

## *Resolución de problemas por medio de matemática experimental: uso de software de geometría dinámica para la construcción de un lugar geométrico desconocido*

MARTÍN E. ACOSTA\*, CAROLINA MEJÍA,  
CARLOS W. RODRÍGUEZ

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

**Resumen.** A través de un ejemplo de geometría euclidiana y utilizando el programa de geometría dinámica *Cabri Géomètre*, mostraremos cómo seguir un proceso para la solución de problemas mediante la matemática experimental que comprende dos momentos: la experimentación y la formalización. El problema que resolvemos es el siguiente: Dado un triángulo cualquiera, encontrar el lugar geométrico de todos los puntos en el plano tales que el triángulo simétrico lateral del triángulo dado sea rectángulo.

**Palabras claves:** experimentación matemática, geometría dinámica, lugar geométrico.

**MSC2000:** 97G99, 97U70.

## *Solving geometric problems through experimental mathematics: use of dynamic geometry software to construct an unknown locus*

**Abstract.** Through an example of Euclidean geometry and using the dynamic geometry software *Cabri Géomètre*, we show here how to follow a process to solve problems via experimental mathematics which include two phases: experimentation and formalization. The problem we solve is as follows: Given a triangle, find the locus for all points in the plane such that the lateral symmetrical triangle to triangle given be rectangle.

**Keywords:** experimental mathematics, dynamic geometry, locus.

---

\* Autor para correspondencia: *E-mail:* martin@matematicas.uis.edu.co.

Recibido: 22 de septiembre de 2011, Aceptado: 25 de noviembre de 2011.

## 1. Introducción

Las tecnologías computacionales han transformado profundamente la forma de trabajo en todas las ciencias, incluidas las matemáticas. Si bien persisten aún matemáticos y educadores matemáticos hostiles al uso de dichas tecnologías, la realidad es que es difícil encontrar científicos contemporáneos que renuncien a su uso en investigación y educación.

Las concepciones contemporáneas sobre las matemáticas y el aprendizaje de las matemáticas adoptan un enfoque epistemológico no formalista, en el que la intuición y la experimentación tienen un papel importante. En Colombia, por ejemplo, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas afirman la necesidad de superar el formalismo como postura filosófica para la fundamentación matemática y de aceptar las matemáticas como ciencia cuasiempírica (ver [6]). Por otra parte, el currículo francés recomienda una mayor participación de la experimentación en los procesos de enseñanza de las matemáticas (ver [5]).

Sin embargo, la adaptación de esas posturas epistemológicas a las prácticas de enseñanza no es fácil luego de más de un siglo de reino del rigor y del formalismo. Esta situación es especialmente difícil en el caso de la geometría, en la que el método axiomático ha predominado desde sus orígenes como directriz de los procesos de enseñanza. Además, las investigaciones contemporáneas en geometría están muy alejadas de los conocimientos básicos que se enseñan a nivel escolar. Como consecuencia, los profesores de matemáticas son portadores de una historia de aprendizaje alejada de la experimentación, y no cuentan con una práctica de referencia en la cual encontrar ejemplos de dicha experimentación como práctica científica legítima.

Adicionalmente existe una fuerte discusión sobre la conveniencia o inconveniencia del uso de *software* de geometría dinámica, basada en el impacto que puede tener en las prácticas de demostración, ya que al producir en el alumno la certeza de conjeturas basadas en la observación, haría inútil o innecesario el proceso de formalización (ver [8]).

Por otra parte, los profesores de matemáticas han abandonado la enseñanza de la demostración en el nivel de la secundaria, y en muchos casos se limitan a la constatación o enunciación de teoremas para aplicarlos en la solución de problemas de cálculo de magnitudes. La comunidad de educadores matemáticos ha manifestado su preocupación ante esta situación, y se han producido documentos y estudios que enfatizan en las posibilidades y la necesidad de enseñar la demostración como componente fundamental de la formación matemática (ver por ejemplo La Carta de la Prueba <http://www.lettredelapreuve.it/> y ver [4]).

Por nuestra parte, adoptamos el punto de vista de la matemática experimental, según el cual es importante difundir las prácticas experimentales en matemáticas sin abandonar completamente la meta del rigor máximo de la demostración. Proponemos como hipótesis fundamental la posibilidad de formalizar a posteriori los procesos experimentales para desarrollar una demostración rigurosa.

Por eso queremos presentar un ejemplo concreto de esta práctica de matemática experimental en el campo de la geometría elemental, que pueda inspirar a los educadores matemáticos y promover actividades de tipo investigativo con los estudiantes. Creemos que las capacidades de cómputo y de representación visual del *software* de geometría dinámica hacen posible una experimentación visual y numérica sin correr excesivos ries-

gos de error debidos a limitaciones de tipo perceptivo o de exactitud de representación gráfica.

El problema de nuestro ejemplo consiste en determinar el lugar geométrico de los puntos que caracterizan una cierta condición que se da a un objeto geométrico. Primero, con la ayuda del *software* de geometría dinámica (ver [3]), *Cabri Géomètre*, hacemos una exploración donde se generan unos ciertos puntos en el plano que nos permiten conjeturar la forma que tiene ese lugar geométrico. Luego, a partir de varias observaciones y utilizando las herramientas propias de *Cabri*, hacemos la construcción de este lugar geométrico. Por último demostramos que efectivamente este conjunto de puntos es la solución al problema planteado.

## 2. Problema

Necesitamos definir algunos conceptos antes de plantear el problema.

**Definición 2.1.** Dado un triángulo,  $\triangle ABC$ , y un punto  $D$  cualquiera en el plano, llamamos triángulo simétrico lateral de  $D$  con respecto al  $\triangle ABC$  al  $\triangle D_A D_B D_C$ , donde  $D_A$  es el punto simétrico de  $D$  con respecto al lado  $\overline{BC}$ ,  $D_B$  es el simétrico con respecto a  $\overline{AC}$  y  $D_C$  es el simétrico con respecto a  $\overline{AB}$  (ver Figura 1).

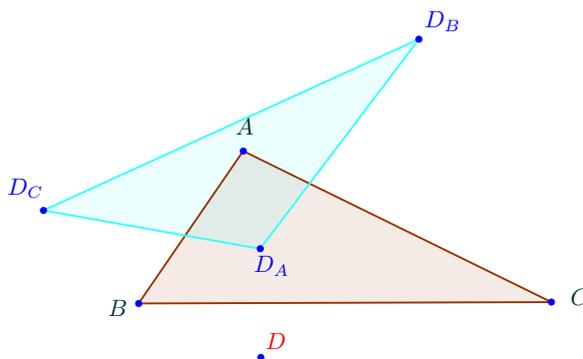


Figura 1. Triángulo simétrico lateral.

Durante este escrito usaremos con frecuencia un concepto matemático denominado *lugar geométrico*, el cual podemos definir intuitivamente como el conjunto de puntos del plano o del espacio que cumplen ciertas condiciones dadas de antemano.

Nuestro problema consiste precisamente en encontrar un lugar geométrico en el plano, construirlo bajo las reglas de construcción con regla y compás, y luego demostrar que efectivamente ese conjunto de puntos cumple con las condiciones pedidas y además es el único conjunto que las cumple.

**Problema.** Dado un triángulo cualquiera, encontrar el lugar geométrico de todos los puntos en el plano tales que el triángulo simétrico lateral de cada uno de estos puntos sea rectángulo.

La Figura 2 muestra cómo el  $\triangle D_B D_C D_A$  es el simétrico lateral de  $D$  con respecto al  $\triangle ABC$ . En este caso el  $\triangle D_B D_C D_A$  es rectángulo, por lo tanto  $D$  está en el conjunto solución del problema propuesto.

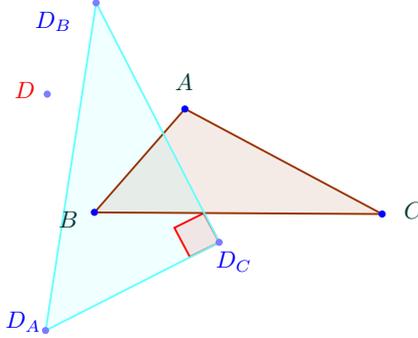


Figura 2. El simétrico lateral de  $D$  con respecto al  $\triangle ABC$  es recto.

### 3. Proceso experimental

Primero trataremos de determinar la forma del lugar geométrico de puntos  $D$  que producen un triángulo simétrico lateral rectángulo en  $D_C$ , encontrando algunos puntos del mismo: creamos un punto  $D$  cualquiera, luego construimos el triángulo simétrico-lateral de  $D$  con respecto a  $\triangle ABC$ , medimos el  $\angle D_A D_C D_B$  y arrastramos  $D$  hasta que ese ángulo se aproxime bastante a  $90^\circ$  (ver Figura 3). Cabe anotar que las posiciones que puede ocupar  $D$  al arrastrarlo por la pantalla equivalen a los pixeles de la misma, de los cuales hay un número finito, por lo que es muy poco probable que una de esas posiciones produzca exactamente un  $\angle D_A D_C D_B$  recto; por eso debemos conformarnos con que sea aproximadamente recto .

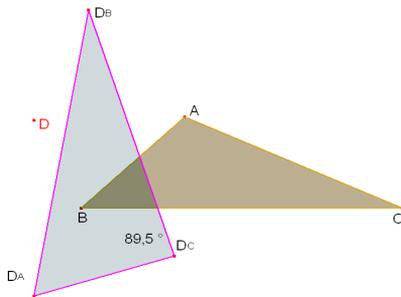


Figura 3. Aproximación del simétrico lateral de  $D$  a un triángulo rectángulo.

Una vez encontrada esa posición procedemos a crear otro punto  $D$  y su triángulo simétrico lateral, y a arrastrarlo hasta que el  $\angle D_A D_C D_B$  sea de aproximadamente  $90^\circ$ . Repitien-

do este procedimiento podemos obtener un número significativo de puntos que aproximadamente están sobre el lugar geométrico. La configuración obtenida parece ser una circunferencia que pasa por los puntos  $A$  y  $B$  (ver Figura 4).

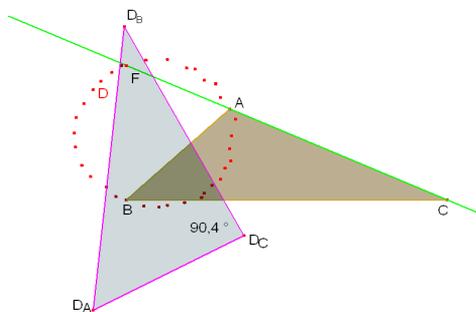


Figura 4. Puntos aproximados al lugar geométrico.

Este proceso de creación de puntos que cumplen una condición de manera aproximada puede ser automatizado en *Cabri*. En [1] se encuentra una descripción detallada de esa automatización, bajo el nombre de *detector de puntos*. Los lectores interesados podrán efectuar dicho detector para el problema que nos ocupa.

Si repetimos este proceso para encontrar puntos  $D$  que producen ángulos  $\angle D_A D_B D_C$  rectos o  $\angle D_B D_A D_C$  rectos, la imagen de puntos aproximados en *Cabri* corresponde a tres circunferencias tangentes entre sí, cada una pasando por dos vértices del  $\triangle ABC$  (ver Figura 5).

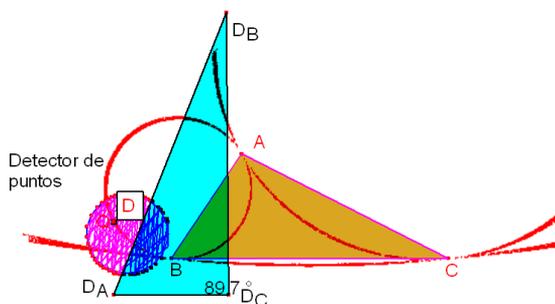


Figura 5. Imagen aproximada de la solución usando el detector de puntos

**Conjetura 3.1.** Podemos suponer, por lo tanto, que la solución a nuestro problema son tres circunferencias tangentes entre sí y cuyos puntos de tangencia son los vértices del triángulo original.

Para terminar el trabajo experimental debemos tratar de construir esas circunferencias ya no de manera aproximada, sino exactamente. Sabemos que cada circunferencia debe pasar por dos vértices del triángulo, por lo tanto necesitamos encontrar un tercer punto para poder construir de manera exacta la circunferencia solución. Si observamos la Figura 4, vemos que la circunferencia corta la recta  $\overleftrightarrow{AC}$  en el punto  $A$  y en otro punto  $F$ . Al llevar el punto  $D$  a  $F$  podemos ver que  $D_B$  coincide con  $D$ , y que el lado  $\overline{D_B D_A}$  pasa por  $B$  y es perpendicular a  $\overline{BC}$  (ver Figura 6). Estas propiedades nos permiten construir ese punto que está sobre la recta  $\overleftrightarrow{AC}$  y produce un  $\angle D_A D_C D_B$  recto: se traza la perpendicular a  $\overline{BC}$  por  $B$ , y la intersección de esta recta con  $\overleftrightarrow{AC}$  será el punto buscado.

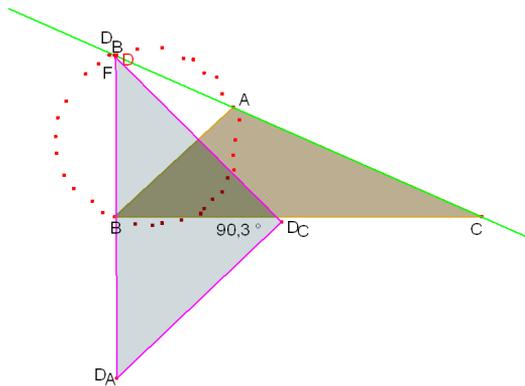


Figura 6. El lado  $\overline{D_B D_A}$  pasa por  $B$  y es perpendicular a  $\overline{BC}$ .

**Conjetura 3.2.** Si observamos la Figura 6, el punto de intersección  $F$  de la recta  $\overleftrightarrow{AC}$  y la perpendicular a  $\overline{BC}$  por  $B$  genera un triángulo simétrico-lateral rectángulo.

Ahora podemos construir el círculo que pasa por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $F$ , luego poner el punto  $D$  sobre esta circunferencia y construir su simétrico-lateral. Medimos  $\angle D_A D_C D_B$  y arrastramos  $D$  para verificar si toda la circunferencia es solución del problema. De igual forma se pueden hacer las construcciones correspondientes a  $\angle D_A D_B D_C$  y  $\angle D_B D_A D_C$ .

Antes de terminar la verificación de la conjetura es importante desplazar los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  para obtener diferentes clases de triángulo y constatar si la solución encontrada se tiene en todos esos casos.

#### 4. Formalización

Después de verificar nuestra conjetura experimentalmente, ahora tenemos que formular una demostración.

**Proposición 4.1.** Dado un  $\triangle ABC$ , el lugar geométrico de todos los puntos cuyos triángulos simétricos laterales son rectángulos está formado por tres circunferencias tangentes entre sí en los vértices del triángulo. Cada uno de esos círculos pasa por dos vértices del triángulo y por el punto intersección entre la recta que contiene un lado del triángulo y la

perpendicular en el vértice opuesto al lado que contiene a este vértice, como se muestra para los puntos  $F$ ,  $G$  y  $J$  en la Figura 7.

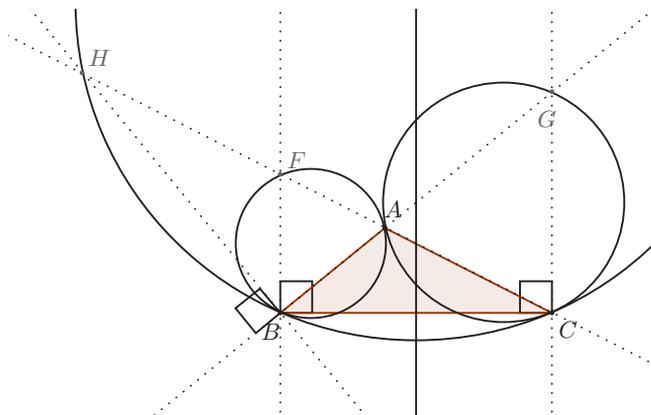


Figura 7. Lugar geométrico de los puntos cuyos simétricos laterales son rectos.

*Demostración.* Hagamos la demostración por partes.

1. Si  $D$ , el punto a partir del cual trazamos el simétrico lateral, es alguno de los vértices del  $\triangle ABC$ , el simétrico lateral se degenera en un segmento que es perpendicular al lado opuesto al vértice, puesto que  $D$  coincide con dos de los puntos simétricos (ver Figura 8). Entonces podemos ver este segmento como un triángulo rectángulo degenerado.

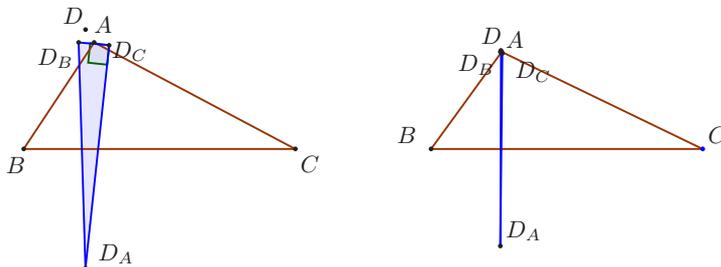
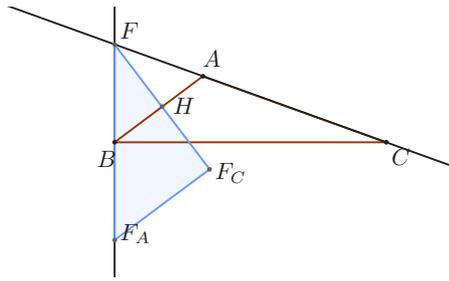


Figura 8. El simétrico lateral se degenera en un segmento que es perpendicular al lado opuesto al vértice.

2. Probemos ahora que el punto  $F$ , que es la intersección de la prolongación del lado  $\overline{AC}$  y la perpendicular a  $\overline{BC}$  por  $B$  (ver Figura 9), cumple las condiciones.

Sea  $\triangle FF_C F_A$  el simétrico lateral de  $F$  (puesto que  $F$  está sobre la extensión de  $\overline{AC}$ ) y sea  $H$  la intersección del lado  $\overline{FF_C}$  con el lado  $\overline{AB}$ . Veamos que  $\triangle FHB$  y  $\triangle FF_C F_A$  son semejantes:  $FH = \frac{1}{2} FF_C$  y  $FB = \frac{1}{2} FF_A$  por definición de simetría, el  $\angle F$  es común para los dos triángulos, luego por el teorema LAL para semejanza

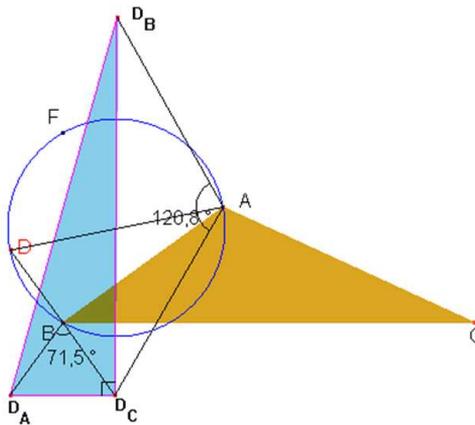


**Figura 9.** La intersección de la prolongación del lado  $\overline{AC}$  y la perpendicular a  $\overline{BC}$  por  $B$ .

(lados correspondientes proporcionales y los ángulos correspondientes, formados por estos lados correspondientes, congruentes implican triángulos semejantes) los triángulos son semejantes. Ahora, el  $\angle H$  es recto, también por la simetría. Así, el  $\angle F_C$  también es recto por ángulos correspondientes entre triángulos semejantes.

- Ahora debemos probar que los puntos que están sobre la circunferencia generada por  $A, B$  y  $F$  cumplen con la condición pedida y son los únicos que hacen que el  $\angle D_C$  sea recto.

Necesitamos argumentos teóricos que sirvan para justificar esa afirmación, pero la experimentación realizada no nos entregó ninguno. Entonces retomemos la experimentación, esta vez buscando esos argumentos teóricos. Observemos la Figura 10 solución para que el  $\angle D_A D_C D_B$  sea recto. Ahora vamos a considerar en esa figura los segmentos  $\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{D_BA}, \overline{D_CA}, \overline{D_CB}$  y  $\overline{D_AB}$ .



**Figura 10.** Solución para que el ángulo  $\angle D_A D_C D_B$  sea recto.

Se tiene por la simetría que:  $DA = D_CA, DB = D_CB, DA = D_BA$  y  $DB = D_AB$ . Se forman entonces dos triángulos isósceles:  $\triangle D_A B D_C$  y  $\triangle D_B A D_C$ . Si medimos los ángulos de esos triángulos y desplazamos el punto  $D$ , vemos que permanecen

constantes. Así mismo,  $\angle BDA$  es constante en cada uno de los dos arcos formados por  $\overline{AB}$  por estar inscrito en un arco de círculo, y  $\angle BD_C A$  es congruente con él por ser simétrico con respecto a  $\overline{AB}$ . Pero estos ángulos cambian cuando  $D$  cambia de arco. Ahora bien, la suma de  $\angle D_A D_C B$ ,  $\angle B D_C D_B$  y  $\angle D_B D_C A$  es el ángulo  $\angle D_A D_C A$ , de manera que si logramos calcular esos ángulos podremos demostrar que  $\angle D_A D_C D_B$  es recto.

Buscamos ahora un argumento para justificar que los ángulos  $\angle D_A B D_C$  y  $\angle D_B A D_C$  son constantes y poder calcular su valor. Como  $\overline{D_C B}$  es simétrico de  $\overline{D B}$  con respecto a  $\overline{AB}$ , y  $\overline{D_A B}$  es simétrico de  $\overline{D B}$  con respecto a  $\overline{BC}$ , podemos considerar que  $\overline{D_C B}$  es imagen de  $\overline{D_A B}$  por una composición de simetrías axiales de ejes  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ . Sabemos que la composición de simetrías axiales de ejes secantes es equivalente a una rotación del doble del ángulo entre los ejes, por lo tanto  $\overline{D_C B}$  es imagen de  $\overline{D_A B}$  por una rotación de centro  $B$  y del doble del  $\angle ABC$ . Igualmente,  $\angle D_C A$  es imagen de  $\angle D_B A$  por una rotación de centro  $A$  y del doble del ángulo  $\angle BAC$ . Ya tenemos los argumentos teóricos para realizar la demostración

Sea  $D$  un punto sobre el círculo. Veamos dos casos:

- a) Supongamos primero que  $D$  está sobre el arco  $\widehat{AFB}$ ; entonces  $\angle ADB \cong \angle AFB$ , porque son ángulos inscritos en el mismo arco (ver Figura 11). Sea  $\triangle D_B D_C D_A$  el simétrico lateral de  $D$  con respecto a  $\triangle ABC$ .

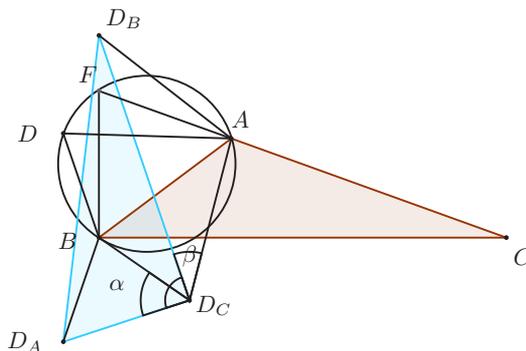


Figura 11. Ángulos inscritos en el mismo arco.

Los triángulos  $\triangle ADB$  y  $\triangle A D_C B$  son congruentes porque son simétricos con respecto al lado  $\overline{AB}$ , luego  $\angle ADB \cong \angle A D_C B$ . Podemos ver el punto  $D_C$  como la doble reflexión del punto  $D_A$ , primero sobre  $\overline{BC}$ , que es el punto  $D$ , y luego sobre  $\overline{AB}$ ; por lo tanto  $D_C$  es la rotación de  $D_A$  alrededor del punto  $B$  con ángulo el doble de  $\angle B$  en el  $\triangle ABC$  (la doble reflexión sobre dos rectas que se cortan en un punto es la rotación alrededor del punto de corte con un ángulo igual al doble del ángulo que forman las dos rectas), es decir, sin importar dónde esté el punto  $D$ ,  $\angle D_A B D_C$  siempre es constante y es el doble de  $\angle B$  del triángulo dado.

De la misma forma podemos concluir que el  $\angle D_B A D_C$  es fijo para cualquier posición de  $D$ , y que es el doble de  $\angle A$  del triángulo dado. Se tiene que

$\overline{D_A B} \cong \overline{D_C B}$  por la rotación, luego  $\triangle D_A B D_C$  es isósceles. Sea  $\alpha$  la medida de  $\angle D_A D_C B$  en el triángulo isósceles (ver Figura 11). Entonces  $\alpha$  es constante. Igualmente se tiene que  $\triangle D_B A D_C$  es isósceles, y la medida de  $\angle D_B D_C A$ , que llamamos  $\beta$ , es también constante.

Como  $D$  está sobre el arco  $\widehat{AFB}$ , se tiene que el  $\angle D_C$  en el simétrico lateral es la suma de  $\alpha$  y  $\angle D_B D_C B$ . Por lo tanto, la variación en la medida de  $\angle D_C$  del simétrico lateral depende de la variación del  $\angle B D_C D_B$ .

Se tiene que en  $F$  la medida del ángulo del simétrico lateral  $\angle D_C$  es  $90^\circ$ , como ya se había probado antes, pero

$$\angle D_C = \angle A D_C B + \alpha - \beta = \angle B D_C D_B + \alpha;$$

por lo tanto  $\angle B D_C D_B = 90^\circ - \alpha$ . Ahora, para  $D \in \widehat{AFB}$ ,  $\angle AFB \cong \angle ADB \cong \angle A D_C B$ , como vimos antes, y por lo tanto se concluye que si  $D$  está sobre este arco  $\angle B D_C D_B = 90^\circ - \alpha$  permanece constante y  $\angle D_C = \angle B D_C D_B + \alpha = 90^\circ$ .

- b) Ahora, si  $D$  está sobre el complemento del arco  $\widehat{AFB}$ ,  $\angle ADB = 180^\circ - \angle AFB$ , pero igualmente se tiene que  $\angle ADB = \angle A D_C B$ . En este caso la medida de  $\angle D_C$  en el simétrico lateral es la suma de  $\beta$  y  $\angle A D_C D_A$  (ver Figura 12), y por lo tanto la variación de  $\angle D_C$  depende de la variación de  $\angle A D_C D_A$ .

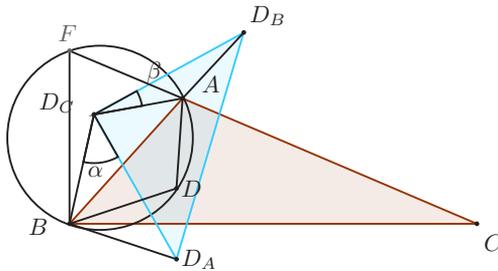


Figura 12. La medida de  $\angle D_C$  en el simétrico lateral es la suma de  $\beta$  y  $\angle A D_C D_A$ .

Por un argumento similar al del caso anterior podemos deducir que  $\angle A D_C D_A$  permanece constante cuando  $D$  recorre este arco, y por lo tanto el  $\angle D_C$  en el simétrico lateral es recto.

Donde quiera que esté  $D$ , la variación de  $\angle D_C$  en el simétrico lateral depende de la variación de  $\angle A D_C B$ , pero  $\angle A D_C B \cong \angle ADB$ .  $\angle ADB$  permanece constante solo si  $D$  está sobre arcos de circunferencia que tienen como cuerda a  $\overline{AB}$  (teorema de la geometría euclidiana, ver [7]). Por lo tanto, los únicos puntos  $D$  que hacen que  $\angle D_C$  sea recto son los que están sobre la circunferencia generada por los puntos  $A, B$  y  $F$ .

- 4. De la misma forma podemos probar que los únicos puntos que hacen que  $\angle D_B$  sea recto son los puntos sobre una circunferencia que tiene como cuerda a  $\overline{AC}$ , y los que hacen que  $\angle D_A$  sea recto son los puntos que están sobre una circunferencia que tiene como cuerda a  $\overline{BC}$ . Las dos circunferencias de cada una de estas parejas son tangentes en el vértice común que tienen del triángulo dado, puesto que si se

cortaran en otro punto diferente, en ese punto de corte se tendría un triángulo con dos ángulos rectos y esto es absurdo (ver Figura 6).

## 5. Conclusión

El proceso de experimentación usando las herramientas del *software Cabri Géomètre* nos permitió formular una conjetura plausible sobre la forma del lugar geométrico solución del problema. Algunas de las propiedades identificadas gracias a ese proceso experimental pudieron traducirse en argumentos deductivos para la demostración (construcción del punto  $F$  sobre  $\overleftrightarrow{AC}$  que pertenece al lugar), pero otras no (el lugar es una circunferencia). Una segunda experimentación para buscar argumentos teóricos que apoyaran la conjetura permitió encontrar otras propiedades que pudieron organizarse en forma deductiva, completando la demostración.

La geometría experimental busca entonces utilizar las ventajas de la representación informática de las figuras, para encontrar propiedades geométricas que permitan por una parte formular conjeturas, y por otra formular argumentos teóricos que sustenten dichas conjeturas. Pero el trabajo matemático no debe detenerse en la formulación de conjeturas razonablemente informadas, sino que debe buscar la formalización de los argumentos hasta lograr un razonamiento deductivo a partir de proposiciones aceptadas como verdaderas; es decir, una demostración.

Este ejemplo de trabajo experimental no pretende ser una actividad para proponer a los estudiantes de geometría. Aunque creemos que estudiantes de secundaria podrían realizar el trabajo experimental hasta formular la conjetura, el proceso de formalización puede resultar demasiado difícil dependiendo de los conocimientos teóricos de que dispongan. Sin embargo, los profesores de matemáticas sí pueden reproducir y comprender el proceso realizado, para adquirir una idea más clara de lo que significa la experimentación con *software* de geometría y su relación con los procesos de formalización matemática. De esta manera esperamos contribuir a la transformación de los procesos de enseñanza y de las concepciones mismas sobre el quehacer matemático, superando la oposición a la experimentación y el abandono de los esfuerzos de formalización.

## Referencias

- [1] Acosta M., "Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática", *Educación Matemática* 17, núm. 3 (2005).
- [2] Borwein J. et al. *Experimentation in mathematics, computational paths to discovery*. A. K. Peters. USA, 2004.
- [3] Baccaglioni-Frank A., and Mariotti M.A., "Conjecturing and Proving in Dynamic Geometry: the Elaboration of Some Research Hypotheses", In *Proceedings of the 6th Conference on European Research in Mathematics Education*, Lyon, January 2009.
- [4] Hanna G., *Proof, explanation and exploration: An overview*. Educational Studies in Mathematics, Special issue on "Proof in Dynamic Geometry Environments", 44 (1-2), 5-23, 2000.

- [5] Kuntz G., *Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques*. Dossiers de la VST, en ligne [http://www.inrp.fr/vst/Dossiers/Demarche\\_experimentale/sommaire.htm](http://www.inrp.fr/vst/Dossiers/Demarche_experimentale/sommaire.htm)
- [6] Ministerio de Educación Nacional. *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*, Bogotá, Magisterio, 1998.
- [7] Moise E., and Downs F. Jr., *Geometría Moderna*. Fondo Educativo Interamericano, S.A. Massachusetts, 1964.
- [8] Yerushalmy M., Chazan D. & Gordon M., *Guided inquiry and technology: A yearlong study of children and teachers using the Geometric Supposer*. (Technical Report No. 90-8). Newton, MA: Education Development Center, 1988.