Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 30, No. 1, 2012, pág. 43–55

Continuos g-contraíbles

Michael A. Rincón-Villamizar*
Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas, Bucaramanga, Colombia.

Resumen. Diremos que un continuo X es *g-contraíble* si existe una función continua y sobreyectiva $f\colon X \to X$ que es homotópica a una función constante. En este artículo hacemos una recopilación de los resultados conocidos acerca de los continuos g-contraíbles. Mostraremos que existe un continuo que no es g-contraíble tal que el producto numerable de él con sí mismo sí lo es. Con esto damos respuesta negativa a un caso particular de la Pregunta 3.2 que propusimos en el artículo *"On g-contractibility of continua"* [3].

Palabras claves: continuo, contraíble, g-contraíble, cono, homotopía, uniformemente conexo por caminos, dendroide.
MSC2010: 54F15, 54G20, 54C05.

g-contractible continua

Abstract. A continuum X is said to be g-contractible provided that there is a surjective map $f\colon X \to X$ which is homotopic to a constant map. In this article, we will study g-contractible continua. Answering a particular case of a proposed question in the article *"On g-contractibility of continua"* [3], we will show that there exists a non-g-contractible continuum X such that its countable product $X^{\mathbb{N}}$ is g-contractible.

Keywords: continua, contractible, g-contractible, cone, homotopy, uniformly path connected, dendroid.

1. Introducción

Dados dos espacios topológicos X y Y es interesante preguntarse si X es imagen o preimagen continua de Y. En este sentido, conocemos por ejemplo que todo espacio métrico compacto es imagen continua del espacio de Cantor [13, Teorema 7.7]. Otro resultado de gran importancia es la caracterización de normalidad conocida como el Teorema extensión de Tietze [15, Teorema 5.38]. En teoría de continuos, el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz nos dice que todo continuo localmente conexo es imagen continua del intervalo cerrado $[0,1]$ [13, Teorema 8.18]. Estos teoremas muestran que con ciertas propiedades topológicas podemos garantizar la existencia de funciones continuas y sobreyectivas entre dos

* *E-mail*: `mrincon81@gmail.com`
Recibido: 23 de abril de 2012, Aceptado: 4 de junio de 2012.

espacios. Una propiedad topológica introducida por el profesor David Bellamy en [1] es la g-contractibilidad. Un continuo X es g-contraíble o contraíble generalizado si existe una función continua y sobreyectiva $f\colon X \to X$ que es homotópica a una función constante. El profesor Bellamy definió la g-contractibilidad con el fin de estudiar los continuos que son imagen continua del cono sobre el conjunto de Cantor. La clase de continuos g-contraíbles incluye de manera propia los continuos localmente conexos, los continuos contraíbles y el hiperespacio de subconjuntos cerrados no vacíos de cualquier continuo.

En 1975, el profesor Wlodzimierz Kuperberg introduce los continuos uniformemente conexos por caminos. Kuperberg demuestra que un continuo es uniformemente conexo por caminos si y sólo si es imagen continua del cono sobre el conjunto de Cantor [10]. Por otra parte, el profesor Bellamy mostró que todo continuo g-contraíble es uniformemente conexo por caminos, y preguntó si la recíproca de esta afirmación también es cierta.

Iwona Krezemińska y Janusz Prajs en [11] dan respuesta negativa a la pregunta del profesor Bellamy, mostrando que existe un continuo uniformemente conexo por caminos que no es g-contraíble. Otro ejemplo de un continuo con estas características fue presentado por el profesor Alejandro Illanes en [8]. Aunque, el objetivo de la construcción del profesor Illanes es mostrar un continuo tal que el hiperespacio de subcontinuos no es g-contraíble, este también da solución a la pregunta del profesor Bellamy, ya que todo hiperespacio de subcontinuos es uniformemente conexo por caminos [14, Teorema 1.33].

El propósito de este artículo es presentar resultados alrededor de los continuos g-contraíbles. Mostraremos una familia de continuos tal que cada miembro es uniformemente conexo por caminos y ninguno de ellos es g-contraíble. Aunque la contrucción de esta familia es muy similar a la que presentamos en [3, Definición 4.10], es importante resaltar que esta familia involucra una clase más amplia de continuos. También en el Teorema 4.7 probamos que existe un elemento X de esta familia tal que a pesar de no ser g-contraíble, los productos $X^{\mathbb{N}}$ y $X^n \times [0,1]$ sí son g-contraíbles, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

2. Preliminares

Sea (X,d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $\delta > 0$, la bola con centro en a y radio δ la denotamos $B_d(a,\delta)$. Si $A \subset X$, la clausura de A en X y el diámetro de A son denotados por $Cl_X(A)$ y diám(A), respectivamente. Los símbolos $\mathbb{N}$ y $\mathcal{C}$ denotan el conjunto de los números naturales y el conjunto de Cantor, respectivamente. Un *continuo* es un espacio métrico compacto, conexo y diferente del vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en un espacio métrico.

Un *arco* es un continuo homeomorfo a $[0,1]$. Diremos que un continuo X es *arcoconexo* si dados dos puntos en X, existe un arco en X que contiene a los puntos. Un *camino* en un continuo X es una función continua del intervalo $[0,1]$ a X. Un continuo es *unicoherente* si siempre que es unión de dos subcontinuos, la intersección entre estos es conexa. Diremos que un continuo es *hereditariamente unicoherente* si cada uno de sus subcontinuos es unicoherente.

Sea X un espacio métrico compacto. El *cono sobre* X es definido como el espacio cociente $(X \times [0,1])/(X \times \{1\})$ y lo denotamos por Cono(X). En lo que sigue, q_X es la función cociente de $X \times [0,1]$ a Cono(X); el punto $v_X = q_X(X \times \{1\})$ lo llamaremos *vértice* de

Cono(X). La *suspensión de* X, denotada por Sus(X), se define como el espacio cociente Cono(X)$/(X \times \{0\})$.

Definición 2.1. Sean X y Y espacios topológicos y $f, g\colon X \to Y$ funciones continuas. Una *homotopía* es una función continua de $X \times [0,1]$ a Y. Diremos que f y g son *homotópicas* si existe una homotopía $H\colon X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ para cada $x \in X$.

Definición 2.2. Un continuo X es *contraíble* si la función identidad id_X es homotópica a una función constante.

De la definición es claro que un arco, una n-celda (espacio homeomorfo a $[0,1]^n$), o cualquier subcontinuo convexo de un espacio normado son ejemplos de continuos contraíbles. El continuo S^1 no es contraíble (para detalles ver [12, Capítulo 9]).

La siguiente definición fue dada por el profesor Bellamy en [1] con el fin de estudiar los continuos que son imagen continua de Cono($\mathcal{C}$).

Definición 2.3. Un continuo X es *g-contraíble* si existe una función continua y sobreyectiva $f\colon X \to X$ que es homotópica a una función constante.

Nótese que todo continuo contraíble es g-contraíble.

Definición 2.4. Sean X y Y espacio topológicos. Se dice que X es *continuamente equivalente* a Y si existen funciones $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to X$ continuas y sobreyectivas.

La siguiente proposición nos permite dar ejemplos de continuos g-contraíbles.

Proposición 2.5. *Sean X y Y continuos tales que X es g-contraíble. Si X es continuamente equivalente a Y, entonces Y es g-contraíble.*

Demostración. Sean $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to X$ funciones continuas y sobreyectivas. Como X es g-contraíble, existen una función $h\colon X \to X$ continua y sobreyectiva, una homotopía $H\colon X \times [0,1] \to X$ y un punto $p \in X$ tales que $H(x,0) = h(x)$ y $H(x,1) = p$ para cada $x \in X$. La función $f \circ h \circ g\colon Y \to Y$ es continua y sobreyectiva. Por otra parte, obsérvese que $G\colon Y \times [0,1] \to Y$ definida por $G(y,t) = f(H(g(y),t))$ es una homotopía tal que $G(y,0) = (f \circ h \circ g)(y)$ y $G(y,1) = f(p)$ para cada $y \in Y$. Así, Y es g-contraíble. ☑

Recordemos que un espacio topológico X es localmente conexo en $x \in X$, si dado un abierto U de X con $x \in U$ existe un abierto conexo V de X tal que $x \in V \subset U$. Diremos que X es localmente conexo si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

A continuación mostramos ejemplos de continuos g-contraíbles.

Ejemplo 2.6. Todo continuo localmente conexo es g-contraíble.

Sea X un continuo localmente conexo. Como X es normal, existe una función $f\colon X \to [0,1]$ continua y sobreyectiva, por [15, Teorema 5.38]. Por otra parte, por el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz [13, Teorema 8.14], existe una función $g\colon [0,1] \to X$ continua y sobreyectiva. Es decir, X es continuamente equivalente al intervalo cerrado $[0,1]$. Así, X es g-contraíble, por la Proposición 2.5.

El anterior ejemplo muestra que existen continuos g-contraíbles como S^1, o cualquier n-esfera S^n, que no son contraíbles.

Ejemplo 2.7. Dado un espacio métrico compacto X, entonces la suspensión $\mathrm{Sus}(X)$ es g-contraíble.

Como X es un espacio métrico compacto tenemos que $\mathrm{Cono}(X)$ es un continuo contraíble [9, pág. 52]. Sea $\phi_X : X \times [0,1] \to \mathrm{Cono}(X)$ definida por $\phi_X(x,t) = q_X(x, 1-t)$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ y $\phi_X(x,t) = q_X(x,t)$ si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Entonces ϕ_X es continua y sobreyectiva, por [12, Teorema 18.3]. Definamos $f\colon X \times [0,1] \to \mathrm{Sus}(X)$ por $f(x,t) = (q \circ q_X)(x,t)$, donde $q\colon \mathrm{Cono}(X) \to \mathrm{Sus}(X)$ es la función cociente. No es difícil ver que $\Gamma_X = \phi_X \circ f^{-1}\colon \mathrm{Sus}(X) \to \mathrm{Cono}(X)$ está bien definida, es continua y sobreyectiva [6, Teorema 3.2, pág. 123]. Así, $\mathrm{Sus}(X)$ es continuamente equivalente a $\mathrm{Cono}(X)$ y se sigue que $\mathrm{Sus}(X)$ es g-contraíble, por la Proposición 2.5.

Nótese que si X es un continuo y $H\colon X \times [0,1] \to X$ es una homotopía tal que $H|_{X\times\{0\}}$ es sobreyectiva y $H|_{X\times\{1\}}$ es una función constante, entonces cualesquiera dos puntos en X se pueden unir por un arco en X. Por lo tanto:

Proposición 2.8. *Si X es g-contraíble, entonces X es arcoconexo.*

De la Proposición 2.8, todos los continuos que no son arcoconexos son ejemplos de continuos que no son g-contraíbles. Sin embargo, el continuo definido como

$$X = Cl_{\mathbb{R}^2}\left(\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1,\, y = \operatorname{sen} \tfrac{1}{x}\right\}\right) \cup A,$$

donde A es la línea poligonal que une a los puntos $(0,-1)$, $(0,-2)$, $(-2,1)$ y $(1, \operatorname{sen} 1)$, es un ejemplo de un continuo arcoconexo que no es g-contraíble [1, Ejemplo II].

Definición 2.9. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos de un espacio topológico X. Definimos el *límite superior* como el conjunto

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X \mid \forall U \subset X \text{ abierto con } x \in U, U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para infinitos } i\}.$$

El *límite inferior* de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ lo definimos como

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X \mid \forall U \subset X \text{ abierto con } x \in U,\, \exists N \in \mathbb{N}\colon U \cap A_i \neq \emptyset,\, \forall\, i \geq N\}.$$

También diremos que una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $A \subset X$, y escribimos $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ si $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = A$.

3. Resultados generales

En esta sección presentamos algunos resultados generales sobre los continuos g-contraíbles.

Empezamos con la definición de conexidad uniforme por caminos dada inicialmente por el profesor Janusz Charatonik en [4] para dendroides y generalizada por Kuperberg en [10], como mostramos a continuación.

Definición 3.1. Un continuo X es *uniformemente conexo por caminos* si existe una familia $\mathcal{F}$ de caminos en X tal que:

1. si $x, y \in X$, existe $\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$;
2. dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ con la siguiente propiedad: para cada $\beta \in \mathcal{F}$, existe una partición $\mathcal{P} = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N = 1\}$ de $[0,1]$ tal que diám$(\beta([t_{i-1}, t_i])) < \epsilon$ para cada $i = 1, 2, \dots, N$.

El siguiente teorema, probado por el profesor Kuperberg, caracteriza a los continuos que son uniformemente conexos por caminos [10, Teorema 3.5].

Teorema 3.2. *Un continuo X es uniformemente conexo por caminos si y sólo si es imagen continua de* Cono$(\mathcal{C})$.

Con el siguiente teorema mostramos algunas propiedades de los continuos g-contraíbles. Las pruebas las tomamos de [3].

Teorema 3.3. *Sea X un continuo; entonces:*

1) Si X es g-contraíble, entonces existe una función continua y sobreyectiva de Cono(X) *a X;*

2) Si X es g-contraíble, entonces X es uniformemente conexo por caminos;

3) Si $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de continuos tales que X_j es g-contraíble para cada $j \in \mathbb{N}$, entonces $X = \prod_{j=1}^{\infty} X_j$ es g-contraíble;

4) Si $X \times [0,1]$ es g-contraíble, entonces $X^n \times [0,1]$ también es g-contraíble para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. 1) Supongamos que X es g-contraíble. Entonces existen una función $f\colon X \to X$ continua y sobreyectiva, una homotopía $H\colon X \times [0,1] \to X$ y un punto $p \in X$ tales que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = p$ para cada $x \in X$. Sea $G\colon$ Cono$(X) \to X$ definida por $G(x,t) = H(x,t)$, si $t \neq 1$ y $G(v_X) = p$. Entonces G es una función continua y sobreyectiva [6, Teorema 3.2, pág. 123].

2) Como X es un espacio métrico compacto, existe una función continua y sobreyectiva $f\colon \mathcal{C} \to X$ [13, Teorema 7.7]. Sea Cono$(f)\colon$ Cono$(\mathcal{C}) \to$ Cono(X) la función definida por Cono$(f)(x,t) = (f(x), t)$, si $t \neq 1$ y Cono$(f)(v_{\mathcal{C}}) = v_X$. Esta función es continua y sobreyectiva [6, pág. 127]. Por otra parte, existe una función continua y sobreyectiva $G\colon$ Cono$(X) \to X$. Por lo tanto, $G \circ f\colon$ Cono$(\mathcal{C}) \to X$ es continua y sobreyectiva.

3) Para cada $j \in \mathbb{N}$ existen una homotopía $H_j\colon X_j \times [0,1] \to X_j$, $x_0^j \in X_j$ y una función continua y sobreyectiva $f_j\colon X_j \to X_j$ tales que $H_j(x,0) = f_j(x)$ y $H_j(x,1) = x_0^j$ para todo $x \in X_j$. Sea $f\colon X \to X$ definida como $f((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (f_j(x_j))_{j=1}^{\infty}$. Nótese que f es continua y sobreyectiva [6, Teorema 2.5, pág. 102]. Veamos que f es homotópica a una constante. Sea $H\colon X \times [0,1] \to X$ definida por $H(x,t) = (H_j(x_j,t))_{j=1}^{\infty}$, donde $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$. Usando nuevamente [6, Teorema 2.5, pág. 102] tenemos que H es una homotopía. Además, para cada $x \in X$, $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = x_0$, donde $x_0 = (x_0^j)_{j=1}^{\infty}$. Esto prueba que X es g-contraíble.

4) Como $X \times [0,1]$ es g-contraíble, $(X \times [0,1])^n$ es g-contraíble para cada $n \in \mathbb{N}$, por la parte *3)*. Claramente $(X \times [0,1])^n$ es homeomorfo a $X^n \times [0,1]^n$, y por tanto $X^n \times [0,1]^n$ es g-contraíble. Nótese que $[0,1]^n$ es continuamente equivalente a $[0,1]$ por el argumento que usamos en el Ejemplo 2.6. Es decir, $X^n \times [0,1]^n$ es continuamente equivalente a $X^n \times [0,1]$. Así, $X^n \times [0,1]$ es g-contraíble por la Proposición 2.5. ☑

Más adelante mostraremos que existe un continuo X que no es g-contraíble y tal que $X \times [0,1]$ sí lo es. Esto muestra que el recíproco de la parte *3)* del Teorema 3.3 no es cierto. Sin embargo, tenemos las siguientes preguntas presentadas en [3]:

Pregunta 3.4. Sea X un continuo. Si X^n es g-contraíble para algún $n \in \mathbb{N}$, ¿entonces X es g-contraíble?

En el Teorema 4.7, mostraremos la respuesta negativa a la Pregunta 3.4 si consideramos el producto de un continuo por sí mismo una cantidad numerable de veces.

Pregunta 3.5. Sean X y Y continuos. Si $X \times Y$ es g-contraíble, ¿entonces X o Y debe ser g-contraíble?

Observemos que una respuesta afirmativa a la Pregunta 3.5 nos daría una respuesta a la Pregunta 3.4.

Un problema abierto propuesto en [11] por los profesores Krezemińska y Prajs es el siguiente:

Pregunta 3.6. Si X es un continuo g-contraíble, ¿existe entonces un continuo Y contraíble continuamente equivalente a X?

En [3, Teorema 3.6] presentamos una respuesta parcial afirmativa a esta pregunta para el caso de un continuo de la forma $X \times [0,1]$.

Teorema 3.7. *Sea X un continuo. Entonces $X \times [0,1]$ es g-contraíble si y sólo si $X \times [0,1]$ es continuamente equivalente a* $\mathrm{Cono}(X)$.

Demostración. Si $X \times [0,1]$ es continuamente equivalente a $\mathrm{Cono}(X)$ entonces $X \times [0,1]$ es g-contraíble por la Proposición 2.5. Supongamos que $X \times [0,1]$ es g-contraíble; entonces por la parte *1)* del Teorema 3.3, existe una función continua y sobreyectiva $h\colon \mathrm{Cono}(X \times [0,1]) \to X \times [0,1]$. Sea $f\colon (X \times [0,1]) \times [0,1] \to \mathrm{Cono}(X) \times [0,1]$ definida por $f((x,t),s) = (q_X(x,s),t)$. Entonces f es continua y sobreyectiva [3, Lema 3.5]. Si $q_{X\times[0,1]}$ es la función cociente de $(X \times [0,1]) \times [0,1]$ a $\mathrm{Cono}(X \times [0,1])$, entonces $g = q_{X\times[0,1]} \circ f^{-1}\colon \mathrm{Cono}(X) \times [0,1] \to \mathrm{Cono}(X \times [0,1])$ está bien definida, es continua y sobreyectiva [6, Teorema 2.5, pág. 102]. Así, la función $h \circ g\colon \mathrm{Cono}(X) \times [0,1] \to X \times [0,1]$ es continua y sobreyectiva. Como X es un espacio métrico compacto, existe una función $\psi\colon \mathrm{Cono}(X) \to \mathrm{Cono}(X) \times [0,1]$ continua y sobreyectiva [2, Teorema 1]. Luego $h \circ g \circ \psi\colon \mathrm{Cono}(X) \to X \times [0,1]$ es continua y sobreyectiva. Por otro lado, la función cociente $q_X\colon X \times [0,1] \to \mathrm{Cono}(X)$ es continua y sobreyectiva. Es decir, $X \times [0,1]$ es continuamente equivalente a $\mathrm{Cono}(X)$. ☑

También, en el Corolario 3.7 de [3], como una consecuencia del Teorema 3.7 caracterizamos los continuos que son imagen continua de su propio cono.

Teorema 3.8. *Sea X un continuo. Entonces existe una función continua y sobreyectiva de* $\mathrm{Cono}(X)$ *en X si y sólo si $X \times [0,1]$ es g-contraíble.*

Demostración. Supongamos que $X \times [0,1]$ es g-contraíble; entonces existe una función continua y sobreyectiva $f\colon \mathrm{Cono}(X) \to X \times [0,1]$, por el Teorema 3.7. Si $\pi_X\colon X \times [0,1] \to X$ es la proyección a la primera coordenada, entonces $\pi_X \circ f\colon \mathrm{Cono}(X) \to X$ es continua y sobreyectiva. Recíprocamente, sea $g\colon \mathrm{Cono}(X) \to X$ una función continua y sobreyectiva. Definamos $(g \times 1)\colon \mathrm{Cono}(X) \times [0,1] \to X \times [0,1]$ por $(g \times 1)(x,t) = (g(x),t)$. Es claro que $g \times 1$ es continua y sobreyectiva. De otra parte, existe una función continua y sobreyectiva $\phi\colon \mathrm{Cono}(X) \to \mathrm{Cono}(X) \times [0,1]$, por [2, Teorema 1]. Así, $(g \times 1) \circ \phi\colon \mathrm{Cono}(X) \to X \times [0,1]$ es continua y sobreyectiva. Ahora bien, la función cociente $q_X\colon X \times [0,1] \to \mathrm{Cono}(X)$ es continua y sobreyectiva. De esta manera concluimos que $X \times [0,1]$ es continuamente equivalente a $\mathrm{Cono}(X)$ y se sigue que $X \times [0,1]$ es g-contraíble, por la Proposición 2.5. ☑

Como veremos más adelante, una consecuencia interesante del Teorema 3.8 es que si X es un continuo y $X \times [0,1]$ es g-contraíble, entonces $X^{\mathbb{N}}$ es g-contraíble.

Proposición 3.9. *Sea X un continuo. Si existe una función continua y sobreyectiva de* $\mathrm{Cono}(X)$ *en X, entonces $X^{\mathbb{N}}$ es g-contraíble.*

Demostración. Sea $f\colon \mathrm{Cono}(X) \to X$ una función continua y sobreyectiva. Definamos $F\colon (\mathrm{Cono}(X))^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ por $F((x_i,t_i)_{i=1}^{\infty}) = (f(x_i,t_i))_{i=1}^{\infty}$. Nótese que F es continua y sobreyectiva [6, Teorema 2.5, pág. 102]. Ahora bien, por el Teorema de extensión de Tietze existe una función continua y sobreyectiva $\mu\colon X \to [0,1]$. Sea $g\colon X \times X \to \mathrm{Cono}(X)$ definida como $g(x,y) = q_X(x,\mu(y))$. Es claro que g es continua y sobreyectiva. Así, la función $G\colon (X \times X)^{\mathbb{N}} \to (\mathrm{Cono}(X))^{\mathbb{N}}$ definida por $G((x_i,y_i)_{i=1}^{\infty}) = (g(x_i,y_i))_{i=1}^{\infty}$ es continua y sobreyectiva [6, Teorema 2.5, pág. 102]. Nótese que existe un homeomorfismo $h\colon X^{\mathbb{N}} \to (X \times X)^{\mathbb{N}}$. Por lo tanto, la función $G \circ h\colon X^{\mathbb{N}} \to (\mathrm{Cono}(X))^{\mathbb{N}}$ es continua y sobreyectiva. De esta manera concluimos que $X^{\mathbb{N}}$ es continuamente equivalente a $(\mathrm{Cono}(X))^{\mathbb{N}}$. Como $\mathrm{Cono}(X)$ es contraíble y por tanto g-contraíble, tenemos que $(\mathrm{Cono}(X))^{\mathbb{N}}$ es g-contraíble, por la parte *3)* del Teorema 3.3. Luego $X^{\mathbb{N}}$ es g-contraíble, por la Proposición 2.5. ☑

Combinando la Proposición 3.9 y el Teorema 3.8, obtenemos lo siguiente:

Corolario 3.10. *Sea X un continuo. Si $X \times [0,1]$ es g-contraíble, entonces $X^{\mathbb{N}}$ es g-contraíble.*

4. Una familia de continuos no g-contraíbles y uniformemente conexos por caminos

Mostraremos una familia de continuos uniformemente conexos por caminos, ninguno de los cuales es g-contraíble. La construcción que hacemos aquí es muy similar a la que se presenta en [3]; sin embargo, a continuación presentamos una familia más amplia de continuos con estas condiciones. Como un caso particular de esta familia, damos un ejemplo de un continuo X uniformemente conexo por caminos que no es g-contraíble tal que $X^{\mathbb{N}}$ y $X^n \times [0,1]$ sí lo son, para cada $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que este resultado implica que la g-contractibilidad no es preservada por retracciones ni por cocientes.

Dado un continuo X, el conjunto de puntos donde X no es localmente conexo lo denotaremos por $N(X)$.

Definición 4.1. Dados $x, y \in \mathbb{R}^2$, sea $\overline{xy} = \{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$, $d_n = (0, \frac{1}{n})$, $e_n = (0, -\frac{1}{n})$, y definamos

$$Z = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{ad_n}\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{be_n}\right) \cup \overline{ab}.$$

Sea L un subcontinuo uniformemente conexo por caminos del plano tal que $Cl_{\mathbb{R}^2}(N(L))$ es no vacío y localmente conexo. Sean $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de continuos disyuntos dos a dos, cada uno de ellos homeomorfo a L y tales que $\text{lím}_{n\to\infty} \text{diám}(D_n) = \text{lím}_{n\to\infty} \text{diám}(E_n) = 0$. Además, supongamos que $d_n \in K_n$ y $e_n \in T_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $K_n = Cl_{\mathbb{R}^2}(N(D_n))$ y $T_n = Cl_{\mathbb{R}^2}(N(E_n))$. Definamos

$$X_L = Z \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

Sea $p = (0, 0)$. Observemos que por construcción $\text{lím}_{n\to\infty} D_n = \text{lím}_{n\to\infty} E_n = \{p\}$. En la Figura 1 mostramos un ejemplo particular de un continuo X_L.

Nótese que el continuo Z es uniformemente conexo por caminos. Por otra parte, como D_n y E_n son continuos uniformemente conexos por caminos, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\text{lím}_{n\to\infty} \text{diám}(D_n) = \text{lím}_{n\to\infty} \text{diám}(E_n) = 0$ se sigue el siguiente resultado:

Teorema 4.2. *El continuo X_L es uniformemente conexo por caminos.*

A continuación probaremos que el continuo X_L no es g-contraíble. La prueba será basada en los siguientes lemas.

Lema 4.3. *Sea $f\colon X_L \to X_L$ una función continua y sobreyectiva, y*

$$Q = \overline{ab} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right).$$

Entonces:

1) *$Q \subset f(Q)$;*
2) *para cada componente C de Q, $f(C)$ interseca sólo un número finito de componentes de Q.*

Demostración. Por [7, (3), pág. 28] tenemos que $Cl_{X_L}(N(X_L)) \subset f(Cl_{X_L}(N(X_L)))$. Es claro que

$$N(X_L) = \overline{ab} \setminus \{a, b\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N(D_n)\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N(E_n)\right).$$

Notemos que Q es un cerrado de X_L. Se sigue que $Cl_{X_L}(N(X_L)) = Q$, por [6, Problema 7, p. 91]. Como f es una función definida entre continuos, tenemos que f es cerrada; esto implica que $f(Q)$ es un cerrado de X_L y por lo tanto $Q = Cl_{X_L}(N(X_L)) \subset Cl_{X_L}(f(Q)) = f(Q)$. De esta manera, concluimos la parte *1)*.

Puesto que cada C componente de Q es localmente conexa, tenemos que $f(C)$ es localmente conexo [13, Proposición 8.16]. Ahora supongamos que existe una componente C_0 tal que $f(C_0)$ interseca a un número infinito de componentes de Q. Entonces, por la definición de X_L y Q, es fácil ver que $f(C_0)$ no es localmente conexo, lo cual es imposible. Con lo que concluimos la segunda afirmación del teorema. ☑

Lema 4.4. *Sea $f\colon X_L \to X_L$ una función continua y sobreyectiva, entonces*

$$p \in \limsup_{n\to\infty} f^{-1}(d_n) \cap \limsup_{n\to\infty} f^{-1}(e_n).$$

Demostración. Supongamos que $p \notin \limsup_{n\to\infty} f^{-1}(d_n)$; entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $f^{-1}(d_n) \cap B_d(p, \varepsilon_0) = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} E_n = \{p\}$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $D_n \cup E_n \subset B_d(p, \varepsilon_0)$. Sea $Q = \overline{ab} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)$; por la parte *1)* del Lema 4.3, existe $z_n \in Q$ tal que $f(z_n) = d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $z_n \in f^{-1}(d_n)$, se sigue que $z_n \notin D_n \cup E_n$ para cada $n \geq N$. Por lo tanto $f^{-1}(d_n) \cap \left[\left(\bigcup_{j=1}^{N-1} K_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N-1} T_j\right)\right] \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como cada K_n es compacto y localmente conexo, tenemos que K_n tiene un número finito de componentes para cada $n \in \mathbb{N}$ [15, Teorema 4.32]; así, $\left[\left(\bigcup_{j=1}^{N-1} K_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N-1} T_j\right)\right]$ tiene un número finito de componentes. De esto último se sigue que existen una componente C de Q y una subsucesión $\{d_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $C \cap f^{-1}(d_{n_k}) \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $f(C)$ interseca a un número infinito de componentes de Q, pero esto contradice la parte *2)* del Lema 4.3. De esta manera concluimos que $p \in \limsup_{n\to\infty} f^{-1}(d_n)$. Similarmente se prueba que $p \in \limsup_{n\to\infty} f^{-1}(e_n)$. ☑

Un *dendroide* es un continuo hereditariamente unicoherente y arcoconexo. Es conocido y muy sencillo de demostrar, usando la unicoherencia hereditaria, que si un continuo es un dendroide, entonces dados dos puntos en él existe un único arco que los contiene [5, pág. 239]. Usaremos este resultado en la prueba del siguiente lema.

Lema 4.5. *Sea $f\colon X_L \to X_L$ una función continua y sobreyectiva. Si $H\colon X_L \times [0,1] \to X_L$ es una homotopía tal que $H(x,0) = f(x)$, para cada $x \in X_L$ y $H(p,1) = a$ (o $H(p,1) = b$), entonces existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $H(p,t_0) = b$ (o $H(p,t_0) = a$, respectivamente).*

Demostración. Supongamos que $H(p,1) = a$. Sabemos que $p \in \limsup_{n\to\infty} f^{-1}(e_n)$, por el Lema 4.4. Por lo tanto existe una sucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ en X_L tal que $z_{n_k} \in f^{-1}(e_{n_k})$, para cada $k \in \mathbb{N}$, y $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = p$. Luego $\lim_{k\to\infty} H(z_{n_k}, 1) = a$. Sean L_a y L_b las componentes de $X_L \setminus \{p\}$ que contienen a a y b, respectivamente. Sea U un abierto de X_L tal que $a \in U$ y $U \subset X_L \setminus B_2$, donde $B_2 = Cl_{X_L}(L_b)$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(z_{n_k}, 1) \in U$, si $k \geq N$. Como $H(z_{n_k}, 0) = f(z_{n_k}) = e_{n_k}$, $e_{n_k} \in H(\{z_{n_k}\} \times [0,1])$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Nótese que si $k \geq N$, $H(\{z_{n_k}\} \times [0,1]) \cap U \neq \emptyset$. Ahora bien, $H(\{z_{n_k}\} \times [0,1])$ es un continuo arcoconexo y Z es únicamente arcoconexo (pues Z es un dendroide) y se sigue que $b \in H(\{z_{n_k}\} \times [0,1])$ para cualquier $k \geq N$. Sea $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0,1]$ tal que $H(z_{n_k}, t_k) = b$ para todo $k \geq N$. Por la compacidad de $[0,1]$, podemos suponer que $\lim_{k\to\infty} t_k = t_0 \in [0,1]$. La continuidad de H implica que $H(p, t_0) = b$. Si $H(p,1) = b$, la prueba es similar. ☑

Teorema 4.6. *El continuo X_L no es g-contraíble.*

Demostración. Supongamos que X_L es g-contraíble. Entonces existe una función $f\colon X_L \to X_L$ que es homotópica a una constante. Nótese que X_L es un continuo arcoconexo, por la Proposición 2.8. Así, podemos suponer que existe una homotopía $H\colon X_L \times [0,1] \to X_L$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = a$ para cada $x \in X_L$.

Ahora, por el Lema 4.5, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $H(p,t_0) = b$. Definamos $t_a = \text{mín}\{t \in [0,1] \mid H(p,t) = a\}$ y $t_b = \text{mín}\{t \in [0,1] \mid H(p,t) = b\}$. Claramente $t_a \neq t_b$. Supongamos que $t_a < t_b$. Nótese que $H|_{X_L \times [0,t_a]}$ es una homotopía tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(p,t_a) = a$ para todo $x \in X_L$. Usando nuevamente el Lema 4.5, existe $t_1 \in [0,t_a]$ tal que $H(p,t_1) = b$; esto contradice la elección de t_b. Por lo tanto f no es homotópica a una constante. ☑

Comentario 4.6.1. En [3, Teorema 4.19], mostramos que existe una familia $\mathcal{D}$ no numerable de dendroides uniformemente conexos por caminos tal que ninguno de ellos es g-contraíble. La familia de continuos que dimos en la Definición 4.1 involucra continuos que no son dendroides. Sin embargo, la idea de la prueba de este resultado es la misma idea mostrada en los Lemas 4.3, 4.4 y 4.5 y el Teorema 4.6.

A continuación presentamos un ejemplo de un continuo X uniformemente conexo por caminos que no es g-contraíble tal que $X \times [0,1]$ sí es g-contraíble. La construcción de este continuo es un caso particular de la Definición 4.1.

Sea Z como en la Definición 4.1. Definimos a L como sigue: para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n = (1, \frac{1}{n})$. Sea A el segmento de recta que une a los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$. Hacemos $L = A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{(0,0)x_n}$. El continuo L es llamado *abanico armónico*. El punto $(0,0)$ lo llamamos el vértice de L. Sean $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de continuos, cada uno de ellos homeomorfo al abanico armónico, disyuntos dos a dos y tales que $\lim_{n\to\infty} \text{diám}(D_n) = \lim_{n\to\infty} \text{diám}(E_n) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, suponemos que el vértice v_n de D_n es d_n. De igual forma, supongamos que el vértice u_n de E_n es e_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $X = Z \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$. Sea $p = (0,0)$ entonces, por la construcción de X, $\lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} E_n = \{p\}$. En la Figura 1 mostramos el continuo X.

Teorema 4.7. *Consideremos el dendroide X que describimos en el párrafo anterior y mostramos en la Figura 1. Entonces:*

1) X es uniformemente conexo por caminos y no es g-contraíble;

2) $X \times [0,1]$ es g-contraíble;

3) $X^n \times [0,1]$ es g-contraíble para cada $n \in \mathbb{N}$;

4) $X^{\mathbb{N}}$ es g-contraíble.

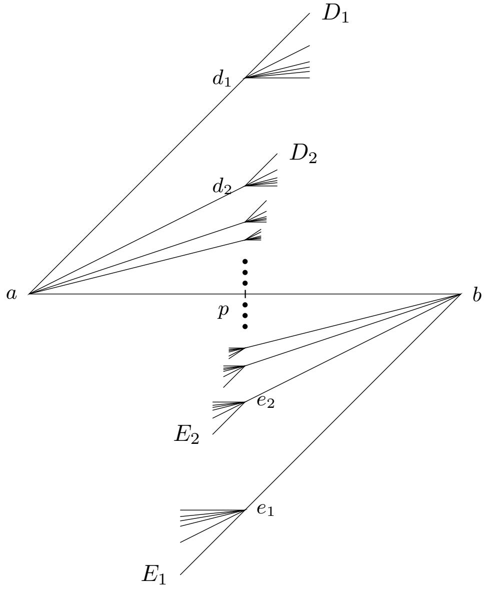

Figura 1. Un dendroide uniformemente conexo por caminos que no es g-contraíble.

Demostración. La parte *1)* es consecuencia de los Teoremas 4.2 y 4.6, respectivamente. Para probar *2)*, sean L_a y L_b las componentes de $X \setminus \{p\}$ que contienen a a y b, respectivamente. Nótese que $B_1 = L_a \cup \{p\}$ y $B_2 = L_b \cup \{p\}$ son subcontinuos propios de X tales que $X = B_1 \cup B_2$ y $B_1 \cap B_2 = \{p\}$. No es difícil ver que existe un homeomorfismo $h\colon B_2 \to B_1$ tal que $h(p) = p$. Sea $f_1\colon X \to B_1$ definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in B_1; \\ h(x), & \text{si } x \in B_2. \end{cases}$$

Como $p = h(p)$, la función f_1 está bien definida y es continua, por [12, Teorema 18.3]. Como $f_1|_{B_1} = id_{B_1}$, f_1 es sobreyectiva. De forma similar podemos definir una retracción $f_2\colon X \to B_2$. Obsérvese que B_1 y B_2 son subcontinuos contraíbles de X. Por lo tanto, para cada $i \in \{1,2\}$ existe una homotopía $H_i\colon X \times [0,1] \to B_i$ tal que $H_i(x,0) = f_i(x)$ y $H_i(x,1) = p$ para cada $x \in X$. Como f_i es sobreyectiva para cada $i \in \{1,2\}$, se sigue que H_i es sobreyectiva para cada $i \in \{1,2\}$. Sea $H\colon X \times [0,1] \to X$ definida por

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x,3t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}; \\ H_2(x,2-3t) & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}; \\ H_2(x,3t-2) & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Es fácil ver que H está bien definida y es continua, por [12, Teorema 18.3]. Nótese que $H(x,0) = f_1(x)$ y $H(x,1) = p$ para cada $x \in X$. Sea $G\colon \text{Cono}(X) \to X$ definida por

$$G(x,t) = \begin{cases} H(x,t), & \text{si } t \neq 1; \\ p, & \text{si } (x,t) = v_X. \end{cases}$$

Por [6, Teorema 3.2, pág. 123], la función G es continua y como H es sobreyectiva, se sigue que G también lo es. Así, $X \times [0,1]$ es g-contraíble, por el Teorema 3.8. Finalmente, las partes *3)* y *4)* son consecuencia inmediata de la parte *4)* del Teorema 3.3 y el Corolario 3.10. ☑

Como $X \times [0,1]$ contiene un subespacio homeomorfo a X, se sigue que la g-contractibilidad no es una propiedad hereditaria. Ahora, como X es un espacio cociente de $X \times [0,1]$, concluimos también que la g-contractibilidad no es preservada por cocientes.

Una consecuencia del Teorema 3.2 es que si $X \times [0,1]$ es g-contraíble, entonces X es uniformemente conexo por caminos. No sabemos si el recíproco de este resultado es cierto.

Pregunta 4.8. Sea X un continuo. Si X es uniformemente conexo por caminos, ¿es entonces $X \times [0,1]$ g-contraíble?

Como $X \times [0,1]$ es g-contraíble si y sólo si existe una función continua y sobreyectiva de Cono(X) a X, por el Teorema 3.3, la pregunta anterior es equivalente a la siguiente:

Pregunta 4.9. Sea X un continuo. Si X es uniformemente conexo por caminos, ¿es entonces X la imagen continua de su propio cono?

Obsérvese que la Pregunta 4.8 reformula la pregunta del profesor Bellamy sobre los continuos uniformemente conexos por caminos.

Agradecimientos. Quiero expresar mi gratitud a la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander por el apoyo que me ha brindado. En particular, le agradezco a los profesores Rafael Isaacs y Javier Camargo por haberme motivado a estudiar la bella teoría de continuos y sus hiperespacios. Finalmente, agradezco a la profesora Patricia Pellicer por sus contribuciones a los resultados que presento en este artículo.

Referencias

[1] Bellamy D.P., *The cone over the Cantor set-continuous maps from both directions*, Topology Conference (Proc. General Topology Conf., Emory Univ., Atlanta, Ga., 1970), 8–25, Dept. Math., Emory Univ., Atlanta, Ga., 1970.

[2] Bellamy D.P. and Hagopian C.L., "Mapping continua onto their cones", *Colloq. Math.* 41 (1979), no. 1, 53–56.

[3] Camargo J., Pellicer-Covarrubias P. and Rincón-Villamizar M.A., "On g-contractibility of continua", preprint.

[4] Charatonik J.J., "Two invariants under continuity and the comparability of fans", *Fund. Math.* 53 (1964), 187–204.

[5] Charatonik J.J., "On ramification points in the classical sense", *Fund. Math.* 51 (1962), 229–252.

[6] Dugundji J., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 1966.

[7] Engelking R. and Lelek A., "Cartesian products and continuous images", *Colloq. Math.* 8 (1961), 27–29.

[8] Illanes A., "A continuum whose hyperspace of subcontinua is not g-contractible", *Proc. Amer. Math. Soc.* 130 (2002), no. 7, 2179–2182.

[9] Illanes A. and Nadler S.B., Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216. Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[10] Kuperberg W., "Uniformly pathwise connected continua", *Studies in topology, (Proc. Conf., Univ. North Carolina, Charlotte, NC)*, (1975), 315–324.

[11] Krezemińska I. and Prajs J.R., "A non-g-contractible uniformly path connected continuum", *Topology Appl.* 91 (1999), no. 2, 151–158.

[12] Munkres J.R., *Topology*, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000.

[13] Nadler S.B., Jr., *Continuum theory. An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[14] Nadler S.B., Jr., *Hyperspaces of sets. A text with research questions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

[15] Patty C.W., *Foundations of Topology*, Second edition, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 2009.