

## *Una aproximación a los conjuntos alcanzables de una inclusión diferencial difusa*

WILLIAM GONZÁLEZ-CALDERÓN\*

Universidad Autónoma de Bucaramanga, Departamento de Matemáticas y Ciencias Naturales, A.A. 1642, Bucaramanga, Colombia.

*Un agradecimiento especial al profesor Rafael Isaacs, quien con su testimonio de vida nos ha enseñado la magia y la belleza de las matemáticas.*

**Resumen.** Se estudian los sistemas dinámicos difusos a partir de la noción de inclusión diferencial difusa introducida en [24]. Se analizan algunas técnicas utilizadas para resolver inclusiones diferenciales difusas asociadas a problemas de valor inicial, y se introduce una nueva forma de aproximación a los conjuntos alcanzables difusos, la cual permite resolver de manera más natural una inclusión diferencial difusa.

**Palabras claves:** inclusiones diferenciales difusas, técnicas de aproximación, conjuntos alcanzables difusos.

**MSC2010:** 34A07, 34A60, 26E50, 03E72.

### *An approximation to attainable sets of fuzzy differential inclusions*

**Abstract.** From the notion of fuzzy differential inclusion introduced in [24], fuzzy dynamical systems are studied. Some techniques used to solve fuzzy differential inclusions associated to initial value problems are discussed. A new approximation technique for fuzzy attainable sets which allows to solve in a more natural way a fuzzy differential inclusion is introduced.

**Keywords:** fuzzy differential inclusions, approximation techniques, fuzzy attainable sets.

---

\* E-mail: wgonzalez178@unab.edu.co

Recibido: 30 de marzo de 2012, Aceptado: 12 de junio de 2012.

## 1. Introducción

Una forma de hacer modelamiento de sistemas dinámicos utilizados en ingeniería u otras disciplinas es a través de ecuaciones diferenciales. Cuando se asume el determinismo en este tipo de modelos, se hace necesario conocer los parámetros, valores iniciales y relaciones funcionales de las ecuaciones diferenciales, como insumos básicos para hallar posibles soluciones. Sin embargo, hay fenómenos susceptibles de ser modelados por sistemas dinámicos donde no se dispone de toda la información necesaria para su formulación y validación. Un ejemplo de ello son los modelos fisiológicos, tales como la evolución de un tumor cancerígeno en un cuerpo humano y su reacción ante un tratamiento médico [33, 34]. En estos modelos, por ejemplo, los parámetros son desconocidos porque no es posible medirlos directamente, o pueden variar de un paciente a otro, o se conocen los parámetros sólo para cierto tipo de individuos enfermos. De este modo, el análisis difuso ha venido dando respuesta a este tipo de dificultades. Su potencial se encuentra en la capacidad de interpretar y modelar acertadamente lo que ocurre en las fronteras difusas de las características de los objetos. Algunos autores han empleado este tipo de razonamiento para el tratamiento de sistemas dinámicos difusos [17, 20, 24, 32].

Un concepto que conecta la teoría difusa y los sistemas dinámicos es el de *ecuaciones diferenciales difusas (EDF)*, el cual se basa principalmente en la “fuzzyficación” de la relación funcional que define la ecuación diferencial. Un problema de valor inicial (PVI) *difuso* asociado a una ecuación diferencial de primer orden se puede definir como

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

donde  $x_0 \in X$ ,  $t_0 \in [0, T]$ ,  $T$  un número real,  $X$  es una clase de conjuntos difusos y  $f : [0, T] \times X \rightarrow X$  es una multifunción difusa, esto es, una función que asigna a cada punto del dominio, un conjunto difuso. Una solución del PVI (1) es una multifunción difusa  $x : I \subset [0, T] \rightarrow X$  derivable en algún sentido de la derivada difusa y verificar (1). En [26] se puede encontrar uno de los trabajos pioneros sobre ecuaciones diferenciales difusas. El autor establece los primeros teoremas de existencia y unicidad de solución al problema (1) a partir de la noción de derivada de Hukuhara o  $H$ -derivada para multifunciones difusas (ver [38]). Sin embargo, la interpretación del PVI difuso con la  $H$ -derivada presenta algunas desventajas; por ejemplo, las soluciones obtenidas no generalizan adecuadamente las soluciones del caso clásico [43]. Además, algunas multifunciones difusas relativamente simples, resultan no derivables con esta noción de derivada. Para resolver estos inconvenientes, en [9] introducen una definición de derivada difusa más amplia que la  $H$ -derivada. En este caso se puede hablar de diferenciabilidad *generalizada*. Luego, en [43], se introduce una derivada difusa aún más general que la diferenciabilidad generalizada. A esta derivada se la denomina  $\alpha$ -derivada. La ventaja de la  $\alpha$ -derivada con respecto a las otras derivadas difusas es que se obtienen los mismos resultados de existencia de un PVI difuso, pero en hipótesis más generales. Otros Resultados relevantes sobre ecuaciones diferenciales difusas han sido obtenidos en [8, 13, 14, 15, 27, 28, 29, 31, 35, 36, 41, 42]. Ejemplos de aplicación de estas ecuaciones se pueden encontrar en el área de la ingeniería mecánica e ingeniería civil. Los autores en [10] usan EDF para modelar la fricción estática que se presenta en servos cilíndricos hidráulicos. Ellos sustituyen el modelo ordinario por un modelo difuso, lo que les permite obtener ciertas ventajas, como por ejemplo, la continuidad de la fricción. También en [37] podemos encontrar dos aplicaciones en el campo de la ingeniería civil, en el cual se proponen dos modelos difusos, uno para estudiar los

movimientos oscilatorios de torres de campanarios, y el otro es un modelo difuso de colas para enclaves. Otros ejemplos de aplicación aparecen en [21, 22], donde los autores usan EDF para obtener soluciones aproximadas de modelos poblacionales.

Otra manera distinta de abordar el PVI difuso (1) es a través de la teoría de inclusiones diferenciales difusas (IDF). En este caso, una solución de un PVI difuso (1) según las IDF, no es una multifunción  $x(t)$  cuyos estados son conjuntos difusos, sino es un conjunto difuso de soluciones del caso ordinario de (1) (ver Definición 3.2, Definición 3.4). En [2, 5, 6, 32] se pueden encontrar los primeros trabajos sobre inclusiones diferenciales difusas. En [24, 25] se propone un método numérico para resolver PVI difusos vía inclusiones diferenciales difusas, basado en un esquema del método de Euler generalizado. Las motivaciones del autor son principalmente: la implementación de métodos numéricos en la búsqueda de solución de (1) y evitar la “desfuzzyficación” del sistema dinámico difuso. Posteriormente, en [16, 17, 18, 19, 20, 44] se abordaron aspectos relativos a la estabilidad de Lyapunov, periodicidad, atractores acíclicos de IDF siguiendo los resultados obtenidos en [24].

El enfoque dado en [24], a pesar de su relevancia teórica, en la práctica suele ser difícil de implementar en la búsqueda de solución de un PVI difuso (1), dado que no resulta tan natural hallar las aproximaciones a los conjuntos alcanzables de las soluciones de una inclusión diferencial difusa (ver Sección 4.2). Atendiendo esta dificultad, en el presente trabajo se propone una alternativa al método propuesto en [24, 25], considerando al menos, el caso en el cual los valores iniciales o los parámetros correspondan a la clase de los números difusos de tipo triangular o trapezoidal. La geometría de estos números difusos facilita la implementación de los resultados básicos del análisis clásico para encontrar soluciones de una inclusión diferencial difusa. Además, permite su fácil implementación computacional. Este enfoque puede resultar bastante viable y asequible para tratar problemas de ingeniería desde una teoría de los sistemas dinámicos difusos.

El trabajo está organizado como sigue: en la segunda sección se establecen los resultados básicos de la teoría del análisis multívoco difuso. En la tercera sesión se presentan los principales resultados sobre inclusiones diferenciales difusas. Luego, en una cuarta sesión, se explican brevemente las técnicas utilizadas para resolver inclusiones diferenciales difusas, incluyendo la sugerida en [24, 25]. Por último, en la quinta sesión, se presenta una técnica alternativa a las anunciadas en la sesión anterior.

## 2. Notación y preliminares

Sea  $X$  un conjunto cualquiera. Un conjunto difuso  $u$  sobre  $X$  se representa por medio de una función  $u : X \rightarrow [0, 1]$  tal que, a cada punto  $x \in X$  le asigna un número real  $u(x)$  en  $[0, 1]$ . El valor  $u(x)$  significa el grado de pertenencia de  $x$  al conjunto difuso  $u$ , siendo  $u(x) = 1$  el mayor grado de pertenencia de  $x$  a  $u$  y  $u(x) = 0$  el menor grado de pertenencia de  $x$  a  $u$ .

Se denota por  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  la colección de todos los conjuntos difusos sobre los números reales. En aras de definir un sistema dinámico difuso vía inclusiones diferenciales difusas, se suele restringir la colección de los conjuntos difusos sobre  $\mathbb{R}$  a una clase particular denominada *números difusos*.  $\mathbb{F}$  denota la clase formada por los números difusos  $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  los cuales se caracterizan por satisfacer las siguientes propiedades:

- a)  $u$  es normal; es decir, existe  $x^* \in \mathbb{R}$  tal que  $u(x^*) = 1$ .

- b)  $u$  es un conjunto convexo difuso. Es decir,  $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$ , para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  y para todo  $\lambda \in [0, 1]$ .
- c)  $u$  es semi continua superior en  $\mathbb{R}$ .
- d) La *clausura* de  $\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}$  es compacta.

Se denota por  $\mathcal{K}^1$  la colección de los intervalos compactos no vacíos de  $\mathbb{R}$ . Sea  $\alpha \in (0, 1]$ . Se define el  $\alpha$ -nivel de un número difuso  $u$  como el conjunto  $[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\}$ . Además, se define el soporte de  $u$  como el conjunto  $[u]^0 = \text{supp}(u) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}$ . Los  $\alpha$ -niveles  $[u]^\alpha$  son elementos de  $\mathcal{K}^1$ , luego se pueden escribir como  $[u]^\alpha = [u_\alpha^L, u_\alpha^U]$ , donde  $u_\alpha^L$  y  $u_\alpha^U$  son los extremos inferior y superior, respectivamente, del  $\alpha$ -nivel  $[u]^\alpha$ .

Los  $\alpha$ -niveles de un conjunto difuso satisfacen las siguientes propiedades, las cuales se pueden resumir en un resultado conocido como el Teorema de Representación de Negoita-Ralescu.

**Teorema 2.1** ([26]). *Si  $u \in \mathbb{F}$ , entonces*

- (i)  $[u]^\alpha \in \mathcal{K}^1$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ ,
- (ii)  $[u]^0 \supseteq [u]^\alpha \supseteq [u]^\beta \supseteq [u]^1$ , para cualesquiera  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ .
- (iii) Si  $(\alpha_n)$  es una sucesión no decreciente de  $[0, 1]$  que converge a un  $\alpha > 0$ , entonces
- $$[u]^\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n}.$$

Recíprocamente, si  $\{N_\alpha \mid \alpha \in [0, 1]\}$  es una familia de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que satisface las propiedades (i)-(iii), entonces existe un único número difuso  $v \in \mathbb{F}$  tal que  $[v]^\alpha = N_\alpha$  para todo  $\alpha \in (0, 1]$ ,

$$[v]^0 = \overline{\bigcup_{0 < \alpha \leq 1} N_\alpha} \subseteq N_0,$$

y además, el conjunto difuso  $v$  se define como  $v(x) = \sup\{\alpha \mid x \in N_\alpha\}$ .

Sean  $u, v \in \mathbb{F}$  y  $\lambda$  escalar. Las operaciones de suma  $u + v$  y producto  $\lambda u$  se definen como los números difusos que satisfacen las siguientes igualdades

$$[u + v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha \quad \text{y} \quad [\lambda u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha, \quad (2)$$

donde  $[u]^\alpha + [v]^\alpha$  y  $\lambda [u]^\alpha$  son, respectivamente, la suma y multiplicación usual entre conjuntos.

De acuerdo con el Teorema 2.1, las operaciones (2) también se pueden escribir como

$$[u + v]^\alpha = [u_\alpha^L + v_\alpha^L, u_\alpha^U + v_\alpha^U] \quad \text{y} \quad [\lambda u]^\alpha = \begin{cases} [\lambda u_\alpha^L, \lambda u_\alpha^U], & \lambda \geq 0, \\ [\lambda u_\alpha^U, \lambda u_\alpha^L], & \lambda < 0. \end{cases} \quad (3)$$

El conjunto  $\mathbb{F}$  es un espacio métrico si se define la distancia  $D_H(u, v) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha)$ , donde  $d_H$  es la métrica de Hausdorff entre subconjuntos compactos no vacíos de  $\mathbb{R}$ . Esta definición de métrica puede también escribirse como

$$D_H(u, v) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} \max\{|u_\alpha^L - v_\alpha^L|, |u_\alpha^U - v_\alpha^U|\}, \quad (4)$$

donde  $[u]^\alpha = [u_\alpha^L, u_\alpha^U]$  y  $[v]^\alpha = [v_\alpha^L, v_\alpha^U]$ . Es bastante conocido que el espacio métrico  $(\mathbb{F}, D_H)$  es completo [39].

### 3. Inclusiones diferenciales difusas

Los sistemas dinámicos continuos se pueden representar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a problemas de valor inicial donde la variable independiente es el tiempo.

**Definición 3.1.** Un sistema dinámico continuo (de orden uno) está dada por el PVI,

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5)$$

donde  $t$  es el tiempo,  $x(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable y  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función real.

Al sustituir la relación funcional  $f$  de (5) por una multifunción adecuada  $F : [0, T] \rightarrow \mathcal{K}^1$ , el sistema dinámico continuo unidimensional (5) se convierte en una inclusión diferencial (clásica) asociada a un PVI.

**Definición 3.2.** Una inclusión diferencial asociada a un PVI se define como

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in X_0, \quad (6)$$

donde  $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}^1$  es una multifunción y  $X_0 \subset \mathbb{R}$ . Una función  $x : [0, T_0] \rightarrow \mathbb{R}$ , con condición inicial  $x_0 \in X_0$ , es una solución de (6) en el intervalo  $[0, T_0] \subset [0, T]$  donde  $t_0 \in [0, T_0]$ , si  $x$  es absolutamente continua y satisface (6) para casi todo  $t \in [0, T_0]$ .

La derivada  $x'(t)$  no es conocida precisamente porque  $x'(t)$  es un punto del conjunto  $F(t, x)$ . De esta manera, se denota  $\mathcal{X}$  como la colección de todas las soluciones de (6). Un conjunto de gran interés para encontrar las soluciones de (6) es el conjunto de los estados de las trayectorias  $x(t)$  en cada punto  $t \in T$ , es decir,  $X(t) = \{x(t) : x \in \mathcal{X}\}$ . Estos conjuntos se conocen con el nombre de *conjuntos alcanzables*. Es importante el conocimiento de los conjuntos alcanzables  $X(t)$ , porque permiten caracterizar el funcionamiento del sistema.

Por otro lado, el problema (6) claramente es una generalización del problema (5), en el sentido de que este último representa inclusiones diferenciales particulares correspondientes a multifunciones univaluadas. Los aspectos relativos a las ecuaciones diferenciales ordinarias, como por ejemplo existencia, prolongación, acotamiento de las soluciones, dependencia continua respecto de datos iniciales y parámetros, la teoría de bifurcación de soluciones, la existencia y estabilidad de puntos de equilibrio y órbitas especiales, la estabilidad global, el comportamiento asintótico, etc., son de interés dentro del contexto de las inclusiones diferenciales. De hecho, importantes resultados han sido obtenidos en [2, 3, 4, 12, 40].

Para una inclusión diferencial dada existe en general toda una familia de trayectorias que comienzan en cada punto inicial  $x_0$ . En otras palabras, si  $F$  es una función multívoca, es previsible que el problema (6) posea más de una solución. Una pregunta natural que surge es: ¿cómo se puede probar la existencia de solución de (6)? Con respecto a este

aspecto, existen esencialmente dos tipos de condiciones sobre la multifunción  $F$ : condiciones de regularidad (continuidad, semicontinuidad, Lipschitz) y condiciones topológicas o geométricas (compacidad, convexidad, entre otras) sobre la imagen de la multifunción.

Una forma bastante natural para estudiar el problema de existencia de solución de una inclusión diferencial (6) es considerar el problema reducido a ecuaciones diferenciales ordinarias. En este caso, se pueden obtener soluciones de (6) a través de la llamada técnica de selección. Dada una multifunción  $F : [0, T] \rightarrow \mathcal{K}^1$ , una selección es una función  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \in F(x)$  para todo  $x \in [0, T]$ . Lo anterior induce a la siguiente pregunta de carácter general: ¿bajo qué condiciones sobre la multifunción  $F$  admite ella selecciones con algunas propiedades extras, tales como continuidad, medibilidad, integrabilidad? Una alternativa, en el marco de la medibilidad, es el Teorema de Kuratowski y Ryll-Nerdzewski, el cual garantiza la existencia de selecciones medibles. El Teorema 3.3 combina la existencia de selecciones continuas y el Teorema de Carathéodory de ecuaciones diferenciales ordinarias para asegurar existencia de solución al problema (6).

**Teorema 3.3** ([30]). *Supongamos que en el problema (6), la multifunción  $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}^1$  es semicontinua superiormente y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Entonces el problema (6) posee al menos una solución en  $[0, T^*)$  para algún  $T^*$  maximal que verifica  $0 < T^* \leq T$ .*

Hay otras formas de abordar el problema de existencia de solución de una inclusión diferencial. En efecto, además de la técnica de selección, existe la técnica de punto fijo. En este caso, dada la inclusión diferencial, se introduce una multifunción integral  $\mathcal{Y}$  definida sobre el espacio  $C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ , el cual denota la clase de las funciones absolutamente continuas en  $[0, T]$ . Ésta se define como

$$\mathcal{Y} : C^0([0, T]; \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0([0, T]; \mathbb{R}^n),$$

tal que para cada  $h \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{Y}(h)$  consiste del conjunto de funciones  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolutamente continuas que verifican  $x'(t) \in F(t, h(t))$  para casi todo  $t \in [0, T]$  y  $x(0) = x_0$ . Así, una función  $x \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$  es solución de (6) si y sólo si  $x \in \mathcal{Y}(x)$ , es decir,  $x$  es un punto fijo de la multifunción  $\mathcal{Y}$ .

Dada la importancia que en los últimos años ha tenido el análisis difuso y la forma como este se ha articulado al análisis multívoco, surge una pregunta natural: ¿cómo extender una inclusión diferencial clásica al contexto difuso? La forma más natural es generalizar la Definición 3.2 de inclusión diferencial mediante la sustitución de la multifunción  $F$  de (6) por una multifunción difusa  $\tilde{F} : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}$ . Esta sustitución permite representar un sistema dinámico (5) como una *inclusión diferencial difusa*. En este trabajo se asume la noción de inclusión diferencial difusa introducida en [24] (ver Definición 3.4). El autor se centra en caracterizar los conjuntos alcanzables difusos de (7) y en exponer un método numérico para aproximarlos. En [25] se puede encontrar una descripción detallada de tal método.

**Definición 3.4** ([24]). Una inclusión diferencial difusa asociada a un PVI se define como

$$x'(t) \in \tilde{F}(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in \tilde{X}_0, \quad (7)$$

donde  $\tilde{F} : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}$  es una multifunción difusa y  $\tilde{X}_0 \in \mathbb{F}$ .

Es de observar que cualquier inclusión diferencial dada por la Definición 3.2 se puede escribir como una inclusión diferencial difusa de la Definición 3.4. En efecto, a partir de una multifunción  $F$  de (6), se puede definir una multifunción difusa  $\tilde{F}(t, x) = \chi_{F(t, x)}$  y un valor inicial difuso  $\tilde{X}_0 = \chi_{X_0}$ , donde  $\chi_{F(t, x)}$  y  $\chi_{X_0}$  son las funciones características de  $F(t, x)$  y  $X_0$  respectivamente. De ese modo, el problema (6) se convierte en una inclusión diferencial difusa de la forma (7).

Recíprocamente, una solución de (7) puede ser caracterizada en términos de las inclusiones diferenciales de la forma dada en (6), haciendo uso del Teorema 2.1 (ver [24]). De hecho, el problema (7) puede ser escrito como

$$x'(t) \in [\tilde{F}(t, x(t))]^\alpha, \quad x(t_0) = x_0 \in [X_0]^\alpha, \quad \alpha \in [0, 1], \quad (8)$$

donde  $[\tilde{F}(t, x(t))]^\alpha$  y  $[\tilde{X}_0]^\alpha$  son los  $\alpha$ -niveles de  $\tilde{F}$  y  $\tilde{X}_0$ , respectivamente. Además, la multifunción  $[\tilde{F}(t, x(t))]^\alpha : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}^1$  es de la forma dada en (6).

Claramente, los problemas (8) son inclusiones diferenciales en el sentido de la Definición 3.2. Entonces, para cada  $\alpha \in [0, 1]$ , una función  $x_\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  absolutamente continua que satisfaga (8) puede ser considerada como una  $\alpha$ -solución de (8). Se denota por  $\mathcal{X}_\alpha$  el conjunto de todas las  $\alpha$ -soluciones  $x_\alpha$  de (8) y se denota por  $X_\alpha(t)$  el conjunto alcanzable de las  $\alpha$ -soluciones de  $\mathcal{X}_\alpha$  en cada tiempo  $t$ . En [24] se afirma que  $\mathcal{X}_\alpha$  define el  $\alpha$ -nivel del conjunto difuso  $\tilde{X}$  de soluciones de (7). De igual forma,  $X_\alpha(t)$  define el  $\alpha$ -nivel de un conjunto alcanzable difuso  $\tilde{X}(t)$ , el cual está determinado precisamente por los conjuntos alcanzables  $X_\alpha(t)$  para  $\alpha \in [0, 1]$ . Por lo tanto,  $\tilde{X}(t)$  representa una solución del problema (7).

Sin embargo, en [24] el autor no demuestra la afirmación anterior. Es en [17] donde se formaliza este resultado, y además se establecen condiciones sobre  $[\tilde{F}(t, x(t))]^\alpha$  más débiles que la continuidad con respecto a  $t$  y el cumplimiento de la condición de Lipschitz con respecto a  $x$ , de tal modo que se garantiza la existencia de la solución de (7). Las hipótesis planteadas en [17] son principalmente: semicontinuidad superior sobre  $\tilde{F}$  y condiciones de acotamiento sobre las inclusiones diferenciales (8) (ver Definición 3.5). Este resultado de existencia de una inclusión diferencial difusa se resume en el Teorema 3.6. Otros resultados adicionales al respecto han sido obtenidos en [18, 19, 25].

**Definición 3.5** ([17]). Sean  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  un conjunto abierto que contiene el valor inicial  $(0, x_0)$  y  $F : \Omega \rightarrow \mathcal{K}^1$  una multifunción. Considérese

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (9)$$

una inclusión diferencial clásica asociada a un PVI y  $x(t)$  una solución de (9) en un intervalo  $[0, T]$ . Se dice que las condiciones de acotamiento se cumplen para la inclusión diferencial (9) si existen constantes  $b, M > 0$  tales que

$$Q = [0, T] \times (x_0 + (b + MT)B(0; 1)) \subset \Omega,$$

donde  $B(0; 1)$  es la bola unitaria de  $\mathbb{R}$ , y además, la imagen de la multifunción

$$F(Q) = \bigcup_{(t, x) \in Q} F(t, x) \subset B(0; M).$$

**Teorema 3.6** ([17]). Sean  $\tilde{X}_0 \in \mathbb{F}$ ,  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  que contiene a  $\{0\} \times \text{supp}(\tilde{X}_0)$  y  $\tilde{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$  una multifunción difusa semicontinua superior. Considérese la inclusión diferencial difusa

$$x'(t) \in \tilde{F}(t, x(t)), \quad x(0) \in \tilde{X}_0, \quad (10)$$

a la cual puede asociarse una familia de inclusiones diferenciales

$$x'(t) \in [\tilde{F}(t, x(t))]^\alpha, \quad x(t_0) \in [\tilde{X}_0]^\alpha, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (11)$$

Supóngase que las condiciones de acotamiento se cumplen para la inclusión diferencial

$$x'(t) \in \text{supp}(F(t, x(t))), \quad x(0) \in \text{supp}(\tilde{X}_0). \quad (12)$$

Entonces, los conjuntos alcanzables  $X_\alpha(t)$  de (11) definen un conjunto difuso alcanzable  $\tilde{X}(t)$ .

Teniendo garantizada la existencia de solución de una inclusión diferencial difusa, en la siguiente sección se analizan los diferentes métodos para encontrar tal solución.

## 4. Métodos

### 4.1. Técnicas directas

Algunos sistemas dinámicos difusos sencillos, interpretados como inclusiones diferenciales difusas, pueden resolverse fácilmente de manera analítica. Veamos los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 4.1.** Consideremos el PVI

$$x'(t) = -\lambda x(t), \quad \lambda > 0, \quad x(0) \in X_0, \quad (13)$$

donde  $X_0$  es un número difuso triangular simétrico con soporte  $[-1, 1]$ . Entonces, se interpreta (13) como una familia de inclusiones diferenciales de la forma

$$\begin{aligned} x'_\alpha(t) &\in -\lambda x_\alpha(t), \\ x_\alpha(0) &\in X_0^\alpha = (1 - \alpha)[-1, 1], \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Puesto que  $-\lambda x_\alpha(t) = \{-\lambda x_\alpha(t)\}$  es un *singleton* en  $\mathcal{K}^1$ , de (14) se tiene que

$$x'_\alpha(t) = -\lambda x_\alpha(t), \quad x_\alpha(0) \in X_0^\alpha = (1 - \alpha)[-1, 1],$$

el cual tiene como conjunto solución  $\mathcal{X}_\alpha$  en un intervalo  $[0, T]$  a las funciones

$$x_\alpha(t) = x_\alpha(0)e^{-\lambda t}, \quad x_\alpha(0) \in X_0^\alpha.$$

Entonces, los conjuntos alcanzables están dados por  $X_\alpha(t) = (1 - \alpha)e^{-\lambda t}[-1, 1]$ . Así, una solución de (13) está dada por el conjunto alcanzable difuso

$$\tilde{X}(t) = e^{-\lambda t} X_0.$$



**Ejemplo 4.2.** Considere el PVI

$$x'(t) = x^2(t), \quad x(0) \in X_0, \quad (15)$$

donde  $X_0$  es un número difuso triangular definido por

$$X_0(z) = \begin{cases} 3 - z, & 2 \leq z \leq 3, \\ z - 1, & 1 \leq z \leq 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se interpreta (15) como una familia de inclusiones diferenciales de la forma

$$x'_\alpha(t) \in x_\alpha^2(t),$$

$$x_\alpha(0) \in X_0^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha], \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (16)$$

Puesto que  $x_\alpha^2(t) = \{x_\alpha^2(t)\}$  es un *singleton* en  $\mathcal{K}^1$ , de (16) se tiene que

$$x'_\alpha(t) = x_\alpha^2(t), \quad x_\alpha(0) \in X_0^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha],$$

que tiene como conjunto solución  $\mathcal{X}_\alpha$  en un intervalo  $[0, T]$  a las funciones

$$x_\alpha(t) = \frac{1}{c_\alpha - t}, \quad x_\alpha(0) = \frac{1}{c_\alpha} \in [1 + \alpha, 3 - \alpha].$$

Luego

$$c_\alpha \in \left[ \frac{1}{3 - \alpha}, \frac{1}{1 + \alpha} \right].$$

Por lo tanto,

$$x_\alpha(t) \in \frac{1}{\left[ \frac{1}{3 - \alpha}, \frac{1}{1 + \alpha} \right] - t} = \left[ \frac{1}{\frac{1}{1 + \alpha} - t}, \frac{1}{\frac{1}{3 - \alpha} - t} \right] = \left[ \frac{1 + \alpha}{1 - t - t\alpha}, \frac{3 - \alpha}{1 - 3t + t\alpha} \right] = X_\alpha(t).$$

**Ejemplo 4.3** ([17]). Considérese la inclusión diferencial

$$x'(t) \in -x(t) + W \cos t, \quad x(0) \in X_0, \quad (17)$$

donde  $W$  y  $X_0$  son números difusos triangulares simétricos con soporte  $[-1, 1]$ . Si se interpreta (17) como una familia de inclusiones diferenciales, se tiene que

$$x'_\alpha(t) \in -x_\alpha(t) + [W]^\alpha \cos t, \quad x_\alpha(0) \in [X_0]^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

donde

$$[W]^\alpha = [X_0]^\alpha = [-1 + \alpha, 1 - \alpha].$$

Lo anterior significa que el problema (17) se reduce a una ecuación diferencial lineal de primer orden asociada a un PVI,

$$x'_\alpha(t) + x_\alpha(t) = w_\alpha \cos t, \quad w_\alpha \in [W]^\alpha \text{ y } x_\alpha(0) \in [X_0]^\alpha,$$

cuya solución está dada por

$$x_\alpha(t) = \frac{w_\alpha}{2}(\cos t + \sen t) + ce^{-t}.$$

Al suponer que la condición inicial  $x_\alpha(0) \in [X_0]^\alpha$ , entonces  $x_\alpha(0) = \frac{w_\alpha}{2} + c$   $c = x_\alpha(0) - \frac{w_\alpha}{2}$ . Luego, el conjunto solución  $\mathcal{X}_\alpha$  para  $t \geq 0$  y  $x(0) \in X_0$  está c

$$x_\alpha(t) \in \frac{1}{2}(\sen t + \cos t)[W]^\alpha + \left( [X_0]^\alpha - \frac{1}{2}[W]^\alpha \right) e^{-t} = X_\alpha(t).$$

Así, una solución de (17) la da el conjunto alcanzable difuso

$$\tilde{X}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sen\left(t + \frac{\pi}{4}\right)W + e^{-t}\chi_{[-1/2, 1/2]},$$

donde  $\chi_{[-1/2, 1/2]}$  denota la función característica del intervalo  $[-1/2, 1/2]$ .

#### 4.2. Técnica de discretización

Es claro que no todos los sistemas dinámicos difusos pueden resolverse por directas. Se han desarrollado algunos métodos numéricos que permiten aproximar los conjuntos alcanzables  $X_\alpha(t)$  de las  $\alpha$ -soluciones de una inclusión diferencial. Es de recordar que los conjuntos alcanzables  $X_\alpha(t)$  son importantes porque caracterizan el comportamiento de solución de un sistema dinámico difuso.

En [23, 24, 25] se generaliza el método de aproximación de Euler de ecuaciones diferenciales para el caso multívoco. Es decir, se discretiza el intervalo  $[0, T]$  mediante una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  con paso  $h = T/N = t_i - t_{i-1}$ , para  $i = 1, \dots, N$ . Una primera aproximación es dada por

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{h} \in F(t_i, x_i).$$

Se denota  $x^N : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  una función a trozos lineal y continua tal que

$$x^N(t) = x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{h}(t - t_i), \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i, \quad i = 0, \dots, N-1,$$

donde  $\{x_0, \dots, x_N\}$  satisface (19). Además, se denota  $S^N$  la colección de todas las soluciones  $x^N$ . Luego una generalización natural de (19) en el caso multívoco es

$$X(t+h) = \bigcup_{x \in X(t)} x + hF(t, x(t)).$$

Se denota por  $X_i^N$  el conjunto alcanzable asociado a (20) en el tiempo  $t_i$ , esto es

$$X_i^N = \{x \in \mathbb{R} \mid x = x_i^N(t_i), \text{ para algún } x^N \in S^N\}.$$

Para ello, considera una clase de subconjuntos  $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}^1$  los cuales se pueden representar computacionalmente mediante cierta estructura finita de datos. Se denota  $\mathcal{A}(X) \in \mathcal{A}$  la mejor aproximación a  $X$ . Entonces, se define la aproximación a los conjuntos alcanzables (20) mediante el proceso iterativo

$$Z(t_{i+1}) = \mathcal{A} \left( \bigcup_{z \in Z(t_i)} z + h\mathcal{A}(F(t_i, z)) \right), \quad Z(0) = \mathcal{A}(X_0). \quad (21)$$

Hüllermeier afirma que la clase  $\mathcal{A}$  utilizada en (21) se ha implementado para diferentes tipos de aproximaciones tales como envolturas convexas o clases más generales como conjuntos no convexos. Además, asegura que bajo ciertas condiciones, las aproximaciones  $Z(t)$  de los conjuntos alcanzables  $X(t)$  pueden encontrarse con cierto nivel de exactitud para todo  $t \in [0, T]$ . Sin embargo, a pesar de la capacidad del método para resolver inclusiones diferenciales difusas, tiene la dificultad de contar con alta complejidad computacional al momento de obtener tales aproximaciones debido a la poca caracterización que se tiene de la clase  $\mathcal{A}$ . Incluso para un caso sencillo como el Ejemplo 4.1, resultaría muy difícil aproximarse a una forma analítica de los  $Z(t)$  de modo que se pudiera conocer *algo más* de la solución del sistema.

**Ejemplo 4.4.** Una clase de problema de control óptimo estudiado en [11] puede generalizarse al contexto difuso mediante el sistema

$$x' \in \varphi(|x|) \cdot \tilde{W}, \quad x(0) = 0, \quad (22)$$

donde  $\tilde{W}$  es un número difuso triangular cuyos  $\alpha$ -niveles están dados por

$$[\tilde{W}]^\alpha = \{w : |w| \leq 2(1 - \alpha)\},$$

y  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se define mediante

$$\varphi(|x|) = \frac{1}{1 + |x|}.$$

Las gráficas de los conjuntos alcanzables del problema (22) fueron obtenidas en [25] mediante simulación computacional para una versión tridimensional de (22). En la última sección se resolverá el problema (22) mediante una técnica más sencilla.

### 4.3. Una IDF interpretada como un problema de control

Otra forma de interpretar una inclusión diferencial difusa es a partir de un problema de control gobernado por ecuaciones diferenciales [3]. Se considera un modelo determinista con una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$x'(t) = f_0(t, x(t)), \quad (23)$$

donde  $f_0 : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función dada con cierto grado de regularidad. Se puede modelar la incertidumbre de los estados de la variable  $x(t)$ , introduciendo un “control”  $v$ , donde  $v$  es una función que toma valores en un conjunto dado  $U \subset \mathbb{R}$ . El sistema resultante es de la forma

$$x'(t) = f(t, x(t), v(t)), \quad (24)$$

donde  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función tal que  $f(t, x, 0) = f_0(t, x)$ .

Si se analiza la dependencia de la trayectoria  $x = x(t)$  del control  $v$ , y si se supone que el grafo de una solución  $x$  de (24) pasa por el punto  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ , entonces la pendiente de la tangente a la trayectoria es  $f(t_0, x_0, w)$  para algún  $w \in U$ ; la trayectoria debe elegir su velocidad en el conjunto de velocidades permitidas:

$$F(t_0, x_0) = \{h \in \mathbb{R} : h = f(t, x, w) \text{ para algún } w \in U\}. \quad (25)$$

Luego una forma adecuada de escribir el problema (24) es utilizar una inclusión diferencial (ver Definición 3.2)

$$x'(t) \in F(t, x), \quad (26)$$

donde  $F$  es una multifunción determinada por  $f$  de (24) y donde el control  $v$  toma valores en el conjunto  $U$ . Por ejemplo, si se supone que el carácter del ruido  $v$  es difuso (es decir,  $v$  es un conjunto difuso), entonces una generalización razonable de (6) para modelar sistemas dinámicos es considerar una *multifunción difusa*  $\tilde{F} : T \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  en (26). En este sentido, el problema de control se convierte en una inclusión diferencial difusa (ver Definición 3.4).

**Ejemplo 4.5.** En el modelo epidemiológico clásico  $SI$  (susceptibles-infectados),  $\frac{dI}{dt} = \beta I(1 - I)$ , donde el total de la población es considerada constante,  $S + I = 1$ , se supone que todos los individuos tienen las mismas posibilidades de contagiarse en cada encuentro entre un individuo infectado y un individuo susceptible de infectarse. En este modelo determinista, el parámetro  $\beta$ , coeficiente de transmisión de la enfermedad, es el mismo para todos los individuos, lo que supone homogeneidad en la población. Sin embargo, en la realidad, otros factores inciden en la infección de un individuo, entre ellos, la carga viral. Los autores de [7] suponen heterogeneidad de los individuos en términos de su respectiva carga viral. Para ello, definen la tasa de transmisión  $\beta$  como un conjunto difuso que depende de la carga viral  $\nu$ , la cual tiene la ventaja de considerar diferentes posibilidades de infección de la enfermedad.

Para obtener la función de pertenencia  $\beta$ , los autores en [7] asumen que si la carga viral individual es relativamente baja, la posibilidad de transmisión es insignificante, luego existe una mínima carga viral  $\nu_{\min}$  la cual es necesaria para transmitir la infección. Además, existe una cantidad de virus suficiente  $\nu_M$  con la cual la posibilidad de contagiarse es segura. Pero, también, la carga viral es acotada, es decir, existe una cantidad máxima de virus  $\nu_{\max}$  en un individuo. Entonces, la función de pertenencia del parámetro  $\beta = \beta(\nu)$  queda definida como conjunto difuso de la siguiente manera:

$$\beta(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{si } \nu \leq \nu_{\min}, \\ \frac{\nu - \nu_{\min}}{\nu_M - \nu_{\min}}, & \text{si } \nu_{\min} \leq \nu \leq \nu_M, \\ 1, & \text{si } \nu_M \leq \nu \leq \nu_{\max}. \end{cases}$$

Puesto que  $\beta$  es difuso, se espera que en cada instante  $t$  el número de infectados  $I$  también sea difuso. La incertidumbre en el modelo difuso está dada por el parámetro  $\nu$ , pues solo se sabe que  $\nu \in [0, \nu_{\max}]$ . Para obtener  $I = I(t)$ , se establece la inclusión diferencial difusa parametrizada por la carga viral  $\nu$ ,

$$\frac{dI}{dt} \in \beta(\nu)I(1 - I), \quad I(0) = I_0, \quad \nu \in [0, \nu_{\max}], \quad (27)$$

cuya solución es la colección de soluciones de la ecuación determinista, donde  $\nu(t) \in [0, \nu_{\text{máx}}]$  es una función medible [3]. Es claro que (27) representa un sistema de control. En [24] se establece que la solución de (27) es, en cada instante  $t$ , la multifunción difusa  $I(t)$ , cuyos  $\alpha$ -niveles  $[I(t)]^\alpha$  están dados por los conjuntos alcanzables (ver [17]) de la inclusión diferencial

$$\frac{dI}{dt} \in \beta(\nu)I(1 - I), \quad \nu \in [\beta]^\alpha, \quad I(0) = I_0,$$

que puede resolverse de manera directa. De este modo, los conjuntos alcanzables están dados por

$$X_\alpha(t) = \left[ \frac{I_0 e^{\alpha t}}{S_0 + I_0 e^{\alpha t}}, \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \right], \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{28}$$

A su vez, estos conjuntos alcanzables (28) definen un conjunto alcanzable difuso,

$$\tilde{X}_{I(t)}(t) = \frac{1}{t} \ln \left( \frac{S_0}{I_0} \frac{I}{1 - I} \right).$$

#### 4.4. Otras técnicas

Otras técnicas de aproximación de soluciones de una inclusión diferencial difusa se han desarrollado en [1, 33, 34]. Por ejemplo, en [33, 34] se implementa un algoritmo denominado por los autores como *Crytalline Algorithm* para resolver inclusiones diferenciales difusas de primer orden de manera numérica o analítica. El procedimiento consiste en “desfuzzyficar” la relación funcional  $\tilde{F}$  de la inclusión diferencial difusa (ver Definición 3.4), resolver el problema de manera ordinaria y, una vez obtenida la solución, “fuzzyficarla” mediante  $\tilde{F}$ . Sin embargo, es bastante conocido que este tipo de métodos, donde el carácter difuso se reduce a un contexto ordinario, tienen el riesgo de obtener soluciones equivocadas.

Por otro lado, en [1] se propone un algoritmo denominado TRS (por sus siglas en inglés Tuning of Reachable Sets), diferente al propuesto en [33, 34]. Esta técnica se basa en el hecho que las soluciones de una inclusión diferencial son funciones de variación acotada, debido a que estas son absolutamente continuas. De ese modo, para cada nivel  $\alpha$  establece cotas inferiores y superiores de las soluciones de una inclusión diferencial, las cuales representan aproximaciones de los extremos de los conjuntos alcanzables. Sin embargo, el algoritmo propuesto en [1] no es correcto. Veamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.6.** Considere la inclusión diferencial dada en el Ejemplo 4.3. La multifunción  $x(t) = e^{-t}(1 + \int_0^t e^s |\cos s| ds)$  es una solución de dicha inclusión diferencial para  $\alpha = 0$ . Pero,  $x(t)$  no pertenece a la solución  $X_0(t)$  de (18). De hecho, el algoritmo propuesto en [1] no garantiza que la aproximación converja a la solución exacta (18), porque los autores no exponen algún resultado que lo soporte.

### 5. Técnica de aproximación

En esta sección se expone una nueva técnica de aproximación a los conjuntos alcanzables difusos de una inclusión diferencial difusa asociada a un problema de valor inicial. La técnica propuesta resulta ser más simple de utilizar que las analizadas en la sección

anterior. La sencillez de la técnica se debe a que el proceso se limita a una subclase de los números difusos: triangulares o trapezoidales. La técnica aprovecha la geometría de los números difusos triangulares y trapezoidales para establecer tales soluciones. Aunque la técnica mantiene el mismo espíritu de los resultados obtenidos en [17, 18, 24], en el sentido de que la solución de un sistema dinámico difuso es un conjunto difuso de soluciones del caso ordinario, esta técnica no es un método clásico de “desfuzzyficación” de una inclusión diferencial difusa, ni tampoco utiliza un proceso de discretización de la forma desarrollada en [1, 24, 25].

La facilidad del método se basa en que un número difuso triangular  $u$  se puede representar mediante una tripleta  $(u_1, u_2, u_3)$ , donde el valor de  $u$  en cada punto  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$  representan los vértices del triángulo formado por el grafo de  $u$ . Los puntos  $u_1$  y  $u_3$  son los extremos del soporte de  $u$ , esto es  $[u]^0 = [u_1, u_3]$ , y el punto  $u_2$  es el punto del intervalo  $[u_1, u_3]$  donde  $u$  es normal. De la misma forma, un número difuso trapezoidal  $v$  se puede representar por una colección de cuádruplas  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ , donde el valor de  $v$  en cada  $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}$  representan los vértices del trapecio formado por el grafo de  $v$ . El soporte de  $v$  es el intervalo  $[v]^0 = [v_1, v_4]$ , y los puntos  $v_2$  y  $v_3$  son los extremos del subintervalo  $[v_2, v_3]$  donde  $v$  es normal.

En resumen, la técnica descompone el número difuso que define el valor inicial o los parámetros de la inclusión diferencial difusa en sus puntos representativos  $u_j$ . Luego, para cada  $j$  se procede a resolver el sistema dinámico. Esto último se puede realizar siempre y cuando la función  $f$  de (5) que define el sistema dinámico sea, por lo menos, continua. Una vez obtenidas las respectivas  $j$ -soluciones, estas se recomponen en un número difuso triangular o trapezoidal, para definir la solución difusa del sistema dinámico. En este sentido, la técnica hace uso de la geometría de los números difusos triangulares o trapezoidales para obtener aproximaciones a los conjuntos alcanzables difusos de una inclusión diferencial. De esta manera, la obtención de los conjuntos alcanzables de las soluciones de una inclusión diferencial difusa es más sencilla de calcular. El objeto de esta técnica es obtener herramientas fáciles de implementar computacionalmente, de modo que puedan obtenerse con mayor eficiencia las soluciones de inclusiones diferenciales difusas.

En esta sección básicamente se presentarán los resultados cuando el carácter difuso de una inclusión diferencial está dado por un valor inicial difuso o parámetros difusos.

Se denota por  $\mathbb{F}_\Delta$  la colección de los números difusos triangulares. Sea  $X \subset \mathbb{R}$  y sea  $x \in X$ . Los valores de una multifunción difusa  $f : X \rightarrow \mathbb{F}_\Delta$  se pueden representar mediante una tripleta  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \in \mathbb{F}_\Delta$  de funciones reales  $f_i(x)$  para  $i = 1, 2, 3$ .

**Proposición 5.1.** *Sea  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}_\Delta$  una multifunción difusa tal que  $f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), f_3(t, x))$ . Si  $f$  es continua en  $(t, x)$ , entonces cada función real  $f_i(t, x)$  es continua en  $(t, x)$  para  $i = 1, 2, 3$ .*

*Demostración.* La continuidad de las funciones  $f_i(t, x)$  se prueba de manera directa a partir de la métrica (4) definida en  $\mathbb{F}$ .  $\square$

**Proposición 5.2.** *Sean  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}_\Delta$  una multifunción difusa continua y  $x_0$  un número real. Entonces, la inclusión diferencial difusa asociada con un problema con valor inicial*

$$x'(t) \in f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (29)$$

*tiene como solución un conjunto difuso alcanzable  $\tilde{X} : [0, T] \rightarrow \mathbb{F}_\Delta$ .*

*Demostración.* Sea  $t \in T$  y  $f(t, x) \in \mathbb{F}_\Delta$ . La inclusión diferencial difusa (29) puede escribirse como

$$x'(t) \in (f_1(t, x), f_2(t, x), f_3(t, x)), \quad x(0) = x_0. \quad (30)$$

Obsérvese que (30) es una forma distinta de escribir una inclusión diferencial difusa a la realizada en (8) por  $\alpha$ -niveles.

Siendo  $f$  una función continua, por la Proposición 5.1 se tiene que cada  $f_i(t, x)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , de (30) también lo es. Entonces, por el Teorema de Peano, el problema

$$x'(t) = f_i(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad \text{para } i=1,2,3,$$

tiene solución  $x_i(t)$  en un subintervalo  $[0, T_i]$ . Debido a las propiedades clásicas de las trayectorias de pendientes de ecuaciones diferenciales ordinarias, se puede asegurar que  $x_1(t) \leq x_2(t) \leq x_3(t)$  para  $t \in [0, T^*]$ , donde  $T^* = \min\{T_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Por lo tanto, se puede construir una multifunción difusa  $\tilde{X} : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{F}_\Delta$  tal que  $\tilde{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{F}_\Delta$ . En este caso,  $\tilde{X}$  representa un conjunto alcanzable difuso que es solución del problema (29).  $\square$

Es claro que si  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función real, entonces puede definirse una multifunción difusa  $\tilde{f} : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}$  como  $\tilde{f}(t) = \chi_{f(t)}$ .

**Proposición 5.3.** Sean  $\tilde{X}_0 \in \mathbb{F}_\Delta$  y  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función real continua. Entonces la inclusión diferencial difusa

$$x'(t) \in \tilde{f}(t, x) = \chi_{f(t,x)}, \quad x(0) \in \tilde{X}_0 \quad (31)$$

tiene como solución un conjunto difuso alcanzable  $\tilde{X} : [0, T] \rightarrow \mathbb{F}_\Delta$ .

*Demostración.* Si  $\tilde{X}_0 \in \mathbb{F}_\Delta$ , entonces se puede representar como  $\tilde{X}_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ . Como  $f$  es función continua, entonces el problema

$$x'(t) \in \chi_{f(t)}, \quad x(0) = x_i^0, \quad \text{para } i=1,2,3,$$

tiene solución  $x_i$  en un subintervalo  $[0, T_i]$ . La existencia de solución está garantizada por el Teorema de Peano. Por la propiedades clásicas de las trayectorias de las pendientes, se tiene que  $x_1(t) \leq x_2(t) \leq x_3(t)$  para  $t \in [0, T^*]$ , donde  $T^* = \min\{T_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Por lo tanto, una multifunción difusa  $\tilde{X} : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{F}_\Delta$  puede construirse de tal modo que  $\tilde{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{F}_\Delta$ . En este caso,  $\tilde{X}$  representa un conjunto alcanzable difuso que es solución del problema (31).  $\square$

**Ejemplo 5.4.** Considere el problema dado en el Ejemplo 4.4. Claramente, la multifunción difusa definida en (22) es continua, luego cumple las condiciones de la Proposición 5.2. Entonces, se pueden establecer los siguientes problemas:

$$x'_1(t) = -2 \frac{1}{1 + |x_1|}, \quad x'_2(t) = 0, \quad x'_3(t) = 2 \frac{1}{1 + |x_3|} \quad \text{y} \quad x_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (32)$$

Las soluciones de (32) están dadas por

$$x_1(t) = \text{sign}(t)(1 - \sqrt{4|t| + 1}), \quad x_2(t) = 0, \quad x_3(t) = \text{sign}(t)(-1 + \sqrt{4|t| + 1}). \quad (33)$$

Las gráficas de las funciones de (33) se encuentran en la Figura 1.

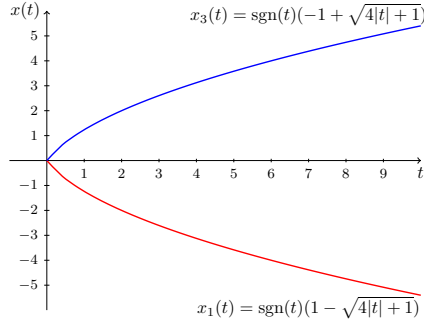


Figura 1. Gráficas de las soluciones de (32).

Luego, una solución del problema (22) es la multifunción difusa  $\tilde{X} : [0, T] \rightarrow \mathbb{F}_\Delta$  dada por

$$\tilde{X}(t) = (\text{sign}(t)(1 - \sqrt{4|t| + 1}), 0, \text{sign}(t)(-1 + \sqrt{4|t| + 1})).$$

Los resultados anteriores también son válidos para los números difusos trapezoidales. Las demostraciones de estos son análogas. En este trabajo no se ha considerado la aplicación de la técnica para el caso de una inclusión diferencial difusa definida simultáneamente por un valor inicial difuso y por una multifunción difusa. Las proposiciones anteriores las han considerado de manera separada. Este problema, al igual que el problema de considerar números difusos con geometrías más generales, serán objeto de un trabajo futuro.

## Referencias

- [1] Abbasbandy S., Nieto J.J. and Alavic M., "Tuning of reachable set in one dimensional fuzzy differential inclusions", *Chaos Solitons Fractals* 26 (2005), no. 5, 1337–1341.
- [2] Aubin J.P., "Fuzzy differential inclusions", *Problems Control Inform. Theory/Problemy Upravlen. Teor. Inform.* 19 (1990), no. 1, 55–67.
- [3] Aubin J.P. and Cellina A., *Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [4] Aubin J.P. and Frankowska H., *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.
- [5] Baidosov V.A., "Differential inclusions with fuzzy right-hand side", *Soviet Math. Dokl.* 40 (1990), no. 3, 567–569.
- [6] Baidosov V.A., "Fuzzy differential inclusions", *J. Appl. Math. Mech.* 54 (1990), no. 1, 8–13.
- [7] Barros L.C., Bassanezi R.C. and de Oliveira R.Z.G., "Epidemiological Models with Fuzzy Differential Inclusion", *Proceedings of the Third Brazilian Symposium on Mathematical and Computational Biology*, vol. II, R. Mondaini (editor), E-Papers Serviços Editoriais, Ltda., Rio de Janeiro, (2004).



- [8] Bede B. and Gal S.G., “Almost periodic fuzzy-number-valued functions”, *Fuzzy Sets and System* 147 (2004), no. 3, 385–403.
- [9] Bede B. and Gal S.G., “Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations”, *Fuzzy Sets and Systems* 151 (2005), no. 3, 581–599.
- [10] Bencsik A., Bede B., Tar J. and Fodor J., *Fuzzy differential equations in modeling hydraulic differential servo cylinders*, Third Romanian-Hungarian joint symposium on applied computational intelligence (SACI), Timisoara, Romania, 2006.
- [11] Bothe D., “Multivalued differential equations on graphs”, *Nonlinear Anal.* 18 (1992), no. 3, 245–252.
- [12] Cellina A., “Approximation of set valued functions and fixed point theorems”, *Ann. Mat. Pura Appl.* 4 (1969), no. 82, 17–24.
- [13] Chalco-Cano Y. and Román-Flores H., “Comparison between some approaches to solve fuzzy differential equations”, *Fuzzy Sets and Systems* 160 (2009), no. 11, 1517–1527.
- [14] Chalco-Cano Y., Rojas-Medar M.A. and Román-Flores H., “Fuzzy differential equations with generalized derivate”, *Proc. 27 th NAFIPS Internat. Conf. IEEE*, (2008).
- [15] Chalco-Cano Y., Rojas-Medar M.A. and Román-Flores H., “Sobre ecuaciones diferenciales difusas”, *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. SĒMA* 41 (2007), 91–99.
- [16] Chen M., Li D. and Xue X., “Periodic problems of first order uncertain dynamical systems”, *Fuzzy Sets and Systems* 162 (2011), 67–78.
- [17] Diamond P., “Time-dependent differential inclusions, cocycle attractors and fuzzy differential equations”, *IEEE Trans. Fuzzy System* 7 (1999), no. 6, 734–740.
- [18] Diamond P., “Stability and periodicity in fuzzy differential equations”, *IEEE Trans. Fuzzy System* 8 (2000), no. 8, 583–590.
- [19] Diamond P. and Watson P., “Regularity of solution sets for differential inclusions quasi-concave in a parameter”, *Appl. Math. Lett.* 13 (2000), no. 1, 31–35.
- [20] Fernández-Cara E., Rojas-Medar M.A. y Brandão A.J.V., “Inclusiones Diferenciales, Matemática Difusa y Aplicaciones”, *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. SĒMA* 24 (2003), 31–62.
- [21] Guo M. and Li R., “Impulsive functional differential inclusions and fuzzy populations models”, *Fuzzy Sets and Systems* 138 (2003), no. 3, 601–615.
- [22] Guo M., Xue X. and Li R., “The oscillation of delay differential inclusions and fuzzy bio-dynamics models”, *Math. Comput. Modelling* 37 (2003), no. 7–8, 651–658.
- [23] Hüllermeier E., *A fuzzy simulation method*, International Symposium on Soft Computing, 1996.
- [24] Hüllermeier E., “An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems”, *International Journal of Uncertainty, Fuziness and Knowledge-Bases Systems* 5 (1997), no. 2, 117–137.
- [25] Hüllermeier E., “Numerical methods for fuzzy initial value problems”, *International Journal of Uncertainty, Fuziness and Knowledge-Bases Systems* 7 (1999), no. 5, 439–461.

- [26] Kaleva O., “Fuzzy differential equations”, *Fuzzy Sets and Systems* 24 (1987), no. 3, 301–317.
- [27] Kaleva O., “A note on fuzzy differential equations”, *Nonlinear Anal.* 64 (2006), no. 5, 895–900.
- [28] Kaleva O., “The Cauchy problem for fuzzy differential equations”, *Fuzzy Sets and Systems* 35 (1990), no. 3, 389–396.
- [29] Kandel A. and Byatt W.J., “Fuzzy differential equations”, *Proceedings of the International Conference on Cybernetics and Society*, Tokyo, November 1978, 1213–1216.
- [30] Kisielewicz M., *Differential inclusions and optimal control*, Mathematics and its Applications (East European Series), Warsaw, 1991.
- [31] Kloeden P.E., “Remarks on peano-like theorems for fuzzy differential equations”, *Fuzzy Sets and Systems* 44 (1991), no. 1, 161–163.
- [32] Krivan V. and Colombo G., “A non-stochastic approach for modelling uncertainty in population dynamic”, *Bull. Math. Biology* 60 (1998), 721–751.
- [33] Majumdar K.K., “A fuzzy dynamical system modelling of a disturbance leading to cyclogenesis”, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems* 13 (2002), 7–15.
- [34] Majumdar K.K. and Majumder D.D., “Fuzzy differential inclusions in atmospheric and medical cybernetics”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part-B: Cybernetics* 34 (2004), no. 2, 877–887.
- [35] Nieto J.J. and Rodríguez-López R., “Bounded solutions for fuzzy differential and integral equations”, *Chaos Solitons Fractals* 27 (2006), no. 5, 1376–1386.
- [36] Nieto J.J., “The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations”, *Fuzzy Sets and Systems* 102 (1999), no. 2, 259–262.
- [37] Oberguggenberger M. and Pittschmann S., “Differential equations with fuzzy parameters”, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 5 (1999), no. 3, 181–202.
- [38] Puri M.L. and Ralescu D.A., “Differential and fuzzy functions”, *J. Math. Anal. Appl.* 91 (1983), no. 2, 552–558.
- [39] Puri M.L. and Ralescu D.A., “Fuzzy random variables”, *J. Math. Anal. Appl.* 114 (1986), no. 2, 409–422.
- [40] Rojas-Medar M.A., *Notas de Análisis Fuzzy Multívoco*, Universidad Estadual de Campinas, 2003.
- [41] Seikkala S., “On the fuzzy initial value problem”, *Fuzzy Sets and Systems* 24 (1987), no. 3, 319–330.
- [42] Song S. and Wu C., “Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations”, *Fuzzy Sets and Systems* 110 (2000), no. 1, 55–67.
- [43] Villamizar-Roa E.J. and González-Calderón W., “A note on the Cauchy problem of fuzzy differential equations”, *Rev. Acad. Colombiana Cienc. Exact. Fís. Natur.* 34 (2010), no. 133, 541–552.
- [44] Zhu Y. and Rao L., “Differential inclusions for fuzzy maps”, *Fuzzy Sets and Systems* 112 (2000), no. 2, 257–261.