Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 30, No. 1, 2012, pág. 75–90

Matemáticas sociales y estructuras del liberalismo: teoría de juegos e hipergrafos

Andreas Polyméris*
Universidad de Concepción, Departamento de Informática y Ciencias de la Computación, Concepción 3, Chile.

Resumen. Se recuerdan algunos resultados de las matemáticas sociales que se han orientado en el liberalismo, económico y político, que nos legó el siglo XVIII. Me detendré en teoremas que en alguna medida permiten comprender las limitaciones de ese paradigma social, porque muestran que para lograr cooperación social con base en aquellas soluciones negociadas que el liberalismo recomienda, puede ser necesario estructurar los campos de acción e instaurar estructuras que típicamente llevan a priorizar los requerimientos de los agentes más pudientes. Pero que, ello no obstante, no impiden que se planteen coyunturas económicas en que tales soluciones de equilibrio son muy insatisfactorias y que articulen paradojas que sólo podrían ser superadas adoptando éticas más solidarias. Esta revisión también se referirá a las consideraciones que a mi juicio debieran orientar el ejercicio de las matemáticas sociales.

Palabras claves: matemáticas sociales, teoría de juegos, estructuras sociales, hipergrafos, dualidad.
MSC2010: 00A71, 05C17, 05C65, 91A05, 91A12, 91B14, 91B32.

Social mathematics and structures of liberalism: game theory and hypergraphs

Abstract. The main results of social mathematics were inspired by the liberal economical and political ideas that started to prevail in the 18th century. This review focuses on theorems that reveal the limitations of liberalism. To organize collaboration, this social paradigm recommends negotiated solutions. But to ensure the existence of such equilibrium, the action domains may need to be restricted. Structures have to be imposed that typically favor rich and powerful agents. Even so, they cannot avoid economical situations in which the entailed equilibrium turns out to be very disappointing for everybody. Such paradoxical situations can be solved only if, due to solidarity commitments, the agents can trust each other. The review also comments on attitudes and considerations that should orient the practice of social mathematics.

Keywords: social mathematics, game theory, social structures, hypergraphs, duality.

* *E-mail*: andreaspolymeris@gmail.com
Recibido: 2 de febrero de 2012, Aceptado: 30 de marzo de 2012.

1. Introducción

En este ensayo queremos hablar de *matemáticas sociales*. Pero no procederé como típicamente proceden los matemáticos. No presentaré demostraciones de teoremas. Sólo ilustraré y comentaré algunos resultados matemáticos que me parecen importantes a la hora de tratar de entender la deriva histórica que ha tenido esta rama social de las matemáticas. Interesarán por lo tanto sobre todo las características que asumieron algunos modelos matemáticos con base en los cuales se observó el mundo social. Pero también nos interesarán las actitudes profesionales que asumieron los matemáticos que elaboraron estas visiones del complejo fenómeno que nos interesa.

Parece que el advenimiento de la visión económica de la sociedad también acuña el comienzo de lo que podemos llamar *matemáticas sociales*. Y que estas indagaciones, desde sus comienzos, se orientan en el *paradigma liberal*, aquel que propone *reducir las comunidades sociales a la suma de sus participantes individuales.*

Louis Dumont [5] opina que para Madeville, como para Hobbes, el hombre está dado en el estado presocial como individuo; la *purificación de la razón* se logra entonces rescatando al individuo puro de la maraña colectiva. Y el colectivo puro podrá reconstruirse sobre estas nuevas bases. Es lo que inicializará Adam Smith, que ya cuenta con la razón individual *racionalizada*, centrada en la escasez de los bienes, y con ella ahora puede emprender la tarea de *reducir* lo económico a la mera interacción de los agentes racionales. Asegura que si los agentes se rigen de acuerdo con sus intereses particulares, sin pasiones ni orgullos, de esta racional convivencia económica automáticamente emergerá el bienestar colectivo: que existe una *mano invisible* que lo garantiza.

Fue por eso que, orientándose en el *liberalismo* de Adam Smith, las indagaciones que nos interesan se iniciaron tratando de explicar cómo, o en qué medida, *el bienestar común puede emerger naturalmente de la negociación entre sus múltiples agentes individuales*; sin que nadie más que aquella etérea *mano invisible* vele por la comunidad como totalidad.

Pero de eso hace mucho tiempo. Muchos pensadores recogieron esas propuestas. Y la matemática comenzó a colaborar. Nos referiremos a algunas de esas consideraciones, y concluiremos recomendando un radical cambio de paradigma; ya veremos por qué.

2. Juegos de dos personas

Luego de Adam Smith las explicaciones del tipo *mano invisible, o Deus ex machina* ya no resultaban suficientemente convincentes. Se empezaron a requerir razones más científicas. Y puesto que a comienzos del siglo XX esto aún no se había logrado satisfactoriamente, fue que John von Neumann [16, 17], quien ya podía aspirar a ser considerado uno de los matemáticos más importantes del siglo, junto a otros defensores de la propuesta liberal, encaró el desafío fundando una *teoría de juegos* que, procediendo como recomienda el método científico, propone analizar el complejo *comportamiento económico* de las sociedades reduciéndolo a elementales *juegos de interacción entre dos personas.*

Se entiende que un tal *juego* es un conjunto $(\mathcal{H}, h, E, \mathcal{K}, k)$, donde E es el conjunto –que aquí supondremos finito– de *estados (finales)* a los que una *partida del juego* puede llevar; y las funciones $h, k : E \to \mathbb{R}$ indican los *retornos, o utilidades* $h(a), k(a) \in \mathbb{R}$, que cada uno de los dos jugadores entonces percibirá. Se entiende que $\mathcal{H}, \mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(E)$ son las familias de *opciones de juego* que tienen los respectivos agentes; nótese que $\mathcal{P}(E)$ denota la familia de todos los subconjuntos de E. Así que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son subfamilias de subconjuntos; es decir, *hipergrafos* sobre E. Se entiende que en cada partida cada jugador escogerá –independientemente, sin conocer la decisión del otro– exactamente una de sus opciones, lo que determina un par $(X, Y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ y conlleva la realización de exactamente uno de los *estados permitidos* $e \in X \cap Y$. Lo que siempre es posible, porque estamos suponiendo que $X \cap Y \neq \emptyset$, es decir, que todo *no-estado* $X \cap Y = \emptyset$ determina un *estado* considerado en E. Si $|X \cap Y| = 1$, decimos que el par de opciones (X, Y) es *determinístico*.

Por todo eso es que se entiende que un tal (X, e, Y) es una *solución de equilibrio* del juego de dos personas si $\forall b \in Y$, $h(b) \leq h(e)$, y $\forall b \in X$, $k(b) \leq k(e)$; es decir, ninguno de los dos agentes podría *mejorar sus utilidades* variando sólo aquella dimensión de la decisión colectiva que él controla, porque ninguno de los estados b que el otro jugador permite le aportaría más de lo que le ofrece a.

Por ejemplo, si $E := \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{H} := \{X^1, X^2, X^3\}$ y $\mathcal{K} := \{Y^1, Y^2, Y^3, Y^4\}$, entonces la *estructura* $(\mathcal{H}, E, \mathcal{K})$ del juego podría estar especificada por el siguiente par de *matrices de incidencia*:

E	a	b	c	d
X^1	1	1	1	0
X^2	1	1	0	1
X^3	0	0	1	1
Y^1	1	0	1	0
Y^2	0	1	0	1
Y^3	0	0	1	1
Y^4	0	1	1	0

Y la *coyuntura* (h, k) podría estar especificada por el siguiente par de *vectores*:

E	a	b	c	d
h	3	1	4	0
k	3	4	1	0

Entonces (X^2, b, Y^2) es un equilibrio, puesto que $Y^2 = \{b, d\}$ y $h(d) = 0 < 1 = h(b)$, así como $X^2 = \{a, b, d\}$, $k(a) = 3 < 4 = k(b)$ y $k(d) = 0 < 4 = k(b)$. Este es un equilibrio no determinístico, puesto que también $d \in X^2 \cap Y^2$. Muy diferentes son las utilidades que retorna el equilibrio determinístico (X^3, c, Y^4).

Este concepto de *solución negociada* parece natural, también porque se parece a otras *conclusiones por equilibrio* que han sido reivindicadas en otras disciplinas científicas más clásicas, como las físicas. Pero una primera dificultad que se presenta es que no todo juego permite tales soluciones de equilibrio. Para ejemplificar incluso podemos limitarnos a juegos $(\mathcal{H}, h, E, \mathcal{K}, k)$ cuyas *estructuras* $(\mathcal{H}, E, \mathcal{K})$ son *determinísticas* —ya que todo par $(X, Y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ lo es— y cuyas *coyunturas* (h, k) son *booleanas* —ya que $h, k : E \to \{0, 1\}$— y *competitivas* —ya que la suma $h + k$ es una función constante—; por ejemplo:

E	a	b	c	d
X	1	1	0	0
X'	0	0	1	1
h	0	1	1	0
Y	1	0	1	0
Y'	0	1	0	1
k	1	0	0	1

Este juego determinístico también se puede especificar *doble-matricialmente*:

$E = (h, k)$	Y	Y'
X	$a = (0, 1)$	$b = (1, 0)$
X'	$c = (1, 0)$	$d = (0, 1)$

La consideración de cualquier par de opciones incita al jugador *perdedor* a preferir la opción alternativa: No hay *solución equilibrada*, sólo un *círculo vicioso*.

Tal vez es esta una primera dificultad que tiende a cuestionar la convicción del paradigma liberal: el que las *acciones colectivas* surgen —o deben emerger— de *equilibrios negociados*. Y es probablemente por eso que von Neumann luego prefiere centrarse en *juegos de suma cero*, donde $h+k = 0$ instaura una *competencia* en que todo lo que puede *ganar* uno de los jugadores, lo debe *perder* el otro; *antagonismo* —identidad por oposición— que entonces le permite derivar lo que algunos siguen llamando —quizás, inmerecidamente— el *Teorema Fundamental de la Teoría de Juegos*: Siempre existe al menos una *estrategia aleatoria* que, decidiendo de acuerdo a ciertas distribuciones de probabilidad, y debido a ello renunciando a procedimientos deterministas, garantiza un *equilibrio estadístico* [17].

Esta opción paradigmática parece poco feliz, no sólo porque *diluye* el concepto de *solución negociada (pura)*, sino sobre todo porque ignora las coyunturas de potenciales colaboraciones, que no son *antagónicas* sino que premian la *cooperación entre agentes*. Porque bien puede ser que un mismo estado del colectivo *beneficie a ambos jugadores*, posibilidades que son inherentes a las comunidades que nos interesan. Es por eso que aquí no seguiremos a von Neumann.

Es más: tematizaremos explícitamente las exigencias de soluciones que plantean las realidades sociales. Porque entiendo que si una de las negociaciones que nos ocupan no llega a buen término, entonces este paradigma —esta propuesta procedural—, debido a que no permite responder a la coyuntura planteada construyendo realidad social, resultará cuestionada.

3. Estabilidad de estructuras

Es por eso que en lo que sigue nos preguntaremos qué *condiciones estructurales* deben satisfacer los juegos de dos agentes para que *siempre se puedan concebir equilibrios negociados*. Así que ahora estamos entendiendo que $(\mathcal{H}, E, \mathcal{K})$ especifica la *estructura* del juego, y nos interesa saber si ésta es *estable*; es decir, si para todas las *coyunturas* $(h, k) : E \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ los juegos $(\mathcal{H}, h, E, \mathcal{K}, k)$ permiten soluciones de equilibrio, o si, alternativamente, existe alguna coyuntura que, por resultar *insoluble*, podría cuestionar las condicionantes estructurales, y en tal medida *desestabilizar* la estructura en cuestión.

En [12], generalizando resultados de Vladimir Gurvich [7] —quien articuló en este ámbito la pregunta que ya se había hecho en [11] (vea Sección 5)—, se demostró que la estructura es estable, ssi el par $(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ de hipergrafos sobre E es *dual*; es decir, si *responde* a todo $Z \subseteq E$; ya que, o bien existe $X \in \mathcal{H}$ con $X \subseteq Z$, o bien existe $Y \in \mathcal{K}$ con $Z \cap Y = \emptyset$ —es decir, $Y \subseteq E \backslash Z$—. Esto equivale a decir que para toda competencia booleana $(h, k) : E \to \{0,1\} \times \{0,1\}$ con $h + k = 1$, el juego $(\mathcal{H}, h, E, \mathcal{K}, k)$ permite solución de equilibrio. Además, entonces toda coyuntura permite equilibrios determinísticos.

Los dos ejemplos de la Sección 2 presentan estructuras inestables. En ambos casos $Z := \{b, c\} \subseteq E$ no es respondido por la estructura $(\mathcal{H}, E, \mathcal{K})$. Es decir, la siguiente competencia booleana no permite equilibrio:

E	a	b	c	d
h	0	1	1	0
k	1	0	0	1

Pero si ampliamos la primera estructura, *agregándole la última coyuntura desestabilizante* a $\mathcal{K}$, entonces obtenemos la siguiente estructura, que sí es dual. Para verificar esto último esencialmente hay que *probar* la estructura para cada $Z \subseteq E$ —al respecto no se conocen *algoritmos polinomiales*, aunque sí *subexponenciales* [14]—.

E	a	b	c	d
X^1	1	1	1	0
X^2	1	1	0	1
X^3	0	0	1	1
Y^1	1	0	1	0
Y^2	0	1	0	1
Y^3	0	0	1	1
Y^4	0	1	1	0
Y^5	1	0	0	1

O sea que estabilidad solo se logra si las dos partes promueven *opciones parecidas*, o sea si se da una *relativa consensualidad*. Porque —ya preparando algo que nos interesará más adelante— nótese que si $\mathcal{J} := \{E \backslash Y; Y \in \mathcal{K}\}$, entonces la estabilidad en cuestión resulta equivalente a que para todo $Z \subseteq E$, o bien existe $X \in \mathcal{H}$ con $X \subseteq Z$, o bien —exclusivo— existe $W \in \mathcal{J}$ con $Z \subseteq W$. Esto significa que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{J}$ determinan *la misma* función monótona booleana $f : \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}$, porque, dado $Z \subseteq E$: $f(Z) = 1$ ssi $\exists X \in \mathcal{H}$ con $X \subseteq Z$; $f(Z) = 0$ ssi $\exists W \in \mathcal{J}$ con $Z \subseteq W$. En otras palabras: las opciones del jugador $\mathcal{H}$ *validan* f, y el jugador $\mathcal{K}$ promueve *complementos de lo que invalida* a f. Podríamos entonces concluir que la dualidad del par $(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ demanda que $\mathcal{K}$ sea algo como *la negación de la negación* de $\mathcal{H}$.

Este resultado podría ayudar a entender la hoy socialmente muy usada *estabilidad del bipartidismo*. Veamos: Parece, a primera vista, que si hay sólo dos partidos que tienen reales posibilidades de ganar las *competencias políticas* de una nación, entonces se debiera establecer un antagonismo entre esos dos agentes. Pero la observación nos dice que no; que estos dos jugadores frecuentemente tienden a *amigarse*, a cooperar entre ellos. Pues bien, nuestro teorema es capaz de identificar una razón de ello: Si los dos partidos respetan el *status quo*, es decir, la estructura que les permite *distribuirse los cargos políticos*, si así logran resolver todas las *coyunturas cualitativas* booleanas, sin caer en *inestabilidades políticas* que podrían ser aprovechadas por terceros, entonces también podrán *distribuirse, determinísticamente, todos los retornos económicos* asociados a *coyunturas cuantitativas* $(h, k) : E \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y asegurarse utilidades que por supuesto sirven para mantener la estructura política.

4. Democracia formal

Sí: la economía igual depende de la política. De hecho, la *economía liberal* no fue el único antecedente histórico de la *matemática social* que nos ocupa. El otro es *político*. Pero también es, al menos a medias, *liberal*. Porque fue el Marqués de Condorcet, matemático y revolucionario francés, quién denominó *matemáticas sociales* —o *arte social*— a sus intentos de *formalizar la democracia* que en esos momentos históricos se estaba replanteando. Condorcet, que como marqués seguía apegado a *la Nación*, como revolucionario de la época asimiló el paradigma liberal que llegaba del otro lado del canal de La Mancha e, impulsado por la necesidad de armonizar la comunidad-nación y sus ciudadanos emancipados, llegó a la conclusión de que los designios de la comunidad nacional deben sólo responder *democráticamente* a las preferencias de la mayoría de sus ciudadanos: "La razón, de acuerdo con la naturaleza, no opone más que una restricción a la independencia individual, no agrega más que una sóla obligación de obeceder, en lo que se refiere a las acciones a emprender, a una regla común, no a su propia razón, sino a la razón colectiva del mayor número" [4].

Es por eso que la *Paradoja de Condorcet*, que él articuló matemáticamente, lo inquietó: Si A denota el conjunto de *ciudadanos* y $\mathbb{S}$ es el conjunto de *opciones* entre las que la comunidad debe *elegir democráticamente exactamente una*, entonces, por ejemplo si $\{u, v, w\} \subseteq \mathbb{S}$, bien puede ser que exista una partición $\{U, V, W\}$ de A tal que $|U| + |V| > |A|/2$, $|U| + |W| > |A|/2$, $|V| + |W| > |A|/2$, para todos los $a \in U$, $u > v > w$ —donde $u > v$ indica que u es *preferido a* v—, para todos los $b \in V$, $v > w > u$ y para todos los $c \in W$, $w > u > v$. Entonces, cualquiera de las tres opciones, si es comunitariamente elegida, deberá enfrentar un *bloqueo consensuado*. Porque si, por ejemplo, u fuera la opción elegida, entonces la *contra-opción* w es una que es capaz de *consensuar una mayoría contra* u, ya que todos los miembros de $V \cup W$ prefieren w a u.

Ejemplo de *perfil de preferencias* en comunidad $A := \{a, b, c, d, e\}$, que, con $U := \{a, b\}$, $V := \{c, d\}$ y $W := \{e\}$, articula una *Paradoja de Condorcet*:

A	a	b	c	d	e
$\vee$	u	u	v	v	w
$\vee$	v	v	w	w	u
$\vee$	w	w	u	u	v

Pero, ¿podría reemplazarse *mayoría* por un *criterio de bondad* que no lleve a una *paradoja* semejante? Esa posibilidad, que entre muchos matemáticos también inspiró verdades y maravillas a Charles Dodgson —también conocido como Lewis Carroll— es la que luego de más de un siglo por fin logró excluir Kenneth Arrow [1]. Este Premio Nobel de

Economía entendió que todo *criterio de bondad* que pueda ser considerado *democrático* debe definir una función booleana $f : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}$ que:

(1) satisfaga $f(A) = 1$, porque si toda la comunidad está de acuerdo, es evidente que este acuerdo debe imponerse;

(2) sea *monótona*, es decir, si $X, Z \subseteq A$ es tal que $X \subseteq Z$, entonces $f(X) \leq f(Z)$, porque si un acuerdo entre los miembros de X basta, entonces está claro que Z también debe ser una *coalición ganadora*;

(3) sea *decisiva*; es decir, para todo $Z \subseteq A$, $f(Z) = 1$ ssi $f(A \backslash Z) = 0$, porque si tanto Z como $A \backslash Z$ fueran *coaliciones ganadoras*, entonces podrían imponer dos resultados distintos; y porque si tanto Z como $A \backslash Z$ fueran *perdedoras* —$f(Z) = 0 = f(A \backslash Z)$—, entonces muchas *coyunturas políticas* quedarían indecididas.

En la actual *teoría de juegos cooperativos* las dos primeras condiciones definen *juegos simples* $\mathcal{E} := \{Z \subseteq A; f(Z) = 1\}$. Y la tercera condición es equivalente a la *autodualidad* del par $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ [14].

Por ejemplo, en la comunidad $A := \{a, b, c, d, e\}$, las coaliciones ganadoras minimales podrían ser las siguientes (entonces el $\mathcal{E}$ resultante cumple las tres condiciones): estipuladas.

A	a	b	c	d	e
X	1	1	0	0	0
Y	1	0	1	1	0
Z	0	1	1	1	1

Nótese que si $|A|$ es impar, entonces la *función de Condorcet*, definida por $f(Z) = 1$ si $2 \cdot |Z| > |A|$ satisface estas tres condiciones. Pero además, nos dice Arrow, todo *criterio democrático* f debe evitar la *Paradoja de Condorcet*, es decir, debe satisfacer la siguiente *condición de Helly*: Si $X, Y, Z \in \mathcal{E}$, $X \cap Y, Y \cap Z, Z \cap X \neq \emptyset$, entonces $X \cap Y \cap Z \neq \emptyset$. Lo que, satisfechas las tres condiciones anteriores, es equivalente a requerir que $\mathcal{E}$ sea cerrado en relación a la intersección; es decir, que sea un *ultrafiltro* sobre A. Y entonces es fácil demostrar que este debe ser *principal*: a saber, que debe existir un *dictador* $a \in A$, tal que $\mathcal{E} = \{Z \subseteq A; a \in Z\}$. Lo que por supuesto deja claro que un tal criterio *no es democrático*.

Así Arrow demostró, con su *Teorema de Imposibilidad*, que *la democracia formal es imposible*; que no se puede reducir, mediante un mero cómputo formal, la cuestión de *la racionalidad colectiva* a una *suma de las racionalidades individuales*. Sin embargo, parece que estos últimos 60 años no amplificaron su mensaje suficientemente.

Condorcet, optimista, se preguntaba: *El perfeccionamiento de las leyes, de las instituciones públicas, conseguido con el progreso de las ciencias, ¿no tiene como efecto acercar, identificar el interés común de cada hombre con el interés común de todos? ¿La meta del arte social no destruye esta oposición aparente?* [4].

Hoy parece que, en vez de recurrir a nuevas *matemáticas sociales* que permitan ahondar en esa compleja *identificación*, se prefiere radicalizar la *emancipación política del discurso económico* que se inició hace ya 300 años [5], y *reducir lo político al modo económico.* La *negociación y suma de votos individuales* se sigue planteando, a pesar de todo, como *la* actividad política que debiera constantemente (re-)fundar las estructuras sociales.

Las *paradojas* de tales *democracias económicas* se evitan, invirtiendo, por ejemplo, en *estructuraciones culturales* que reducen la complejidad política a la de un *espacio lineal* —típicamente articulado en base al binomio *izquierda, derecha*— en que entonces las *opciones centristas* no arriesgan aquellos *bloqueos consensuados* que identificó Condorcet. Lo que entonces abre el paso a aquel *bipartidismo centralizador* que, como vimos, puede asegurarse aquellos retornos que sus *inversiones económicas* en *reducciones políticas* precisan.

Aunque, recobrando optimismo, puede ser que el interés por estos asuntos igual vaya en aumento. Parece percibirse hoy una comprensión y un cuestionamiento generalizado del *neo-liberalismo*. Incluso se nota *nostalgias* por lo común, lo público, por las entidades colectivas, en ámbitos en que hasta hace poco campeaba el individualismo sin restricciones. Tal vez se puede afirmar esto último, entre otras razones porque es algo que ha interesado desde hace mucho tiempo. La tesis doctoral del autor del presente artículo, ya bastante antigua, se abocó a una *generalización económica* del Teorema de Arrow.

5. Problemas de distribución

En 1973 este autor comenzó a preguntarse qué condiciones deben cumplir un hipergrafo, es decir, una subfamilia $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(A)$ de *coaliciones factibles*, y una *coyuntura de retorno* (r, f), para que el *problema de distribución* que esta coyuntura plantea pueda ser *resuelto cooperativamente*. Se entiende que $r \in \mathbb{R}_+$ denota la *utilidad colectiva* que la comunidad A podría obtener en esta coyuntura si procede colaborativamente. Y que $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$, dado un $Z \subseteq A$, con $f(Z)$ expresa el retorno maximal que podría obtener la subcomunidad Z si, en la coyuntura en consideración, todos los miembros de Z colaboraran autónoma pero *alternativamente*, sin cooperación de los miembros de $A \backslash Z$ y por lo tanto *fraccionando la unidad comunitaria*.

Dada cualquier subfamilia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$, se entiende que $f(\mathcal{C}) := \Sigma\{f(Z); Z \in \mathcal{C}\}$, es decir, que $f(\mathcal{E})$ denota la suma de los retornos $f(Z)$ de los $Z \in \mathcal{C}$. Además se denota con $D(\mathcal{E})$ la clase de las subfamilias $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ que son *disjuntas*, es decir, tales que para todo $X, Z \in \mathcal{D}$ con $X \neq Z$, $X \cap Z = \emptyset$, que por lo tanto identifican *proyectos alternativos* a la comunidad A. La definición del *retorno maximal alternativo* nos permite asumir que la función f no sólo es monótona, sino además tal que si $X, Z \subseteq A$ son subcomunidades disjuntas —por lo que ambas podrían establecerse *en paralelo*—, entonces $f(X) + f(Z) \leq f(X \cup Z)$. Y por lo mismo podemos asumir que toda coyuntura (r, f) es *no-antagónica*; es decir, que para todo $\mathcal{D} \in D(\mathcal{E})$, $f(\mathcal{D}) \leq r$.

Se entiende que una *solución de equilibrio* de una tal coyuntura (r, f) es una *distribución* $p : A \to \mathbb{R}_+$ del retorno colectivo r, tal que $\Sigma\{p(a); a \in A\} \leq r$ —ya que más no se puede *repartir*—, y para todo $Z \in \mathcal{E}$, $\Sigma\{p(a); a \in Z\} \geq f(Z)$ —porque en caso contrario la subcomunidad Z no colaboraría, ya que podría *obtener más* procediendo autónomamente—. Nótese que esta última condición solo es requerida para las *coaliciones factibles* $Z \in \mathcal{E}$, porque si $Z \subseteq A$ es *infactible*, entonces ese subconjunto no puede plantearse como *subcomunidad alternativa*.

No toda coyuntura permite soluciones de equilibrio. Por ejemplo, si $A := \{a, b, c\}$, $\mathcal{E} := \mathcal{P}(A)$, $r := 1$ y $f : \mathcal{E} \to \{0, 1\}$ es tal que $f(Z) = 1$ si $|Z| > 1$, entonces $p(a)+p(b), p(a)+p(c), p(b)+p(c) \geq 1$ implica $p(a) + p(b) + p(c) \geq 1{,}5$, lo que prohibe que $p(a) + p(b) + p(c) \leq 1$. Para sopesar la transcendencia de este ejemplo, imagine *tres amigos*, de los cuales ningún *individuo solo* es capaz, pero cualquier *par de agentes* bastan, para levantar la piedra bajo la cual hay un *millón de euros*. Si prefiere ejemplos menos abstractos, sugerimos observar la Comunidad Europea.

Al igual que lo hicimos 30 años más tarde, entendimos que una *estructura de coaliciones factibles* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(A)$ es *estable* si permite soluciones de equilibrio para todas las coyunturas de distribución (r, f); porque en caso contrario, el no poder *implementar la colaboración remuneradamente* cuestionaría la estructura que norma las factibilidades de cooperación.

El autor demostró [10, 11] que el hipergrafo $\mathcal{E}$ es estable ssi es *normal*; es decir, si toda función booleana $f : \mathcal{E} \to \{0, 1\}$ permite un *pivote*, a saber, un $a \in A$ tal que para todo $\mathcal{D} \in D(\mathcal{E})$ con $f(\mathcal{D})$ maximal, exista $Z \in \mathcal{D}$ con $a \in Z$.

Si, por ejemplo, $\mathcal{E}$ fuese un hipergrafo monótono y decisivo, como demandan las premisas del Teorema de Arrow, entonces siempre se tendrá $f(\mathcal{D}) = 1$; así que este teorema es, efectivamente, una generalización del Teorema de Imposibilidad de Arrow.

De hecho, también en el caso general es fácil ver que para que $\mathcal{E}$ sea estable, debe cumplirse la condición de Helly. Así como también se podría decir que todo pivote $a \in A$ de $\mathcal{E}$ es un *dictador*, puesto que todo *proyecto alternativo* $\mathcal{D} \in D(\mathcal{E})$ con $f(\mathcal{D})$ maximal debe contar con la *participación* de a en alguna de las *coaliciones paralelas* que $\mathcal{D}$ propone.

Una *idea parecida* fue la que originalmente motivó la tesis [10]: Quisimos *denunciar las inmutabilidades de las jerarquías sociales*. Entendimos que lo más característico de estas estructuras sociales es que *impiden circularidades*, en la medida en que aseguran que cada par $(a, b) \in A \times A$ esté *conectado* por exactamente un *conducto regular*. Por lo tanto asumimos que la estructura en cuestión se funda en un *hipergrafo conector* $\mathcal{G}$ sobre A, tal que para todo $G \in \mathcal{G}$, $|G| = 2$; y que para cada (a, b), con $a \neq b$, existe exactamente una *conexión* de (a, b), es decir, exactamente una secuencia $a_0, a_1, \ldots, a_m \in A$ de agentes diferentes, tales que $a = a_0$, $a_m = b$ y para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\{a_{i-1}, a_i\} \in \mathcal{G}$. Y entendimos que en esta *comunidad jerárquica* las coaliciones factibles $Z \in \mathcal{E}$ son los subconjuntos $Z \subseteq A$ que son *conexos*, es decir, tales que para todo $(a, b) \in Z \times Z$ su conexión está totalmente incluida en Z. Es fácil ver que entonces $\mathcal{E}$ cumple la condición de Helly. En [11] se demostró que este hipergrafo es normal y estable, esencialmente *inmutable*.

Por ejemplo, si $A := \{a, b, c, d, e\}$ y $\mathcal{G} := \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}\}$, entonces la familia de los $Z \in \mathcal{E}$ con $|Z| = 3$ es la tabla que va abajo. Por lo tanto si consideramos la función boolena $f : \mathcal{E} \to \{0, 1\}$ definida por $f(Z) = 1$ cuando $|Z| > 2$, entonces sólo b es pivote. En cambio si $f(Z) = 1$ cuando $|Z| \geq 2$, entonces a y b son pivotes:

A	a	b	c	d	e
Z	1	1	1	0	0
Z	1	1	0	1	0
Z	1	1	0	0	1
Z	0	1	0	1	1

Es interesante notar que la *normalidad* de un hipergrafo $\mathcal{E}$ sobre A es equivalente a que todas las *coyunturas booleanas* (r, f), con $f : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}$ y $r := \max\{f(\mathcal{D}); \mathcal{D} \in D(\mathcal{E})\}$, permitan *soluciones booleanas* $p : A \to \{0, 1\}$ —en el último ejemplo, la única solución es: $p(a) := p(b) := 1$, $p(c) := p(d) := p(e) := 0$—. Así que —como cuando examinamos la existencia de equilibrios entre dos personas— la estabilidad estructural que ahora nos interesa puede decidirse *a nivel booleano*; es decir, es equivalente a que las *distribuciones cualitativas, políticas,* puedan implementarse sin dificultades para que también se logre lo análogo en las *coyunturas cuantitativas, económicas.*

Esto nos permite ver que hay estructuras estables que no parecen tan *centralizantes* como las *jerárquicas*. Por ejemplo, si existe una partición (A', A'') de A, tal que para todo $Z \in \mathcal{E}$, $|A' \cap Z|, |A'' \cap Z| \leq 1$. Como si los miembros de A', A'' fueran *machos* y *hembras*, respectivamente, y los preceptos sociales sólo permitieran *coaliciones* de *parejas heterosexuales*. Entonces el clásico Teorema de König y Egerváry —de 1931— hace ver que el hipergrafo $\mathcal{E}$ es normal porque para el grafo bipartito que lo especifica, el número de arcos de un emparejamiento maximal es igual al número de vértices de una cobertura minimal.

Por ejemplo, si $A' := \{a, b\}$, $A'' := \{c, d, e\}$, $A := A' \cup A''$ y $\mathcal{E} := \{\{a\}; a \in A\} \cup \{\{a', a''\}; a' \in A', a'' \in A''\}$, entonces la familia de los $Z \in \mathcal{E}$ con $|Z| \geq 2$ es la de la tabla de abajo. Así que si la función boolena $f : \mathcal{E} \to \{0, 1\}$ es tal que $f(Z) = 1$ cuando $|Z| \geq 2$, entonces la única solución booleana es: $p(a) := p(b) := 1$, $p(c) := p(d) := p(e) := 0$.

A	a	b	c	d	e
Z	1	0	1	0	0
Z	1	0	0	1	0
Z	1	0	0	0	1
Z	0	1	1	0	0
Z	0	1	0	1	0
Z	0	1	0	0	1

Por supuesto que este resultado también está, por ejemplo, íntimamente emparentado al ya clásico —de 1962— Teorema de Emparejamientos Estables de David Gale y Lloyd Shapley. Nuestro teorema también deja claro que toda variante que permite *homosexualidad* o *poligamia*, deja de ser estable. ¿Será su *estabilidad social* la razón de ser de la moderna monogamia?

6. Anti-dualidad

Dado un hipergrafo $\mathcal{E}$ sobre A, sea $C(\mathcal{E}) := \{\{Z \in \mathcal{E}; a \in Z\}; a \in A\}$; es decir, la clase de las *potencialidades* de los diferentes agentes de A. Se puede demostrar [11] que el hipergrafo $\mathcal{E}$ es normal ssi para todo $f : \mathcal{E} \to \{0, 1\}$ existe un par $(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \in C(\mathcal{E}) \times D(\mathcal{E})$, tal que $f(\mathcal{E}) \leq f(\{Z \in \mathcal{C}; f(Z) = 1\}) \cdot f(\{Z \in \mathcal{D}; f(Z) = 1\})$. En este caso se entiende que el par de hipergrafos $(C(\mathcal{E}), D(\mathcal{E}))$ sobre $\mathcal{E}$ son *anti-duales*.

Así que en las estructuras $\mathcal{E}$ que nos interesan, la clase $C(\mathcal{E})$ —es decir, el conjunto de agentes A— es formalmente intercambiable por la clase $D(\mathcal{E})$ de *los proyectos alternativos*. De lo cual inmediatamente se deduce, como corolario, que $\mathcal{E}$ es estable ssi para toda coyuntura $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ con $f \neq 0$ existe un *proyecto-pivote* $\mathcal{D} \in D(\mathcal{E})$, tal que para todos los $a \in A$ que son *potentados coyunturales* porque sus $f(\{Z \in \mathcal{E}; a \in Z\})$ son maximales, existe $Z \in \mathcal{D}$ con $f(Z) > 0$ y $a \in Z$.

Como en el último ejemplo, sea $A' := \{a, b\}$, $A'' := \{c, d, e\}$, $A := A' \cup A''$. Pero el hipergrafo $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(A)$ ahora lo consideramos un subhipergrafo del antiguo, pero visualizado sobre $C(\mathcal{E})$.

Hemos adjuntado también, a la derecha de la primera matriz de incidencias, la *imagen* de este $\mathcal{E}$ sobre el conjunto $D(\mathcal{E})$ de sus *proyectos alternativos*, donde evidentemente basta considerar los máximos en términos de la inclusión. Si $f : \mathcal{E} \to \{0, 1\}$ es tal que $f(\mathcal{E}) = |\mathcal{E}|$, entonces a, b y e son pivotes. Pero el único proyecto-pivote es $\mathcal{D} := \{\{e\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}$:

$C(\mathcal{E})$						$D(\mathcal{E})$				
	0	0	0	0	1		0	1	0	0
	1	0	1	0	0		1	0	0	0
	1	0	0	1	0		0	1	1	0
	1	0	0	0	1		0	0	0	1
	0	1	1	0	0		0	1	0	1
	0	1	0	0	1		1	0	1	0

Este resultado hace ver que las estructuras estables se *orientan a los potentados*, porque sortean los amenazantes conflictos de distribución considerando prioritariamente a los *agentes más pudientes*; y luego a los otros, solo en la medida en que las *distribuciones iniciales* hayan aminorado suficientemente los requerimientos de los primeros.

A pesar de arrojar estas luces, los resultados de [11] no tuvieron en aquella época casi ningún impacto. No porque no fueran matemáticamente interesantes. De hecho, se basan fuertemente en un resultado que sí dio mucho que hablar: la *Conjetura Débil de Grafos Perfectos* que Claude Berge había planteado en 1963, y que en 1972 por fin Lazlo Lóvasz había logrado demostrar [9]. Eso *demuestra* que las comprensiones que en ese momento se estaban consolidando eran bastante contraintuitivas —sí: la matemática acostumbrada transita por las imaginaciones y costumbres mundanas—; se diría que incluso sorprendentes. Ello no obstante, las *aplicaciones* a consideraciones sociales no parecieron interesar a casi nadie. Como si estos argumentos matemáticos no bastaran para inaugurar una nueva mirada de los correspondientes fenómenos sociales, una que realmente cuestione el *prejuicio* tradicional. Solo recientemente, como a partir de los años noventa, se vuelven a retomar algunas de estas ideas. Es lo que se desprende, por ejemplo, de una importante *revisión* [2] que —aunque no cita el trabajo del presente autor— da cuenta del desarrollo de estas consideraciones matemáticas hasta hace pocos años.

Da la impresión de que en estos últimos veinte años sí se ha ido imponiendo una nueva visión que es capaz de relacionar causalmente liberalismo con estructuraciones de los campos de acción, que ya no necesariamente se asocia —¿ingenuamente?— liberalismo con *laissez-faire* o incluso con *anarquía* [15]. Más bien se ha comenzado a entender que el liberalismo es, o promueve fuertemente, para poder consolidar sus negociaciones, un *orden público*, una forma de *preestructurar el mundo*; una que —¿paradójicamente?— incluye la implementación de una visión del mundo que oculta esta *anticipación del futuro*.

Tales disimulos son tal vez las razones por las cuales la comprensión matemática de estos fenómenos estructurales sigue siendo, al menos a nuestro juicio, insatisfactoria. Por ejemplo, resulta difícil visualizar los dos modelos en que hemos ahondado —expuestos en las Secciones 3 y 5— de manera más unificada. Ello, a pesar de que muchas de las respectivas bases formales fueron desarrolladas por los mismos autores y presentadas en un mismo trabajo. En 1970 D.R. Fulkerson [6] ya se centraba en los *bloqueos* $|X \cap Y| \geq 1$ que caracterizan a los pares $(X, Y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ de la Sección 3; y en el mismo artículo entiende que los pares $(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \in C(\mathcal{E}) \times D(\mathcal{E})$ se *antibloquean*, ya que $|\mathcal{C} \cap \mathcal{D}| \leq 1$. En tal medida podemos decir que cada una de las dos estabilidades que nos han ocupado corresponde a la *dualidad* del par en cuestión; aunque en el segundo caso preferimos hablar de una *antidualidad*. Que además estas propiedades son parecidas, porque el primer par es de hipergrafos sobre el *conjunto de estados posibles* A, y el segundo par es de hipergrafos sobre el *conjunto de coaliciones factibles* $\mathcal{E}$. Además, la dualidad *armoniza la cooperación de dos jugadores*; y la antidualidad, podemos decir que en alguna medida *armoniza la concordancia entre dos paradigmas*: el *individualista* de los agentes que se manifiesta en $\mathcal{C}$, y el *holista* que responde a los proyectos alternativos. En ambos casos queda claro que tales *armonías* sólo se logran en la medida en que las acciones respondan a estructuras muy particulares. Las dificultades matemáticas que estas *dualidades* presentan siguen interesando a muchos investigadores. Considérese, por ejemplo [8]. Sin embargo, sentimos que es más urgente volver al comienzo y *recargar* las cuestiones básicas.

7. Dilema paradójico

Porque lo que nos enseñan las implicaciones obtenidas podría, a pesar de todo, resultar bastante aceptable, si pudiéramos convencernos de que esas estructuraciones que requiere el liberalismo, aún si pueden *parecer feas*, en última instancia promueven el *bienestar común* que ya prometía Adam Smith: son *para el bien de todos*. Porque, como escribe Louis Dumont [5], "la característica del campo económico se basa en un postulado de una coherencia interna *orientada al bien del hombre*. Esto es fácil de comprender, dadas las circunstancias: la emancipación frente al dominio político exigía la suposición de una coherencia interna, puesto que sino el orden tendría que haberse introducido desde afuera. Pero tampoco esto bastaba, porque si se hubiese demostrado que la coherencia interna tenía efectos perniciosos, entonces nuevamente esto hubiese permitido al político, al hombre de estado, intervenir".

¿Habrá sido por eso, es decir, porque a pesar de su indudable capacidad intelectual von Neumann no se pudo *despegar* del *credo liberal*, que no reparó que el intento de *reducir la cooperación comunitaria a equilibrios negociados* debe enfrentar una dificultad aún mucho más seria que la posible no existencia de soluciones de equilibrio?

Sólo varios años después, en 1950, Merrill Flood y Melvin Dresher, investigadores de la políticamente influyente Rand Corporation, descubren el famoso *Dilema de los Prisioneros*. Es decir, demuestran que aún si un juego de dos personas permite una solución de equilibrio $(X, a, Y) \in \mathcal{H} \times E \times \mathcal{K}$, bien puede ser que exista otra solución $(X', d, Y') \in \mathcal{H} \times E \times \mathcal{K}$, con $d \in X' \cap Y'$, y que ofrezca *mayores utilidades* a ambos jugadores; es decir, $h(a) < h(d)$ y $k(a) < k(d)$.

Claro que entonces (h, k) no puede ser antagónico, *de suma cero*. Por eso von Neumann pudo ignorar este fenómeno que, según Anatol Rapoport [13], "parece paradójico por la simple razón de que se ha aceptado durante demasiado tiempo, y sin crítica, el principio de un liberalismo económico absoluto; puesto que habitualmente se admite sin discusión que un grupo de individuos que busca sus intereses personales a través de consideraciones inmediatas se dirige, bajo la acción de las leyes económicas derivadas de la hipótesis sobre el libre intercambio, hacia la realización de su interés general".

Incluso puede ser que, en la coyuntura en cuestión, el par de opciones (X', Y') resulte *dominante*, en la medida en que para cada uno de los dos jugadores este par *siempre* lleve a retornos al menos tan buenos como los que ofrece (X, Y). Es decir, al jugador $\mathcal{H}$, X' le reporte al menos tanto como X, independientemente de lo que decida el jugador $\mathcal{K}$, tanto si este escoge Y' como si decide Y; y lo análogo para el jugador $\mathcal{K}$.

Por ejemplo, si $\{a, b, c, d\} \subseteq E$, $X := \{a, b\}$, $Y := \{a, c\}$, $X' := \{c, d\}$ y $Y' := \{b, d\}$, entonces se cumple lo dicho ssi $h(c) \leq h(a) < h(d) \leq h(b)$ y $k(b) \leq k(a) < k(d) \leq k(c)$, *condiciones de dominación paradójica* que, sin más, se pueden cumplir.

Considérese, por ejemplo, el siguiente simple juego determinista; especificado —como ya lo hicimos en la Sección 2— *doble-matricialmente*:

$E = (h, k)$	Y	Y'
X	$a = (2, 2)$	$b = (4, 1)$
X'	$c = (1, 4)$	$d = (3, 3)$

E imagine dos conductores de automóviles $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, que, de noche, van a cruzarse en una carretera rural. Cada uno tiene dos opciones: puede *bajar sus luces* —es decir, escoger $X' \in \mathcal{H}$ e $Y' \in \mathcal{K}$, respectivamente— o no, *manteniéndolas altas*. Parece que en cada una de las cuatro situaciones que entonces se pueden dar, el par (h, k) representa, aproximadamente, las *visibilidades de ruta* que los dos conductores aún tendrían. Por eso es importante que haya una ley de tránsito que se oponga al *triunfo del liberalismo*.

Si la coyuntura fuese *política*, es decir, booleana, entonces los cuatro $\leq$ de las supuestas condiciones de dominación tendrían que ser reemplazados por igualdades, lo que implicaría que (X', d, Y') también sea solución de equilibrio, y por lo tanto —pero solo en este caso— la *paradoja* ya no lo sería tanto. Por eso podemos decir que este tipo de *dilemas paradójicos* no puede *manifestarse estructuralmente*; que por lo tanto, aun si las estructuraciones de los campos de acción son *estables* —como decíamos en la Sección 3—, los dilemas que nos ocupan amenazarán.

Hay evidentemente situaciones en que la diferencia de utilidades entre a y d, ese *precio de la anarquía*, como lo llaman Eva Tardos y sus colaboradores [15], puede ser bajo. Pero el *liberalismo anárquico* (sic) no aporta ninguna razón por la cual la diferencia quedaría acotada. Las estructuraciones que promueve sólo garantizan que la negociación lleve a un equilibrio, pero no impiden que ese equilibrio pueda ser un *pésimo negocio*; incluso, como demuestra nuestro ejemplo, para cada uno de los miembros de la comunidad.

Crozier y Friedberg [3] comentan nuestro dilema: "Hagamos hincapié: ningún juicio sobre la *naturaleza humana* está implícito aquí: se supone simplemente que cada uno tratará de ganar y preferirá sus propios intereses a los del otro. El conocimiento de los posibles resultados no cambia nada; los dos actores están atrapados en una *lógica infernal* que fatalmente los lleva al fracaso, y que es la consecuencia de la estructura del problema. Un solo asunto podría hacer una diferencia y permitir que cada uno de los actores salga mejor parado: la capacidad de confiar en el otro, y con ella, la certidumbre que aquel no lo traicionará. Este comentario parece introducir una dimensión ética. Es verdad, pero, como a menudo es el caso, la ética puede y debe analizarse aquí como una construcción social, como una invención humana que estructura el campo de acción de tal manera que, persiguiendo sus propios intereses, los actores no se destruyan mutuamente".

Por ejemplo, si los agentes adhirieran a una *ética solidaria* que —apelando a la *naturaleza humana* de los agentes— condena acciones que impliquen *aumentos de inequidad*, entonces, ¿desaparecería la paradoja que nos ocupa? ¿Qué consideraciones harían que, cumpliéndose las condiciones de dominación paradójica arriba asumidas, el estado $d \in E$ resulte *aceptable* para ambos jugadores? Está claro que la *integral* $h + k$ de las utilidades individuales juega a favor de (X', d, Y'), puesto que $(h + k)(d) > (h + k)(a)$, donde recuérdese que $a \in E$ es el *equilibrio liberal* que se plantea como *alternativa holística* a d. Sólo las consideraciones individuales *desequilibran* d. Porque también el *diferencial* $|h-k|$ juega a favor de d, como intentaremos hacer ver en lo que sigue:

Si $h(d) = k(d)$, como en el último ejemplo, es decir, si $|h - k|(d) = 0$, entonces las condiciones de dominación implican $|h - k|(b), |h - k|(c) > 0$. Así que en los dos estados *individualmente alternativos* —que pueden ser accedidos a partir de d por iniciativa individual de alguno de los jugadores— la *diferencia de utilidades* aumenta. Así que si los individuos adhirieran a una ética solidaria que condena los *incrementos de inequidad*, cabe esperar que no opten por las alternativas en cuestión, y que en tal medida (X', d, Y') resulte ser un *equilibrio solidario.*

Si en cambio suponemos de ahora en adelante que $h(d) > k(d)$ —ya que el caso $h(d) < k(d)$ es simétricamente análogo—, entonces las condiciones de dominación paradójica implican $0 < |h - k|(d) < |h - k|(b)$. Y nótese que, al menos si $0 < k(b)$, también si definimos *inequidad* proporcional a $|h-k|/(h+k)$, resulta que la inequidad de b es mayor a la de d. Así que al menos la *alternativa individual* (X, b, Y') del *agente más privilegiado* $\mathcal{H}$, resulta *solidariamente prohibitiva.* Pero lo análogo no necesariamente es el caso para la *alternativa individual* (X', c, Y) del *agente menos privilegiado* $\mathcal{K}$.

Por ejemplo, considérese la siguiente variante de nuestro *ejemplo automovilístico*; donde sólo h ha sido uniformemente incrementado en 3 unidades, las que podemos suponer que el jugador $\mathcal{H}$ percibe independientemente del estado del juego:

$E = (h, k)$	Y	Y'
X	$a = (5, 2)$	$b = (7, 1)$
X'	$c = (4, 4)$	$d = (6, 3)$

Las condiciones de dominación paradójica se cumplen. También $h(d) > k(d)$. Sin embargo, la inequidad de c no puede ser menor. Y si bien el jugador privilegiado $\mathcal{H}$ podría *ceder* a $\mathcal{K}$ parte de sus *privilegios* —puesto que debe transferir menos de 1 unidad para no sacrificar las condiciones de dominancia— un tal *negocio* no bastaría para lograr que la alternativa c deje de ser individualmente más atractiva para el jugador $\mathcal{K}$.

Las negociaciones no necesariamente logran *equilibrios solidarios*. Sin embargo opinamos, apoyándonos en lo que escriben los dos sociólogos en nuestra última cita de [3], que la *capacidad de confiar en el otro* sí puede resultar decisiva; que bien puede ser que nuestro jugador circunstancialmente menos privilegiado, puesto que puede *confiar en la solidaridad* del más privilegiado, se vea *obligado a corresponderle solidariamente*; que tales *obligaciones* bien pueden establecerse cuando —como también sucede en el mundo liberal— rige una *ética de la reciprocidad*.

Pero la intención de esta Sección era sólo *insinuar una alternativa* a las formalizaciones del paradigma liberal. No pretendemos aquí desarrollar esta idea.

8. Conclusión

En resumen: para lograr el *bienestar común* que ya nos prometía Adam Smith, parece que lo que conviene tener en cuenta a la hora de evaluar los potenciales resultados de acciones cooperativas no son tanto las utilidades individuales de los agentes, sino más bien el *integral* de ellas y su *diferencial* —no necesariamente ligadas por una dualidad parecida al *teorema fundamental del cálculo*—; es decir, la *utilidad colectiva* y la *distribución de ella*.

Claro que tales *requerimientos de dualidades* también pueden plantear, como vimos, *problemas de distribución* que no permitan *soluciones negociadas*. O que sólo permitan *equilibrios destructivos*. Que por lo tanto, para *resolverlos constructivamente*, de verdad, necesitan poder apelar a una ética que *estructure el campo de acción* [3] de nuestra sociedad solidariamente. Ya no podríamos considerar sólo los preceptos liberales. Habría que abrirse a un radical cambio de paradigma.

¿En qué medida puede contribuir a ello la *matemática social* que hemos venido tratando de caracterizar? Parece que Condorcet y Arrow son los que mejor mostraron el camino a seguir, aun si sus resultados principales articulan *paradojas* e *imposibilidades*, pero que así ayudan a vislumbrar complejidades de los problemas sociales que nos interesan. En cambio opinamos que, a pesar de la importancia *fundamental* de los aportes de von Neumann y tantos otros *liberales axiomáticos*, sus planteamientos demasiado frecuentemente solo contribuyeron a reducir las complejidades del fenómeno social que nos ocupa, *centrando y priorizando* de acuerdo al paradigma liberal y obviando *dificultades y circularidades* que podrían *desestabilizar* sus certezas.

Referencias

[1] Arrow K.J., "A Difficulty in the Concept of Social Welfare", *Journal of Political Economy* 58 (1950), no. 4, 328–346.

[2] Boros E. and Gurvich V., "Perfect graphs, kernels, and cores of cooperative games", *Discrete Math.* 306 (2006), no. 19-20, 2336–2354.

[3] Crozier M. and Friedberg E., *L'acteur et le Système: Les contraintes de l'action collective.* Editions du Seuil, 1981.

[4] Dippel H., *Individuum und Gesellschaft - Soziales Denken zwischen Tradition und Revolution - Smith-Condorcet-Franklin*, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1981.

[5] Dumont L., *Homo aequalis. Genèse et épanouissement de l'idéologie économique.* Gallimard, 1977.

[6] Fulkerson D.R., "Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra", *Mathematical Programming* 1 (1971), no. 1, 168–194.

[7] Gurvich V., "Equilibrium in pure strategies", *Soviet Math. Dokl.* 38 (1989), no. 3, 597–602.

[8] Gurvich V.A., "On exact blockers and anti-blockers, Δ-conjecture, and related problems", *Discrete Appl. Math.* 159 (2011), no. 5, 311–321.

[9] Lóvasz L., "Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture", *Discrete Math.* 2 (1972), no. 3, 253–267.

[10] Polyméris A., *Stabilität gesellschaftlicher Hierarchien, eine mathematische Konflikttheorie*, Diss. ETH Zürich, 1978.

[11] Polyméris A., "Conjuncturally stable coalition structures", *Ann. Discrete Math.* 9 (1980), 229–233.

[12] Polyméris A., "Stability of two player game structures", *Discrete Appl. Math.* 156 (2008), no. 14, 2636–2646.

[13] Rapoport A., *Combats, débats et jeux*, Dunod, 1967.

[14] Riquelme F. and Polyméris A., "On the complexity of the decisive problem in simple and weighted games", *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 37C (2011), 21–26.

[15] Roughgarden T. and Tardos E., "Bounding the inefficiency of equilibria in nonatomic congestion games", *Games and Econom. Behav.* 47 (2004), no. 2, 389–403.

[16] von Neumann J., "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", *Math. Annalen* 100 (1928), 295–320.

[17] von Neumann J. and Morgenstern O., *Theory of games and economic behavior.* Princeton University Press, 1944.