{\mathbf{V}_p} = p$ y $\mathbf{V}_{p_\mathbf{V}} = \mathbf{V}$. Esto es consecuencia directa de [4, Teorema 14B.10, p. 243].

2.1. Retículos

Suponemos que el lector está familiarizado con las nociones básicas de cota superior e inferior, supremo (o sup), e ínfimo (o ínf) de subconjuntos de conjuntos ordenados. [6] y [16] son excelentes referencias sobre este tema.

Si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado y $A \subseteq X$, con $A^{\uparrow}$ denotamos el conjunto de las cotas superiores de A, y con $A^{\downarrow}$ el conjunto de las cotas inferiores de A. De igual forma, denotamos el supremo y el ínfimo de A en $(X, \leq)$ mediante $\bigvee A$ y $\bigwedge A$, respectivamente. Para hacer referencia a un conjunto ordenado $(X, \leq)$, se acostumbra decir simplemente que X es un conjunto ordenado, siempre que no haya lugar a confusión respecto a la relación $\leq$.

Sean X y L conjuntos ordenados; se dice que una función $f : X \to L$ es *monótona*, o que *preserva orden*, si

$$x \leq y \text{ en } X \text{ implica } f(x) \leq f(y) \text{ en } L.$$

La función f es una *inmersión de orden* si

$$x \leq y \text{ en } X \text{ si y sólo si } f(x) \leq f(y) \text{ en } L.$$

Un *isomorfismo de orden* es una inmersión de orden sobreyectiva (y por consiguiente, biyectiva). Si existe una inmersión de orden de X sobre L, se dice que X y L son *orden-isomorfos* y se escribe $X \cong L$.

Un subconjunto A de un conjunto ordenado X es un *ideal de orden* (o *conjunto decreciente* o *conjunto inferior*), si $y \leq x \in A$ implica $y \in A$, para $x, y \in X$. Entre los ideales de orden se destacan los ideales principales: para $x \in X$, el conjunto

$$\downarrow x := \{y \in X \mid y \leq x\},$$

recibe el nombre de *ideal principal generado por x*.

Si X es un conjunto ordenado y $x, y \in X$, escribimos $x \prec y$ si y es el inmediato sucesor de x, es decir, si $x < y$ y no existe $z \in X$ tal que $x < z < y$.

Si X tiene elemento máximo lo denotamos mediante 1, y si tiene elemento mínimo lo denotamos mediante 0. Decimos que X es *acotado*, si tiene 0 y 1.

De otro lado, si para cada $x, y \in X$ el conjunto $\{x, y\}$ tiene supremo e ínfimo, decimos que X es un *retículo*. Un retículo con 0 y 1 se dice que es un *retículo acotado*. X es un *retículo completo* si para cada $A \subseteq X$, $\bigvee A$ y $\bigwedge A$ existen.

Obsérvese que si X es un retículo completo se tiene

$$\begin{aligned} \text{ínf}\,\emptyset \; &= \sup X = \text{máximo de } X = 1, \\ \sup\emptyset &= \text{ínf}\, X \; = \text{mínimo de } X \; = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, todo retículo completo es un retículo acotado.

Si X es un retículo acotado, decimos que $a \in X$ es un *átomo* si $0 \prec a$. De manera dual, a es un *coátomo* en X si $a \prec 1$.

Un retículo acotado X es *atómico* si, para cada $x \in X \setminus \{0\}$ existe un átomo $a \in X$ tal que $a \leq x$. Dualmente, un retículo acotado X es *coatómico* si, para cada $x \in X \setminus \{1\}$, existe un coátomo $a \in X$ tal que $x \leq a$.

Una colección $\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ de elementos de un retículo X es un *cubrimiento* de $b \in X$, si $b \leq \bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma$. Un elemento b de un retículo X es *compacto* si, para cada cubrimiento $\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ de b, existen $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n \in \Gamma$ tales que $b \leq \bigvee\limits_{i=1}^{n} b_{\gamma_i}$.

Un subconjunto E de un retículo completo X es *sup-denso* en X, si para cada $a \in X$, existe $A \subseteq E$ tal que $a = \bigvee A$. De manera dual, E es *inf-denso* en X, si para cada $a \in X$ existe un $A \subseteq E$ tal que $a = \bigwedge A$.

Un retículo completo X es *compactamente generado* si el conjunto formado por los elementos compactos de X es sup-denso en X.

Si X es un conjunto ordenado, existen retículos completos que contiene una imagen orden-isomorfa de X. Dichos retículos reciben el nombre de completamiento o completado de X.

Todo conjunto ordenado X induce un retículo completo denominado el *completamiento de Dedekind-MacNeille* de X, notado por $DM(X)$ el cual posee importantes propiedades.

La definición por cotas de $DM(X)$ está dada por:

$$DM(X) = \{A \subseteq X \mid A^{\uparrow\downarrow} = A\}.$$

Existen definiciones de $DM(X)$ por cortaduras [7, Definición 2.3, p. 68], e ideales principales [7, Definición 2.2, p. 68]. En [7, Teorema 2.4, p. 68] prueban que dichas definiciones son todas equivalentes.

En [7, Teorema 3.1, p. 71] se prueba que $DM(X)$ con el orden de la contenencia es un retículo completo. Más aún, se muestra que la correspondencia

$$\begin{aligned} (X, \leq) &\to (DM(X), \subseteq) \\ x &\mapsto \downarrow x \end{aligned}$$

es una inmersión de orden, que además es regular. Es decir, preserva los sup e ínf existentes en X. Por tanto, $(DM(X), \subseteq)$ es un completamiento natural de X.

Una de las principales características de $DM(X)$ es que es el menor retículo completo que contiene a X como subconjunto sup-denso e inf-denso. De forma más precisa, si X es un subconjunto sup-denso e inf-denso de un retículo completo L, entonces $L \cong DM(X)$

[8, Teorema 2.8, p. 112]. Para una revisión detallada de la construcción de $DM(X)$ y sus demás propiedades, pueden ser consultadas [6, Sección 7.38, p. 166] o [7].

De forma inversa, existen retículos completos $(L, \leq)$ que pueden ser caracterizados por ser el completado de Dedekind-MacNeille de algún subconjunto propio. En tal caso dicho subconjunto es denominado un esqueleto para $(L, \leq)$. Enunciamos formalmente la noción de esqueleto en la siguiente definición, la cual, es tomada de [8].

Definición 2.3. Sea $(X, \leq)$ un retículo completo.

a) Un subconjunto E de X es un *esqueleto* de X si $E \neq X$ y $DM(E) \cong X$. De [8, Teorema 2.8, p. 112] se puede decir de manera equivalente que E es un esqueleto de X si $E \subsetneqq X$ y E es sup-denso e inf-denso en X.

b) Un esqueleto E de X es un *esqueleto mínimo* de X si ningún subconjunto propio de E es un esqueleto de X.

c) Si $E = \{a \in X \mid a \text{ es un átomo}\} \bigcup \{a \in X \mid a \text{ es un coátomo}\}$ es un esqueleto mínimo de X, E se denomina el *esqueleto atómico* de X.

Un esqueleto determina completamente un retículo completo en el sentido que si dos retículos completos X_1 y X_2 tienen esqueletos isomorfos E_1 y E_2, respectivamente, entonces X_1 y X_2 también son isomorfos. Esto es consecuencia directa de [8, Teorema 2.8, p. 112].

Por otra parte, no todo retículo completo es el completado de Dedekind-MacNeille de algún subconjunto propio. Es decir, existen retículos completos sin esqueletos. El lector interesado en conocer más a fondo sobre este tema puede remitirse a [8].

Si $p, q \in \text{Pretop}(X)$, por (1) podemos considerar las familias $\mathcal{V}_p(x)$ y $\mathcal{V}_q(x)$ para cada $x \in X$. Esto nos permite definir una relación $\leq$ en X como sigue:

$$p \leq q \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x), \text{ para cada } x \in X. \tag{3}$$

Nótese que $\leq$ es una relación de orden sobre $\text{Pretop}(X)$; la reflexividad y transitividad de $\leq$ se siguen fácilmente de su definición.

Para ver que $\leq$ es antisimétrica, tomemos $A \subseteq X$ y $p, q \in \text{Pretop}(X)$ tales que $p \leq q$ y $q \leq p$, y veamos que $p(A) = q(A)$, con lo cual se tiene que $p = q$.

Si $x \notin p(A) = p(X \smallsetminus (X \smallsetminus A))$, de (1) se tiene que $X \smallsetminus A \in \mathcal{V}_p(x)$, y puesto que $p \leq q$, se sigue que $X \smallsetminus A \in \mathcal{V}_q(x)$, lo cual implica, nuevamente por (1) que $x \in X \smallsetminus q(X \smallsetminus (X \smallsetminus A)) = X \smallsetminus q(A)$. Así, $x \notin q(A)$. Luego si $p \leq q$, $q(A) \subseteq p(A)$.

De forma análoga, intercambiando p y q, se tiene que si $q \leq p$, $p(A) \subseteq q(A)$ y por tanto, si $p \leq q$ y $q \leq p$ se sigue que $p(A) = q(A)$.

De esta forma, $(\text{Pretop}(X), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, que además tiene como elemento máximo (1) la pretopología que tiene como filtro de vecindades, para cada $x \in X$, la colección $\mathcal{V}_1(x) = \langle x \rangle$, donde $\langle x \rangle$ denota el ultrafiltro principal generado por el conjunto $\{x\}$. Es decir, $\langle x \rangle = \{A \subseteq X \mid \{x\} \subseteq A\}$.

De igual forma, $(\text{Pretop}(X), \leq)$ tiene como elemento mínimo (0) la pretopología que tiene como filtro de vecindades, para cada $x \in X$, la colección $\mathcal{V}_0(x) = \{X\}$.

De otro lado, obsérvese que si $\mathcal{C} = \{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una colección de elementos de Pretop(X), entonces el ínfimo de la colección $\mathcal{C}$, notado por $\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma$, es precisamente la pretopología $p_\wedge$ que tiene como filtro de vecindades, para cada $x \in X$, la colección

$$\mathcal{V}_{p_\wedge}(x) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$$

($\mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$ denota el filtro de vecindades de x en la pretopología p_γ). En efecto, es fácil ver que, para cada $x \in X$, $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$ satisface las condiciones $(V1) - (V3)$, y por tanto define una pretopología sobre X. Ahora, puesto que para cada $x \in X, \gamma \in \Gamma$, se tiene que $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \subseteq \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$, de (3) se sigue que $p_\wedge \leq p_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Es decir, $p_\wedge$ es una cota inferior de $\mathcal{C}$.

Además, si $q \in$ Pretop(X) es tal que $q \leq p_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$, de (3) se sigue que para cada $x \in X, \gamma \in \Gamma$, $\mathcal{V}_q(x) \subseteq \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$, y por tanto $\mathcal{V}_q(x) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$. Luego $q \leq p_\wedge$. De esta forma, $p_\wedge$ es la mayor de las cotas inferiores de la colección $\mathcal{C}$.

Por otra parte, obsérvese que para cada $x \in X$ se tiene que cada intersección finita de elementos de $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$ es no vacía (pues por $(V1)$, cada elemento de $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$ contiene a x), y por tanto para cada $x \in X$, $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$ constituye una subbase para un filtro sobre X. De esta manera, el sup de la colección $\mathcal{C}$, notado por $\bigvee_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma$, es precisamente la pretopología $p_\vee$ que tiene como filtro de vecindades, para cada $x \in X$, la colección $\mathcal{V}_{p_\vee}(x) = \left\langle \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \right\rangle$, donde $\left\langle \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \right\rangle$ denota el filtro generado por la subbase $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$. Es decir,

$$\left\langle \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \right\rangle = \{A \subseteq X \mid \text{existen } V_1, V_2, \ldots, V_n \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \text{ tal que } \bigcap_{i=1}^{n} V_n \subseteq A\}.$$

En efecto, es fácil ver que para cada $x \in X$, $\left\langle \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \right\rangle$ satisface $(V1) - (V3)$, y por consiguiente define una pretopología sobre X.

Ahora, puesto que, para cada $x \in X, \gamma \in \Gamma$, se tiene que $\mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \subseteq \left\langle \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \right\rangle$; de (3) se sigue que $p_\gamma \leq p_\vee$ para cada $\gamma \in \Gamma$, y por consiguiente, $\left\langle \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \right\rangle$ es una cota superior de $\mathcal{C}$.

Además, si $q \in$ Pretop(X) es tal que $p_\gamma \leq q$, para cada $\gamma \in \Gamma$, entonces, de (3) se tiene que $\mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ para cada $x \in X, \gamma \in \Gamma$, y por tanto $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$. De lo cual se sigue que $\left\langle \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \right\rangle \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ para cada $x \in X, \gamma \in \Gamma$. De esta forma se tiene que

$p_\vee$ es la menor de las cotas superiores de $\mathcal{C}$.

Por tanto $(\mathrm{Pretop}(X), \leq)$ es un retículo completo.

En la siguiente sección mostramos que $(\mathrm{Pretop}(X), \leq)$ siempre tiene un esqueleto.

De otro lado, si para $\mathbf{V} = \{\mathcal{V}(x)\}_{x\in X}$ y $\mathbf{V}' = \{\mathcal{V}'(x)\}_{x\in X}$, en el conjunto $\mathcal{N}(X)$ (de la Observación 2.2) definimos la relación

$$\mathbf{V} \leq \mathbf{V}' \text{ si y sólo si } \mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{V}'(x) \text{ para cada } x \in X,$$

y tomamos el orden usual en $\mathrm{Top}(X)$; es fácil ver que las funciones F, G, H y J de las Observaciones 2.1 y 2.2 son isomorfismos de orden.

Usaremos la siguiente proposición al final de la Sección 2 para caracterizar los coátomos en $\mathrm{Pretop}(X)$.

Proposición 2.4. *Sea*

$$\mathcal{N}'(X) = \{\mathbf{V} \in \mathcal{N}(X) \mid \mathcal{V}(x) \textit{ satisface } (V4) \textit{ para cada } x \in X\}$$

con el orden heredado de $\mathcal{N}(X)$, *y sea* $H' : (\mathcal{K}(X), \leq) \to (\mathcal{N}'(X), \leq)$ *la función definida por*

$$H'(p) = H(p) \textit{ (de la Observación 2.2).}$$

Si $L : (\mathrm{Top}(X), \subseteq) \to (\mathcal{N}'(X), \leq)$ *es la función definida por*

$$L(\tau) := \mathbf{V}_\tau = \{\mathcal{V}_\tau(x)\}_{x\in X},$$

donde $\mathcal{V}_\tau(x)$ *denota las vecindades de* x *en* τ, *entonces* L *y* H' *preservan orden, y el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Top}(X), \subseteq) \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "L"'] & (\mathcal{K}(X), \leq) \arrow[d, "H'"] \\
 & (\mathcal{N}'(X), \leq)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir, $\mathcal{V}_\tau(x) = \mathcal{V}_{p_\tau}(x)$ *para cada* $x \in X$.

Demostración. El hecho de que L y H' preservan orden se sigue fácilmente de lo expuesto previamente a la proposición.

Sean $\tau \in \mathrm{Top}(X)$ y $x \in X$. Veamos que $\mathcal{V}_\tau(x) = \mathcal{V}_{p_\tau}(x)$. Si $V \in \mathcal{V}_\tau(x)$, entonces $x \notin adh_\tau(X \smallsetminus V)$, y como $p_\tau(X \smallsetminus V) = adh_\tau(X \smallsetminus V)$, entonces $x \notin p_\tau(X \smallsetminus V)$, y por tanto de (1) se sigue que $V \in \mathcal{V}_{p_\tau}(x)$. Así, $\mathcal{V}_\tau(x) \subseteq \mathcal{V}_{p_\tau}(x)$.

Recíprocamente, si $V \in \mathcal{V}_{p_\tau}(x)$, entonces $x \notin p_\tau(X \smallsetminus V) = adh_\tau(X \smallsetminus V)$, luego existe $O \in \tau$ tal que $x \in O$ y $O \cap (X \smallsetminus V) = \emptyset$. De esta manera $x \in O \subseteq V$, de lo cual V es una vecindad de x en τ, es decir, $V \in \mathcal{V}_\tau(x)$. Así, $\mathcal{V}_{p_\tau}(x) \subseteq \mathcal{V}_\tau(x)$, y por consiguiente $\mathcal{V}_\tau(x) = \mathcal{V}_{p_\tau}(x)$. ☑

Obsérvese que H' está bien definida, puesto que $(K4)$ es equivalente a $(V4)$.

3. Teoremas y pruebas

Las Proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3 y sus pruebas son adaptadas de las Proposiciones 1, 2 y 3 de [3, p. 68] respectivamente.

Proposición 3.1. $(\mathrm{Pretop}(X), \leq)$ *es atómico. Además* $p_{s,a} \in \mathrm{Pretop}(X)$ *es un átomo si y sólo si, existe* $s \in X$ *tal que* $p_{s,a}$ *tiene como filtro de vecindades, para cada* $x \in X \setminus \{s\}$, *la colección* $\mathcal{V}_{p_{s,a}}(x) = \{X\}$, *y para* s, *a* $\mathcal{V}_{p_{s,a}}(s) = \{X, X \setminus \{a\}\}$ *donde* $a \in X \setminus \{s\}$.

Demostración. Sea $p \in \mathrm{Pretop}(X)$ tal que $p \lneq p_{s,a}$. Puesto que $\mathcal{V}_{p_{s,a}}(x) = \{X\}$ para cada $x \neq s$, entonces $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_{p_{s,a}}(x)$ para cada $x \in X$ implica $\mathcal{V}_p(x) = \{X\}$ para cada $x \neq s$. Ahora, puesto que $p \neq p_{s,a}$, se tiene que $\mathcal{V}_p(s) \subsetneq \mathcal{V}_{p_{s,a}}(s)$, y por tanto $\mathcal{V}_p(s) = \{X\}$. Así, $p = 0$.

Por otra parte, si $p \in \mathrm{Pretop}(X)$ y $p \neq 0$, existe $s \in X$ tal que $\mathcal{V}_p(s) \neq \{X\}$, y por tanto, existe $A \subsetneq X$ tal que $A \in \mathcal{V}_p(s)$. Luego existe $a \neq s$ en $X \setminus A$, y así $A \subseteq X \setminus \{a\}$. Por consiguiente, $X \setminus \{a\} \in \mathcal{V}_p(s)$, de lo cual se sigue que la pretopología $p_{s,a}$ (asociada a s y a) es menor que p. Por ende, todo elemento diferente de 0 en $\mathrm{Pretop}(X)$ contiene un átomo. ☑

Proposición 3.2. $(\mathrm{Pretop}(X), \leq)$ *es coatómico. Además* $p_{s,\mathcal{U}} \in \mathrm{Pretop}(X)$ *es un coátomo si y sólo si, existe* $s \in X$ *tal que* $p_{s,\mathcal{U}}$ *tiene como filtro de vecindades para cada* $x \in X \setminus \{s\}$ *la colección* $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) = \langle x \rangle$, *y para* s, *a* $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s) = \mathcal{U} \cap \langle s \rangle$, *donde* $\mathcal{U}$ *es un ultrafiltro distinto de* $\langle s \rangle$.

Demostración. Sea $p \in \mathrm{Pretop}(X)$ tal que $p \neq 1$ y $p_{s,\mathcal{U}} \leq p$. Veamos que $p_{s,\mathcal{U}} = p$.

Si $x \neq s$, $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) = \langle x \rangle$ es un ultrafiltro, y por ende $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) \subseteq \mathcal{V}_p(x)$ implica $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x)$. Por otra parte, como $p \neq 1$, entonces $\mathcal{V}_p(s) \neq \langle s \rangle$, y así se tiene que $\mathcal{U} \cap \langle s \rangle = \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s) \subseteq \mathcal{V}_p(s) \subsetneqq \langle s \rangle$. Veamos que $\langle s \rangle \cap \mathcal{U} = \mathcal{V}_p(s)$. Puesto que $\mathcal{V}_p(s) \subsetneqq \langle s \rangle$, la colección $\beta = \{F \setminus \{s\} | F \in \mathcal{V}_p(s)\}$ es base para un filtro $\mathcal{G}$ sobre X, el cual claramente contiene a $\mathcal{V}_p(s)$, y por tanto $\mathcal{V}_p(s) \subseteq \langle s \rangle \cap \mathcal{G}$.

Ahora, si $A \in \langle s \rangle \cap \mathcal{G}$, entonces $s \in A$ y existe $F \in \mathcal{V}_p(s)$ tal que $F \setminus \{s\} \subseteq A$; así, $F \subseteq A \cup \{s\} = A$ y por tanto $A \in \mathcal{V}_p(s)$. Luego $\langle s \rangle \cap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}_p(s)$, y por consiguiente $\langle s \rangle \cap \mathcal{G} = \mathcal{V}_p(s)$.

Probaremos ahora que $\mathcal{G} = \mathcal{U}$. Si existe $U \in \mathcal{U}$ tal que para cada $F \in \mathcal{V}_p(s)$, $F \nsubseteq U$, entonces para cada $F \in \mathcal{V}_p(s)$ se tiene que $F \nsubseteq U \subseteq U \cup \{s\}$, y por tanto $U \cup \{s\} \notin \mathcal{V}_p(s)$, lo cual es contradictorio pues $U \cup \{s\} \in \langle s \rangle \cap \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}_p(s)$. Así, para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $F \in \mathcal{V}_p(s)$ tal que $F \subseteq U \subseteq U \cup \{s\}$, y por consiguiente $F \setminus \{s\} \subseteq U$, es decir, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$, lo cual implica $\mathcal{U} = \mathcal{G}$. Luego $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s) = \langle s \rangle \cap \mathcal{U} = \langle s \rangle \cap \mathcal{G} = \mathcal{V}_p(s)$. De lo cual se sigue que $p_{s,\mathcal{U}}$ es un coátomo en $\mathrm{Pretop}(X)$.

Por otra parte, si $p \in \mathrm{Pretop}(X)$ y $p \neq 1$, existe $s \in X$ tal que $\mathcal{V}_p(s) \subsetneqq \langle s \rangle$, luego $\mathcal{V}_p(s)$ no es un ultrafiltro, y por ende existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \neq \langle s \rangle$, tal que $\mathcal{V}_p(s) \subseteq \mathcal{U}$. Por otro lado, como $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \langle x \rangle$ para cada $x \in X$, y $\mathcal{V}_p(s) \subseteq \langle s \rangle \cap \mathcal{U}$, tomando para cada $x \neq s$, $x \in X$, $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) = \langle x \rangle$ y para s, $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s) = \mathcal{U} \cap \langle s \rangle$, donde $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro mencionado anteriormente, se tiene que $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x)$, para cada $x \in X$, y por tanto $p_{s,\mathcal{U}}$ es un coátomo tal que $p \leq p_{s,\mathcal{U}}$.

El hecho que Pretop(X) sea coatómico garantiza que todos los coátomos son de la forma mencionada anteriormente, y esto completa la prueba. ☑

La siguiente proposición caracteriza los elementos compactos en Pretop(X) y muestra que el conjunto formado por dichos elementos es sup-denso.

Proposición 3.3. Pretop(X) *es compactamente generado. Además* $p \in$ Pretop(X) *es compacta si y sólo si, para cada* $x \in X$, $\mathcal{V}_p(x) = \langle A_x \rangle$, *donde* $x \in A_x \subseteq X$ *y* $A_x = X$ *salvo para un número finito de elementos de* X.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned}\mathcal{C} = \{q \in \operatorname{Pretop}(X) \mid \mathcal{V}_q(x) = \langle A_x \rangle \text{ para algún } A_x \in \mathcal{V}_p(x), \text{ donde } A_x = X \\ \text{salvo para un número finito de elementos de } X\}.\end{aligned}$$

Denotemos mediante p' a la pretopología $\bigvee \mathcal{C}$. Obsérvese que para cada $x \in X$,

$$\mathcal{V}_{p'}(x) = \left\langle \bigcup_{q \in \mathcal{C}} \mathcal{V}_q(x) \right\rangle = \left\langle \bigcup_{A_x \in \mathcal{V}_p(x)} \langle A_x \rangle \right\rangle = \bigvee \{\langle A_x \rangle \mid A_x \in \mathcal{V}_p(x)\} = \mathcal{V}_p(x).$$

Así $p = \bigvee \mathcal{C}$, y por tanto $\mathcal{C}$ es un cubrimiento de p.

Puesto que p es compacta, existe un número finito, digamos $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de elementos de $\mathcal{C}$ tales que $p \leq \bigvee\limits_{i=1}^{n} q_i$. Denotemos mediante q' la pretopología $\bigvee\limits_{i=1}^{n} q_i$.

Ahora, puesto que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\} = I$ se tiene que $\mathcal{V}_{q_i}(x) = \langle A_{ix} \rangle$, donde $x \in A_{ix} \subseteq X$ y $A_{ix} = X$ salvo para un número finito de elementos de X, es decir, para cada $i \in I$ existen $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im_i} \in X$ tales que $\mathcal{V}_{q_i}(x) = \{X\}$ si $x \neq x_{ij}$, para cada $i \in I, j \in \{1, 2, \ldots, m_i\} = J_i$ y $\mathcal{V}_{q_i}(x_{ij}) = \langle A_{ij} \rangle$, donde $x_{ij} \in A_{ij} \subseteq X$. Entonces $\mathcal{V}_{q'}(x) = \{X\}$ si $x \neq x_{ij}$ para cada $i \in I, j \in J_i$, y

$$\mathcal{V}_{q'}(x_{ij}) = \left\langle \bigcup_{i \in I, j \in J_i} \langle A_{ij} \rangle \right\rangle = \left\langle \bigcap_{i \in I, j \in J_i} A_{ij} \right\rangle = \langle A_{x_{ij}} \rangle,$$

donde $x_{ij} \in A_{x_{ij}} \subseteq X$.

Ahora, puesto que $\bigvee\limits_{i=1}^{n} q_i \leq \bigvee \mathcal{C} = p$, se tiene que $p = \bigvee\limits_{i=1}^{n} q_i = q'$, y por tanto $\mathcal{V}_p(x) = \langle A_x \rangle$, donde $x \in A_x \subseteq X$, y $A_x = X$ salvo para un número finito de elementos de X.

Recíprocamente, veamos que si $p \in$ Pretop(X) es tal que para cada $x \in X$, $\mathcal{V}_p(x) = \langle A_x \rangle$, donde $x \in A_x \subseteq X$ y $A_x = X$ salvo para un número finito de elementos de X, entonces p es compacta.

Si $p = 0$ la conclusión es inmediata, así que, suponemos que $p \neq 0$ y denotemos mediante $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los elementos de X para los cuales $\mathcal{V}_p(x) \neq \{X\}$, es decir, para cada $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{V}_p(x_i) = \langle A_i \rangle$, donde $x_i \in A_i \subsetneq X$ y $\mathcal{V}_p(x) = \{X\}$ si $x \neq x_i$ para cada $i \in I$.

Sea $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ un cubrimiento de p por elementos de $\mathrm{Pretop}(X)$. Veamos que existe un subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $p \leq \bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma_0} p_\gamma$.

Para cada $i \in I$ se tiene que $\mathcal{V}_p(x_i) \subseteq \left\langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x_i) \right\rangle$, es decir, para cada $i \in I$, $A_i \in \bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x_i) = \left\langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x_i) \right\rangle$, y por tanto, para cada $i \in I$ existe un subconjunto finito $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ tal que $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma_i} A_\gamma \subseteq A_i$, donde para cada $\gamma \in \Gamma_i$, $A_\gamma \in \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x_i)$. Luego tomando, para cada $\gamma \in \Gamma_i$ la correspondiente vecindad $\mathcal{V}_{p_\gamma}(x_i)$ a la cual pertenece A_γ, se tiene que $A_i \in \left\langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_i} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x_i) \right\rangle = \bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma_i} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x_i)$. Es decir; $\mathcal{V}_p(x_i) = \langle A_i \rangle \subseteq \left\langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x_i) \right\rangle$.

Sea $\Gamma_0 = \bigcup\limits_{i\in I} \Gamma_i$. Es claro que $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, y que Γ_0 es finito. Además, para cada $x \in X$, $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \left\langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_0} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \right\rangle$, pues para cada $i \in I$, $\mathcal{V}_p(x_i) \subseteq \left\langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_i} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x_i) \right\rangle \subseteq \left\langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_0} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x_i) \right\rangle$, y si $x \notin \{x_i \mid i \in I\}$, $\mathcal{V}_p(x) = \{X\} \subseteq \left\langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_0} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x_i) \right\rangle$. Así $p \leq \bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma_0} p_\gamma$, y por tanto p es compacta. Por último, si $p \in \mathrm{Pretop}(X)$, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{q \in \mathrm{Pretop}(X) \mid q \text{ es compacta y } q \leq p\} \neq \emptyset,$$

pues $0 \in \mathcal{A}$; además, p es cota superior de $\mathcal{A}$, y por tanto

$$\bigvee \{q \in \mathrm{Pretop}(X) \mid q \text{ es compacta y } q \leq p\} \leq p.$$

Por otra parte, si

$$\mathcal{C} = \{q \in \mathrm{Pretop}(X) \mid \mathcal{V}_q(x) = \langle A_x \rangle \text{ para algún } A_x \in \mathcal{V}_p(x), \text{ donde } A_x = X \text{ salvo para un número finito de elementos de } X\},$$

se tiene que, tal y como probamos anteriormente, $p = \bigvee \mathcal{C}$. Además, es claro que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, y por tanto

$$\bigvee \mathcal{A} \leq p = \bigvee \mathcal{C} \leq \bigvee \mathcal{A}.$$

Así, $p = \bigvee\{q \in \mathrm{Pretop}(X) \mid q \text{ es compacta y } q \leq p\}$, y por consiguiente $\mathrm{Pretop}(X)$ es compactamente generado. ☑

Proposición 3.4. *El conjunto de los átomos en* $\mathrm{Pretop}(X)$ *es sup-denso si y sólo si, X es finito.*

Demostración. Supongamos que X es finito y sean $p \in \mathrm{Pretop}(X)$, $p \neq 0$ y $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ el conjunto de puntos de X para los cuales $\mathcal{V}_p(x_i) \neq \{X\}$.

Puesto que X es finito, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\} = I$, existe $A_i \subsetneq X$ tal que $\mathcal{V}_p(x_i) = \langle A_i \rangle$. Ahora, para cada $i \in I$ se tiene que

$$X \smallsetminus A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im_i}\} \ (m_i \text{ es precisamente } |X| - |A_i|).$$

Para cada $i \in I$ tomemos

$$\mathcal{C}_i = \{q_{ij} \in \text{Pretop}(X) \mid j \in \{1, 2, \ldots, m_i\}\},$$

donde para cada $i \in I,\ j \in \{1, 2, \ldots, m_i\} = J_i,\ q_{ij}$ es la pretopología que tiene como filtro de vecindades, para cada $x \in X$, la colección $\mathcal{V}_{q_{ij}}(x) = \{X\}$ si $x \neq x_i$, y $\mathcal{V}_{q_{ij}}(x_i) = \langle X \setminus \{a_{ij}\}\rangle$. Sea

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i.$$

Claramente $\mathcal{C}$ es una colección de átomos. Afirmamos que

$$p = \bigvee \mathcal{C}.$$

En efecto, para cada $i \in I$ se tiene que $A_i \subseteq X \setminus \{a_{ij}\}$ para cada $j \in J_i$, y por tanto $\mathcal{V}_{q_{ij}}(x_i) \subseteq \langle A_i \rangle = \mathcal{V}_p(x_i)$, para cada $i \in I,\ j \in J_i$. De lo cual se sigue que q_{ij} es un átomo contenido en p, para cada $i \in I,\ j \in J_i$. Luego p es una cota superior de $\mathcal{C}$, y por consiguiente $\bigvee \mathcal{C} \leq p$.

Ahora denotemos mediante q la pretopología $\bigvee \mathcal{C}$. Obsérvese que

$$\mathcal{V}_q(x) = \left\langle \bigcup_{i \in I,\, j \in J_i} \mathcal{V}_{q_{ij}}(x) \right\rangle.$$

Para probar que $p \leq q$ tomemos $x \in X$ y veamos que $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$. Si $\mathcal{V}_p(x) = \{X\}$ la conclusión es inmediata. Si $\mathcal{V}_p(x) \neq \{X\}$, existe $i_0 \in I$ tal que $x = x_{i_0}$ y así, $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{V}_p(x_{i_0}) = \langle A_{i_0} \rangle$.

De otro lado, puesto que $\bigcap_{j \in J_{i_0}} X \setminus \{a_{i_0 j}\} = A_{i_0}$, se tiene que A_{i_0} contiene una intersección finita de elementos de

$$\bigcup_{i \in I,\, j \in J_i} \langle X \setminus \{a_{ij}\}\rangle = \bigcup_{i \in I,\, j \in J_i} \mathcal{V}_{q_{ij}}(x),$$

y por tanto

$$A_{i_0} \in \left\langle \bigcup_{i \in I,\, j \in J_i} \mathcal{V}_{q_{ij}}(x) \right\rangle = \mathcal{V}_q(x_{i_0}).$$

De lo cual se sigue que $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ para cada $x \in X$, y así $p = \bigvee \mathcal{C}$.

Recíprocamente, si X no es finito, la pretopología que tiene como filtro de vecindades para cada $x \in X \setminus \{x_0\}$, a $\mathcal{V}_p(x) = \{X\}$ y, $\mathcal{V}_p(x_0) = \langle \{b, x_0\}\rangle$, donde $b, x_0 \in X$, no se puede expresar como el sup de una colección de átomos, pues si existe una colección de átomos $\mathcal{C}$ tal que $p = \bigvee \mathcal{C}$, por la construcción de p necesariamente para cada pretopología q en $\mathcal{C}$ se tiene que $\mathcal{V}_q(x) = \{X\}$ si $x \neq x_0$ y $\mathcal{V}_q(x_0) = \langle X \setminus \{a_q\}\rangle$, para algún $a_q \notin \{b, x_0\}$. Por consiguiente, si $p \leq \bigvee \mathcal{C}$ necesariamente

$$\mathcal{V}_p(x_0) \subseteq \left\langle \bigcup_{q \in \mathcal{C}} \mathcal{V}_q(x_0) \right\rangle = \left\langle \bigcup_{q \in \mathcal{C}} \langle X \setminus \{a_q\}\rangle \right\rangle,$$

lo cual no es posible, pues cualquier intersección finita de elementos de $\bigcup_{q \in \mathcal{C}} \langle X \setminus \{a_q\}\rangle$ es un conjunto infinito, y por tanto no puede estar contenida en $\{b, x_0\}$. ☑

A diferencia de los átomos, el conjunto de los coátomos siempre es inf-denso sin importar si X es finito o no.

Proposición 3.5. *El conjunto de los coátomos en* $\mathrm{Pretop}(X)$ *es inf-denso.*

Demostración. Sea $p \in \mathrm{Pretop}(X)$. El caso $p = 1$ es trivial, así que supongamos que $p \neq 1$ y tomemos

$$\mathcal{A} = \{p_{s,\mathcal{U}} \in \mathrm{Pretop}(X) \mid p_{s,\mathcal{U}} \text{ tal que } p \leq p_{s,\mathcal{U}}\}.$$

De la Proposición 3.2 se sigue que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Afirmamos que $p = \bigwedge \mathcal{A}$. En efecto, claramente $p \leq \bigwedge \mathcal{A}$ pues p es cota inferior de $\mathcal{A}$.

Ahora denotemos mediante q la pretopología $\bigwedge \mathcal{A}$, y veamos que para cada $x_0 \in X$, $\mathcal{V}_q(x_0) \subseteq \mathcal{V}_p(x_0)$, lo cual completa la prueba.

Si $\mathcal{V}_p(x_0) = \langle x_0 \rangle$ la conclusión es inmediata. Supongamos que $\mathcal{V}_p(x_0) \neq \langle x_0 \rangle$.

Sea $A \in \mathcal{V}_q(x_0)$. Si $A \notin \mathcal{V}_p(x_0)$, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}_{x_0}$ que contiene a $\mathcal{V}_p(x_0)$ tal que $A \notin \mathcal{U}_{x_0}$ (dicho filtro existe ya que todo filtro es la intersección de los ultrafiltros que lo contienen y $\mathcal{V}_p(x_0) \neq \langle x_0 \rangle$).

Sea $p_{x_0,\mathcal{U}_{x_0}}$ la pretopología que tiene como filtro de vecindades, para cada $x \in X \setminus \{x_0\}$, a $\mathcal{V}_{p_{x_0,\mathcal{U}_{x_0}}}(x) = \langle x \rangle$, y $\mathcal{V}_{p_{x_0,\mathcal{U}_{x_0}}}(x_0) = \mathcal{U}_{x_0} \cap \langle x_0 \rangle$. Por la construcción de $p_{x_0,\mathcal{U}_{x_0}}$, $p_{x_0,\mathcal{U}_{x_0}} \in \mathcal{A}$, y por tanto $\mathcal{V}_q(x_0) = \bigcap_{p_{s,\mathcal{U}} \in \mathcal{A}} \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x_0) \subseteq \mathcal{V}_{p_{x_0,\mathcal{U}_{x_0}}}(x_0)$, lo cual es contradictorio, pues $A \notin \mathcal{V}_{p_{x_0,\mathcal{U}_{x_0}}}(x_0)$.

De esta forma, $\mathcal{V}_q(x_0) \subseteq \mathcal{V}_p(x_0)$ para cada $x_0 \in X$, y por tanto $p = q = \bigwedge \mathcal{A}$. ☑

En los Teoremas 3.6 y 3.7 usamos lo expuesto en las Proposiciones 3.4, 3.5 y 3.3 para probar que $\mathrm{Pretop}(X)$ siempre tiene un esqueleto; si X es infinito, $\mathrm{Pretop}(X)$ se puede generar a partir de elementos compactos y coátomos, y si X es finito, $\mathrm{Pretop}(X)$ tiene esqueleto atómico.

Teorema 3.6. *El conjunto*

$$\mathcal{E}' := \{q \in \mathrm{Pretop}(X) \mid q \textit{ es compacta}\} \bigcup \{q \in \mathrm{Pretop}(X) \mid q \textit{ es un coátomo}\}$$

es un esqueleto de $\mathrm{Pretop}(X)$ *si y sólo si, X es infinito.*

Demostración. Por un lado, si X es finito, todo filtro sobre X es principal, y por tanto cada elemento de $\mathrm{Pretop}(X)$ es compacto. De lo cual se sigue que $\mathcal{E}' = \mathrm{Pretop}(X)$, y por consiguiente $\mathcal{E}'$ no puede ser un esqueleto de $\mathrm{Pretop}(X)$.

La otra implicación se sigue de las Proposiciones 3.5 y 3.3. ☑

Teorema 3.7. *El conjunto*

$$\mathcal{E} := \{q \in \mathrm{Pretop}(X) \mid q \textit{ es un átomo}\} \bigcup \{q \in \mathrm{Pretop}(X) \mid q \textit{ es un coátomo}\}$$

es un esqueleto de $\mathrm{Pretop}(X)$ *si y sólo si, X es finito. En tal caso, $\mathcal{E}$ es el esqueleto atómico de* $\mathrm{Pretop}(X)$.

Demostración. Por un lado, supongamos que X es infinito y sea p la pretopología que tiene como filtro de vecindades, para cada $x \in X \setminus \{x_0\}$, a $\mathcal{V}_p(x) = \{X\}$, y para x_0 a $\mathcal{V}_p(x_0) = \langle\{b, x_0\}\rangle$, donde $b, x_0 \in X$. Si existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ tal que $p = \bigvee \mathcal{C}$, del hecho de que $p \notin \mathcal{E}$ y $p \neq 1$ se tiene que necesariamente $\mathcal{C} \subseteq \{q \in \mathrm{Pretop}(X) \mid q \text{ es un átomo}\}$, lo cual es contradictorio, pues $p \nleq \bigvee \mathcal{C}$ tal y como probamos en la demostración de la proposición 3.4. Así, si X es infinito $\mathcal{E}$ no es sup-denso y por tanto no es un esqueleto de Pretop(X).

La otra implicación se sigue de las Proposiciones 3.4 y 3.5.

Por último, Si $\mathcal{C} \subsetneqq \mathcal{E}$ y $p \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{C}$ entonces: si p es un átomo, es claro que $p \neq \bigvee \mathcal{C}'$ para cada $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, y por tanto $\mathcal{C}$ no es sup-denso. Y si p es un coátomo, $p \neq \bigwedge \mathcal{C}'$ para cada $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, lo cual implica que $\mathcal{C}$ no es inf-denso.

En cualquier caso se tiene que ningún subconjunto propio de $\mathcal{E}$ es un esqueleto de Pretop(X). Así, $\mathcal{E}$ es el esqueleto atómico de Pretop(X). ☑

Concluimos con una caracterización de los coátomos en Pretop(X).

Teorema 3.8. *$p_{s,\mathcal{U}}$ es un coátomo en* Pretop(X) *si y sólo si, $p_{s,\mathcal{U}}$ es una ultratopología sobre X.*

Demostración. Sea $p_{s,\mathcal{U}} \in \mathrm{Pretop}(X)$ un coátomo. Veamos que $p_{s,\mathcal{U}}$ es una ultratopología.

En primer lugar, obsérvese que para cada $x \in X$, $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x)$ satisface la propiedad (V_4). En efecto, sea $x \in X$. Si $x \neq s$, se tiene que si $V \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) = \langle x\rangle$ entonces $V' = V \setminus \{s\} \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x)$, y si $y \in V'$ entonces $y \in V$ y $y \neq s$. Luego $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(y) = \langle y\rangle$ y por tanto $V \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(y)$.

Por otro lado, para s se tiene que $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s) = \mathcal{U} \cap \langle s\rangle$, donde $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro distinto de $\langle s\rangle$. Luego si $V \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s)$ y $y \in V$, entonces $V \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(y)$, pues si $y \neq s$, $\quad \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(y) = \langle y\rangle$, y si $y = s$, claramente $V \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(y) = \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s)$.

Por consiguiente, para cada $x \in X$ se satisface que si

$$V \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x), \text{ existe } V' \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) \text{ tal que para cada } y \in V',\ V \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(y),$$

y por tanto $p_{s,\mathcal{U}}$ es una topología sobre X.

Ahora, si existe una topología no discreta $\tau \in \mathrm{Top}(X)$ tal que, para cada $x \in X$, $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) \subseteq \mathcal{V}_\tau(x)$, entonces $p_{s,\mathcal{U}} \leq p_\tau$ en Pretop(X), y por tanto $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) = \mathcal{V}_{p_\tau}(x)$ para cada $x \in X$. Pero $\mathcal{V}_{p_\tau}(x) = \mathcal{V}_\tau(x)$ (Proposición 2.4). Lo cual implica que $p_{s,\mathcal{U}}$ es una ultratopología sobre X.

Recíprocamente, si τ es una ultratopología,

$$\tau = \mathcal{J}(s, \mathcal{U}) = \{G \subseteq X \mid s \notin G, \text{ o } G \in \mathcal{U}\}, \tag{4}$$

donde $s \in X$ y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro tal que $s \notin \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$ (ver [9, Teorema 1, p. 80]).

Sea $x \in X$. Si $x \neq s$, $\{x\} \in \tau$, y por tanto $\mathcal{V}_\tau(x) = \langle x\rangle$.

Si $x = s$ y $A \in \mathcal{V}_\tau(s)$, entonces A es abierto y $s \in A$, luego de (4) se tiene que $A \in \mathcal{U}$, y por tanto $\mathcal{V}_\tau(s) \subseteq \mathcal{U} \cap \langle s \rangle$. Ahora, si $A \in \mathcal{U} \cap \langle s \rangle$, $A \in \mathcal{U}$, y por tanto $A \in \tau$. Luego $A \in \mathcal{V}_\tau(s)$. Así, $\mathcal{V}_\tau(s) = \mathcal{U} \cap \langle s \rangle$. Por último, obsérvese que, puesto que $s \notin \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$, $\mathcal{U} \neq \langle s \rangle$.

Así, existe $s \in X$ tal que τ tiene como filtro de vecindades para cada $x \in X \setminus \{s\}$ la colección $\mathcal{V}_\tau(x) = \langle x \rangle$, y para s, a $\mathcal{V}_\tau(s) = \mathcal{U} \cap \langle s \rangle$, donde $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro distinto de $\langle s \rangle$, y por consiguiente de la Proposición 3.2 se sigue que $p_\tau = p_{s,\mathcal{U}}$ es un coátomo en Pretop(X). ☑

Referencias

[1] Abdelkrim M., Tahar I. and Nazha S., "Satellite image segmentation by mathematical pretopology and automatic classification", *Proc. SPIE, Image Processing, Signal Processing, and Synthetic Aperture Radar for Remote Sensing*, Jacky Desachy, Shahram Tajbakhsh, Eds., Vol. 3217, p. 232–236, 1997.

[2] Belmandt Z., *Manuel de Prétopologie et ses Applications*, Hermes, Paris, 1993.

[3] Carstens A.M., "The laticce of pretopologies on an arbitrary set S", *Pacific J. Math.*, Vol. 29, No. 1 (1969), 67–71.

[4] Čech E., *Topological Spaces*, John Wiley & Sons, London, 1966.

[5] Choquet G., "Convergences", *Ann. Univ. Grenoble Sect. Sci. Math. Phys.* (N.S.) 23 (1947-48), 57–112.

[6] Davey B.A. and Priestley H.A., *Introduction to Laticces and Order*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2002.

[7] De Castro R. & Rubiano G., "Una revisión del completamiento de Dedekind-MacNeille", *Miscelánea Matemática*, Sociedad Matematica Mexicana, 37 (2003), 65–76.

[8] De Castro R. & Rubiano G., "Esqueletos de retículos completos", *Bol. Mat.* (N. S.), Vol 10, No. 2 (2004), 109–131.

[9] Fröhlich O., "Das Halbordnungssystem der topologischen Räume auf einer Menge", *Math. Ann.* 156 (1964), 79–95.

[10] Kent D.C., "Convergence funtions and their related topologies", *Fund. Math.* 54 (1964), 125–133.

[11] Kent D.C., "A note on pretopologies", *Fund. Math.* 62 (1968), 95–100.

[12] Mammass D., Djezeri S. and Nouboud F., "A pretopological approach for image segmentation and edge detection", *J. Math. Imaging Vision*, Vol. 15, Issue 3 (November 2001), 169–179.

[13] Sambin G., "Pretopologies and completeness proofs", *J. Simbolic Logic*, Vol 60, No. 3, (September 1995), 861–878.

[14] Stadler B.M.R., Stadler P.F., Wagner G.P. and Fontana W., "The topology of the possible: formal spaces underlying patterns of evolutionary change", *J. Theoret. Biol.* 213 (2001), 241–274.

[15] Stadler B. M.R., Stadler P.F., Shpak M. and Wagner G.P., "Recombination space, metrics, and pretopologies", *Z. Phys. Chem.* 216 (2002), 217–234.

[16] Szász G., *Introduction to Laticce Theory*, Academic Press, New York, 1963.

[17] Willard S., *General Topology*, Addison Wesley, New York, 1968.