

Optimización hamiltoniana en un circuito convertidor de potencia

RICARDO ALZATE*, LADY FUENTES

Universidad Industrial de Santander, Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones, Bucaramanga, Colombia.

Resumen. El artículo muestra la aplicación de la teoría de optimización a partir del máximo del hamiltoniano para manipular el comportamiento dinámico de un sistema eléctrico. Se analizan las ecuaciones que describen un sistema dinámico híbrido formulando sobre el mismo la aplicación del principio del máximo de Pontriaguin para resolver un problema de control óptimo. Resultados de simulación numérica permiten verificar la reducción del error de regulación en el sistema eléctrico analizado correspondiente con un circuito convertidor de potencia de tipo *Buck*. Actividades complementarias implican la verificación en laboratorio para las predicciones analíticas presentadas.

Palabras claves: Control, convertidor de potencia, hamiltoniano, optimización.
MSC2010: 49J15, 49L99.

Hamiltonian optimization in a power converter circuit

Abstract. This article presents the application of the optimization theory on the regulation of the output voltage in an electrical system. In order to achieve it, a mathematical formulation is developed for a hybrid dynamical system describing a power converter circuit. Then, the Pontryagin's maximum principle is applied to the system trying to solve the optimization control problem of providing a regulated output voltage to the system load. Simulation results show a good performance for the Hamiltonian-based control strategy proposed to reduce the regulation error. Experimental results on a real circuit prototype are part of current ongoing work.

Keywords: Control, Hamiltonian, optimization, power converter system.

* Autor para correspondencia: *E-mail:* ralzatec@uis.edu.co.
Recibido: 28 de marzo de 2013, Aceptado: 26 de noviembre de 2013.

1. Introducción

Es bien sabido que las ecuaciones diferenciales permiten describir el comportamiento dinámico (evolución temporal) de los sistemas físicos a partir de la relación que representan entre entradas (forzantes) y salidas (vector de soluciones). De otro lado, en el contexto de aplicaciones realistas, las soluciones para estas ecuaciones diferenciales se restringen a ciertas regiones permitidas del espacio como consecuencia de limitaciones físicas, como pueden ser saturaciones energéticas en dispositivos y fuentes de suministro, o restricciones mecánicas en desplazamientos de masas [1]. Estas restricciones constituyen reglas de tipo discreto, que interactúan con descripciones generalmente de tiempo continuo constituyendo los denominados sistemas híbridos [2].

Desde el punto de vista del análisis de las condiciones de operación (y específicamente de estabilidad) de un sistema de ingeniería, las técnicas tradicionales basadas en el posicionamiento de polos en el plano complejo de la variable de Laplace han demostrado pertinencia para explicar sistemas sencillos representados mediante funciones de transferencia. Sin embargo, consideraciones para sistemas híbridos asumen generalmente no linealidades debidas a la interacción de ecuaciones diferenciales continuas con reglas discretas, y por tanto no admiten la aplicación de herramientas de análisis tradicionales desarrolladas para operar sobre sistemas dinámicos continuos y/o lineales. Como una contribución hacia el propósito de explicar y manipular el comportamiento de sistemas híbridos (muy comunes en aplicaciones) recientemente se viene proponiendo una nueva teoría para el análisis generalizado de este tipo de sistemas, presentando interesantes resultados analíticos que requieren aún de abundante trabajo experimental para su verificación [3].

El presente artículo busca orientarse hacia este tema particular al abordar los circuitos convertidores de potencia [4, 5]. Un convertidor de potencia en el contexto de aplicaciones de ingeniería eléctrica puede definirse como un sistema eléctrico que provee de energía a una carga, a partir de los niveles de voltaje y de corriente disponibles desde una fuente de alimentación. Dicha transferencia energética desde la fuente hacia la carga debe hacerse de manera eficiente, y para ello se controla el estado de conducción de un conmutador electrónico (transistor o tiristor). Este tipo de circuitos puede modelarse como un sistema híbrido, y por tanto admite la manipulación de su comportamiento a partir de técnicas de control híbrido o conmutado (*switching control techniques* [6, 7]), las cuales aparecen como alternativas respecto a las soluciones tradicionales basadas en PWM (modulación por ancho de pulsos en la señal de conmutación) que no ofrecen mayores características de optimalidad o robustez ante la acción de perturbaciones en el sistema. Como resultado principal se propone el planteamiento matemático y la implementación computacional para una ley de control óptimo basada en la maximización del hamiltoniano, que permitirá regular (mantener constante) la tensión entregada a la carga del circuito a pesar de las variaciones en los parámetros nominales del sistema. Este planteamiento se presenta también como una alternativa para el bien conocido problema de control lineal cuadrático LQR [8, 9], en donde el funcional de costo adquiere una forma particular a partir de funciones cuadráticas del estado y la señal de control.

El contenido del artículo se organiza de la manera siguiente: la sección 1 introduce las ideas que motivan el estudio temático abordado; la sección 2 describe el modelo matemático para el sistema híbrido analizado; la sección 3 realiza una revisión del problema de control

óptimo; en la sección 4 se aplican las ideas generales de esta estrategia de control sobre el caso de estudio; la sección 5 presenta verificación de las predicciones teóricas mediante simulación; finalmente, en 6 se realizan conclusiones de los resultados obtenidos.

2. El sistema

La Figura 1 muestra el esquema general de un circuito convertidor de potencia DC-DC tipo Buck. El funcionamiento de este sistema eléctrico puede explicarse a través de dos modos de operación, dependiendo del estado de conducción del transistor MOSFET (denotado como M en la Figura), dispositivo que opera como un interruptor.

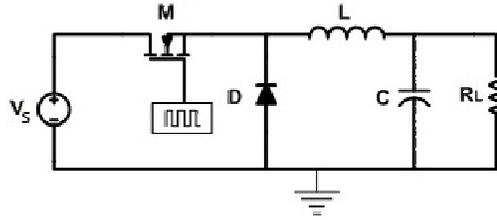


Figura 1. Topología del convertidor Buck.

Inicialmente se considerará el modo de conducción. El circuito equivalente en este estado se ilustra en la Figura 2.

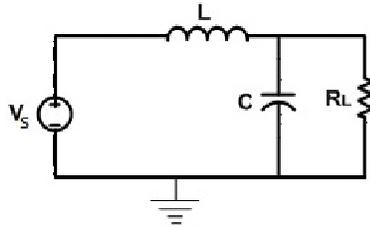


Figura 2. Circuito equivalente en modo de conducción.

Como se observa, la energía de entrada es suministrada por la fuente de alimentación V_s . Aplicando leyes de voltaje de Kirchhoff al circuito resultante, se obtiene la ecuación

$$V_L = V_s - V_0 = L \frac{di_L}{dt}, \quad (1)$$

donde V_L e i_L representan respectivamente el voltaje y la corriente en el inductor L , al tiempo que V_0 relaciona la tensión en la resistencia de carga R_L .

Un segundo momento implica el estado de no conducción. La Figura 3 muestra el circuito equivalente, el cual a su vez se describe mediante la ley de voltajes de Kirchhoff dada por la ecuación

$$V_L = -V_0 = L \frac{di_L}{dt}. \quad (2)$$

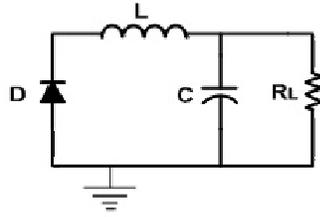


Figura 3. Circuito equivalente en modo de no conducción.

En este caso, la energía almacenada en el condensador alimenta la carga hasta el próximo modo de conducción. Ahora bien, definiendo como variables de estado el voltaje en la carga ($x_1(t) = V_0$) y la corriente en el inductor ($x_2(t) = i_L$), la ecuación (1) se puede reescribir como

$$\dot{x}_2(t) = \frac{V_s}{L} - \frac{x_1(t)}{L}. \quad (3)$$

De manera similar, aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff al nodo que conecta la carga a la salida del circuito, es posible obtener la expresión

$$\dot{x}_1(t) = \frac{x_2(t)}{C} - \frac{x_1(t)}{CR}. \quad (4)$$

Así, (3) y (4) definen la representación en variables de estado para el modo de conducción del sistema. Un desarrollo similar permite mostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x}_1(t) = \frac{x_2(t)}{C} - \frac{1}{CR}x_1(t), \quad (5)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{x_1(t)}{L}, \quad (6)$$

realiza lo propio para el modo de no conducción.

Debido a esto, es posible expresar la ecuación de estado que describe la dinámica del sistema en forma compacta mediante el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V_s}{L} \end{bmatrix} u(t), \quad (7)$$

donde $u(t) \in \mathbb{R}$ representa una señal de control que actúa como estímulo binario para replicar los modos de conducción y no conducción en la operación del circuito.

Por tanto, la descripción matemática obtenida para el circuito representa un sistema híbrido al combinar las ecuaciones continuas dadas por (3), (4), (5) y (6), con las condiciones discretas de la señal de control $u(t)$.

3. El problema de control óptimo

El problema de control óptimo en tiempo continuo consta de un sistema dinámico de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), u(t)), \quad (8)$$

donde $t \in [0, t_1]$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, siendo $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ una función continua del tiempo que representa el vector de estado del sistema y $u(t) \in \mathbb{R}$ la señal de control (ver [8]).

Para este tipo de control es necesario establecer un funcional objetivo J también llamado funcional de costo o índice de rendimiento del sistema, el cual depende de la trayectoria solución $\mathbf{x}(t)$ y de la función de control $u(t)$. El funcional objetivo determina el comportamiento del sistema y debe maximizarse o minimizarse dependiendo del objetivo de control. En otras palabras, el control óptimo establece la trayectoria óptima que satisface un objetivo. La expresión

$$J = \psi(\mathbf{x}(t_1)) + \int_0^{t_1} l(\mathbf{x}(t), u(t)) dt \quad (9)$$

muestra una formulación del funcional objetivo, representando el índice de desempeño a minimizar; $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ corresponde a una función real y derivable del estado $\mathbf{x}(t)$ que brinda información respecto a la contribución del estado final $\mathbf{x}(t_1)$ en el horizonte de optimización y $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ representa una función no negativa, integrable en el tiempo y derivable respecto al estado $\mathbf{x}(t)$ que indica la acumulación histórica del comportamiento del sistema controlado. En lo que se sigue se supone que la señal de control $u(t)$ que maximiza el funcional de costo (9) está restringida al conjunto de valores admisibles $U = \{u : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R} \mid u(t) \in [0, 1]\}$.

Para estudiar los efectos de las variaciones en el problema de control óptimo, se emplea la función objetivo modificada

$$\bar{J} = J - \int_0^{t_1} \boldsymbol{\lambda}(t)^T [\dot{\mathbf{x}}(t) - f(\mathbf{x}(t), u(t))] dt, \quad (10)$$

donde a partir de la ecuación (8) el segundo término del lado derecho se anula en el intervalo de integración, independientemente de los coeficientes $\boldsymbol{\lambda} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Por tanto, si se define el funcional

$$H(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = \boldsymbol{\lambda}^T f(\mathbf{x}, u) + l(\mathbf{x}, u), \quad (11)$$

conocido como hamiltoniano $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la expresión (10) puede ser reescrita como

$$\bar{J} = \psi(\mathbf{x}(t_1)) + \int_0^{t_1} [H(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), u(t)) - \boldsymbol{\lambda}(t)^T \dot{\mathbf{x}}(t)] dt, \quad (12)$$

utilizando la información de la ecuación (9). Luego, si se considera que $u(t) \in U$ es la señal de control óptima, cualquier otra señal $v(t) \in U$ generará un desempeño que no

necesariamente maximiza el funcional de costo considerado en (9) o en (10), y de esta manera la expresión (12) permite definir condiciones para asegurar la maximización de J a partir de la maximización de H mediante el siguiente teorema:

Teorema 3.1 (Principio del Máximo de Pontriaguin [8]). *Supóngase que $u \in U$ representa la ley de control óptima y \mathbf{x} la trayectoria solución correspondiente para el problema de control óptimo enunciado en las ecuaciones (8) y (9). Entonces, existe una trayectoria adjunta $\boldsymbol{\lambda}(t)$ tal que u , \mathbf{x} y $\boldsymbol{\lambda}$ satisfacen:*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), u(t)), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ -\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)^T &= \boldsymbol{\lambda}(t)^T f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), u(t)) + l_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), u(t)), \\ \boldsymbol{\lambda}(t)^T(t_1) &= \psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_1)),\end{aligned}$$

para todo t , $0 \leq t \leq t_1$; y para todo $v \in U$,

$$H(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), v(t)) \leq H(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), u(t)),$$

siendo H definido como en la ecuación (11).

A partir de este teorema, el valor óptimo de la ecuación (9) –funcional objetivo– implica seleccionar una señal $u(t)$ en el conjunto admisible de valores U , en modo tal que se maximice el hamiltoniano a partir de una trayectoria óptima. Esta formulación constituye un procedimiento más general que el método basado en la ecuación algebraica de Ricatti, denominado regulador lineal cuadrático LQR (véase [8, 9]), restringido a una forma particular del funcional J en términos de funciones cuadráticas ponderadas. Para ilustrar mejor la solución propuesta al problema de control óptimo se abordará en la sección siguiente el caso de una estrategia de este tipo aplicada a la regulación de tensión en la salida de un convertidor de potencia tipo Buck.

4. Control óptimo de un convertidor Buck

Retomando el sistema descrito en la Sección 2, se realizó el diseño de un circuito Buck reductor que entrega 12 [VDC] en su salida para una entrada de 30 [VDC]. Los valores de los diferentes elementos de circuito empleados y otras consideraciones del diseño se incluyen en el Cuadro 1 (véase [10]).

En adelante se mostrará cómo estas características nominales pueden satisfacerse a pesar del efecto de perturbaciones en el sistema, por medio de una ley de control óptimo basada en la maximización de la función hamiltoniana. El modelo del sistema previamente definido en la ecuación (7) se escribe de nuevo como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), u(t)) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V_s}{L} \end{bmatrix} u(t), \quad (13)$$

Parámetro	Valor
Tensión de entrada V_s	30 [VDC]
Tensión en la carga V_0	12 [VDC]
Resistencia de carga R_L	5,76 [Ω]
Tensión de rizado ΔV_0	0,6 % [VDC]
Frecuencia de conmutación	40 [kHz]
Ciclo útil PWM	40 %
Inductancia L	810 [mH]
Condensador C	100 [μ F]

Cuadro 1. Valores de diseño para circuito convertidor de potencia Buck reductor.

a partir de lo cual se observa que $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$; es decir $n = 2$. Para el circuito considerado, el problema de control óptimo se enuncia mediante la maximización del funcional de costo dado por

$$J = - \int_0^{t_1} (x_1(t) - V_{ref})^2 dt, \quad (14)$$

correspondiente a la maximización del negativo (minimización) de la energía del error de medida, definido como la diferencia entre los valores deseado V_{ref} y medido $x_1(t)$ para la tensión a la salida del circuito (problema de regulación óptima). Las restricciones de la señal de control son

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad (15)$$

que relacionan un ciclo útil (0 % - 100 %) ajustable en el dispositivo de conmutación, constituyendo un control óptimo conmutado.

Procediendo con la formulación del problema de control se obtendrá la expresión para el hamiltoniano del sistema. A partir de la representación en espacio de estados dada en (13), se obtiene la expresión para la derivada del campo vectorial $f(\mathbf{x}(t), u(t))$ respecto al vector de estados $\mathbf{x}(t)$:

$$f_{\mathbf{x}} = f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), u(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (9) y (14), se obtienen las igualdades

$$\psi(\mathbf{x}(t_1)) = 0, \quad (17)$$

$$l(\mathbf{x}(t), u(t)) = -(x_1(t) - V_{ref})^2. \quad (18)$$

Derivando $l(\mathbf{x}(t), u(t))$ con respecto al vector de estados $\mathbf{x}(t)$, se obtiene la expresión

$$l_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial l}{\partial x_1} & \frac{\partial l}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 + 2V_{ref} & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Reemplazando (16) y (19) en la expresión para la dinámica de $\boldsymbol{\lambda}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & \lambda_2(t) \end{bmatrix}^T$ dada por

$$-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)^T = \boldsymbol{\lambda}^T f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), u(t)) + l_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), u(t)), \quad (20)$$

se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\dot{\lambda}_1(t) = \frac{1}{CR}\lambda_1(t) + \frac{1}{L}\lambda_2(t) + 2x_1(t) - 2V_{ref}, \quad (21)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{1}{C}\lambda_1(t). \quad (22)$$

Para formular el hamiltoniano de la expresión (11) se requiere una solución explícita para el sistema de ecuaciones (21) y (22), tal y como se presenta a continuación. Inicialmente, dichas ecuaciones pueden escribirse en forma matricial a partir de

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = A\boldsymbol{\lambda}(t) + Bw(t), \quad (23)$$

donde $A = -f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), u(t))$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ y $w = (x_1(t) - V_{ref})$. Ahora bien, aplicando la transformación de Laplace sobre ambos miembros de la expresión (23) y aprovechando las propiedades de linealidad del operador, se obtiene

$$s\boldsymbol{\Lambda}(s) - \boldsymbol{\lambda}(0) = A\boldsymbol{\Lambda}(s) + BW(s). \quad (24)$$

A partir de lo anterior,

$$\boldsymbol{\Lambda}(s) = (sI - A)^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0) + (sI - A)^{-1}BW(s). \quad (25)$$

Tomando en cuenta los resultados propuestos en [9] se define una expresión para la solución del sistema de ecuaciones (21) y (22) mediante la igualdad

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = e^{At}\boldsymbol{\lambda}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BW(\tau)d\tau, \quad (26)$$

donde

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}, \quad (27)$$

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}BW(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} BW(s) \right\}. \quad (28)$$

Por tanto, realizando los cálculos respectivos se obtiene

$$e^{At} = \begin{bmatrix} a_{11}e^{s_1 t} + b_{11}e^{s_2 t} & \frac{1}{L}(a_{12}e^{s_1 t} + b_{12}e^{s_2 t}) \\ -\frac{1}{C}(a_{21}e^{s_1 t} + b_{21}e^{s_2 t}) & a_{22}e^{s_1 t} + b_{22}e^{s_2 t} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

donde

$$a_{11} = \frac{s_1}{s_1 - s_2}; \quad b_{11} = \frac{s_2}{s_2 - s_1}; \quad a_{12} = \frac{1}{s_1 - s_2}; \quad b_{12} = \frac{1}{s_2 - s_1}; \quad (30)$$

$$a_{21} = a_{12}; \quad b_{21} = b_{12}; \quad a_{22} = \frac{s_1 - \frac{1}{RC}}{s_1 - s_2}; \quad b_{22} = \frac{s_2 - \frac{1}{RC}}{s_2 - s_1},$$

$$s_1 = \frac{1}{2RC} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4R^2C}{L}} \right); \quad s_2 = \frac{1}{2RC} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4R^2C}{L}} \right). \quad (31)$$

Asimismo,

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} B w(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \int_0^t 2 \left(a_{11} e^{s_1(t-\tau)} + b_{11} e^{s_2(t-\tau)} \right) w(\tau) d\tau \\ - \int_0^t \frac{2}{C} \left(a_{21} e^{s_1(t-\tau)} + b_{21} e^{s_2(t-\tau)} \right) w(\tau) d\tau \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Nótese que a partir de los desarrollos presentados, la solución para $\lambda(t)$ se convierte en una función de las condiciones iniciales $\lambda(0)$ y el valor que toma la forzante $w(t)$, la cual a su vez depende de $x_1(t)$ según se define en (23).

Por tal motivo, conviene determinar una expresión para $x_1(t)$ a partir de la solución de la ecuación (13), que puede ser reescrita en el modo siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{A}\mathbf{x}(t) + \bar{B}u(t). \quad (33)$$

De esta manera, tras aplicar un procedimiento similar al ilustrado en la ecuaciones (23)-(32) para $\lambda(t)$, es posible obtener como solución explícita para $\mathbf{x}(t)$ la expresión

$$\mathbf{x}(t) = e^{\bar{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} \bar{B}u(\tau) d\tau, \quad (34)$$

donde

$$e^{\bar{A}t} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - \bar{A})^{-1} \right\}, \quad (35)$$

$$\int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} \bar{B}u(\tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - \bar{A})^{-1} \bar{B}U(s) \right\}. \quad (36)$$

Por tanto, realizando los cálculos respectivos se obtiene

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} e^{m_1 t} + \bar{b}_{11} e^{m_2 t} & \frac{1}{C} (\bar{a}_{12} e^{m_1 t} + \bar{b}_{12} e^{m_2 t}) \\ -\frac{1}{L} (\bar{a}_{21} e^{m_1 t} + \bar{b}_{21} e^{m_2 t}) & \bar{a}_{22} e^{m_1 t} + \bar{b}_{22} e^{m_2 t} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

donde

$$\bar{a}_{11} = \frac{m_1}{m_1 - m_2}; \quad \bar{b}_{11} = \frac{m_2}{m_2 - m_1}; \quad \bar{a}_{12} = \frac{1}{m_1 - m_2}; \quad \bar{b}_{12} = \frac{1}{m_2 - m_1}; \quad (38)$$

$$\bar{a}_{21} = \bar{a}_{12}; \quad \bar{b}_{21} = \bar{b}_{12}; \quad \bar{a}_{22} = \frac{m_1 + \frac{1}{RC}}{m_1 - m_2}; \quad \bar{b}_{22} = \frac{m_2 + \frac{1}{RC}}{m_2 - m_1},$$

$$m_1 = \frac{1}{2RC} \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{4R^2C}{L}} \right); \quad m_2 = \frac{1}{2RC} \left(-1 - \sqrt{1 - \frac{4R^2C}{L}} \right). \quad (39)$$

Asimismo,

$$\int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} \bar{B} u(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \int_0^t \frac{1}{C} \left(\bar{a}_{12} e^{m_1(t-\tau)} + \bar{b}_{12} e^{m_2(t-\tau)} \right) \frac{V_s}{L} u(\tau) d\tau \\ \int_0^t \left(\bar{a}_{22} e^{m_1(t-\tau)} + \bar{b}_{22} e^{m_2(t-\tau)} \right) \frac{V_s}{L} u(\tau) d\tau \end{bmatrix}, \quad (40)$$

constituyendo una función de $\mathbf{x}(0)$ y $u(t)$. Finalmente, tomando en cuenta los resultados expresados en (13)(18)(26), es posible obtener a partir de la ecuación (11) la siguiente expresión para el hamiltoniano del sistema:

$$H(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = \boldsymbol{\lambda}(t)^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR} x_1(t) + \frac{1}{C} x_2(t) \\ -\frac{1}{L} x_1(t) + \frac{V_s}{L} u(t) \end{bmatrix} - (x_1(t) - V_{ref})^2; \quad (41)$$

a partir de la cual, una selección apropiada para $u(t)$ permitirá maximizar su valor y por tanto satisfacer el funcional de costo (14) con base en el principio del máximo de Pontriaguin.

En resumen, una asignación para $u(t)$ en (33) determinará un valor para $x_1(t)$, y por consiguiente para $w(t)$ en (23). Esto significará una evolución de $\boldsymbol{\lambda}(t)$ que redundará en el comportamiento de $H(\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{x}(t), u(t))$ en (41). A partir de ello es claro el papel que toma la elección en el valor de la señal de control $u(t)$ (considerando las restricciones impuestas sobre la misma) para satisfacer los requerimientos de optimalidad en el problema planteado. La verificación de la solución propuesta es ilustrada en la siguiente sección, empleando simulación numérica.

5. Verificación de la estrategia de control en MATLAB®

Para corroborar las predicciones analíticas desarrolladas en las secciones 3 y 4, se realizó un análisis del comportamiento del circuito empleando simulación numérica en MATLAB®. En particular, el cálculo para la estrategia de control óptimo propuesta se realizó a partir del flujograma visualizado en la Figura 4 ([10]).

En el algoritmo se supone un valor inicial cualquiera para la señal de control dentro del intervalo de restricción $0 \leq u(t) \leq 1$. Con esta condición de control inicial se determina la respectiva trayectoria de estado $\mathbf{x}(t)$ dentro del intervalo $0 \leq t \leq t_1$, y a partir de ello el valor para el hamiltoniano al final de dicho periodo. Este valor calculado se compara con el correspondiente a un periodo anterior. Si el hamiltoniano actual es mayor que el anterior, el valor de la señal de control se mantiene durante el próximo ciclo. En caso contrario este se incrementa dentro del conjunto admisible. Este proceso se repite iterativamente para cada intervalo, determinando numéricamente los valores de la señal de control $u(t)$ que, ajustados a las restricciones, maximizan el valor del hamiltoniano (41), y por consiguiente minimizan la función objetivo dada en (14).

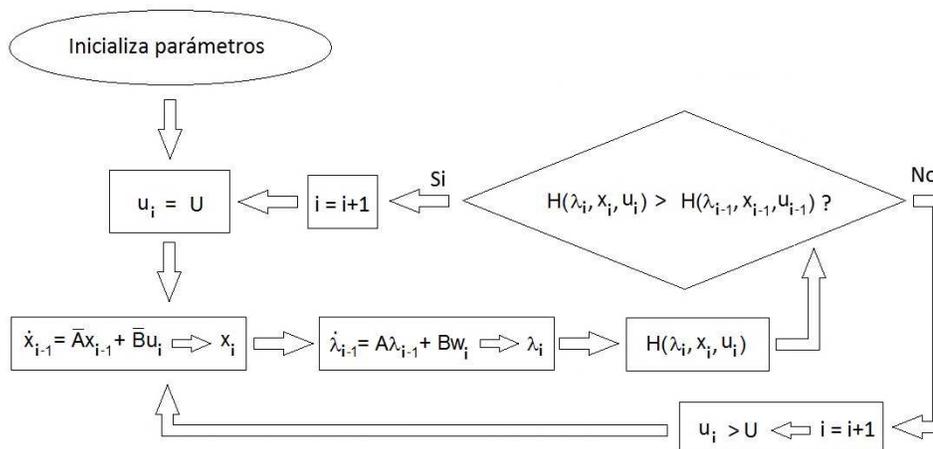


Figura 4. Diagrama de flujo para la rutina computacional implementada.

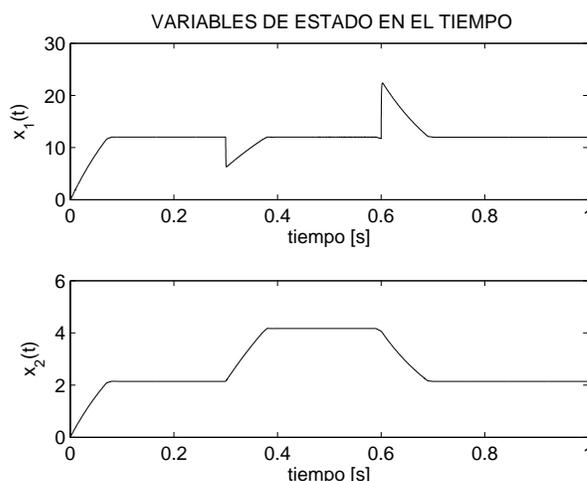


Figura 5. Solución para la ecuación de estado del sistema.

Con base en esta representación numérica fue posible obtener los resultados de simulación que a continuación se presentan. Inicialmente, en la Figura 5 se visualiza la solución para la ecuación de estado (13). La traza superior de la figura representa la tensión en la resistencia de carga R_L , es decir, $x_1(t)$. Obsérvese como tras partir de una condición inicial de 0 [VDC] la tensión se incrementa hasta el valor nominal deseado de 12 [VDC] en aproximadamente 100 [ms], valor que se mantiene constante en el tiempo hasta que el sistema es perturbado pasados 300 [ms]. La perturbación aplicada se corresponde con una reducción del 50 % en el valor nominal de la carga durante el intervalo de tiempo (300,600) [ms], lo cual incrementa en un 100 % la corriente en el inductor ($x_2(t)$), como se verifica a partir de la traza inferior.

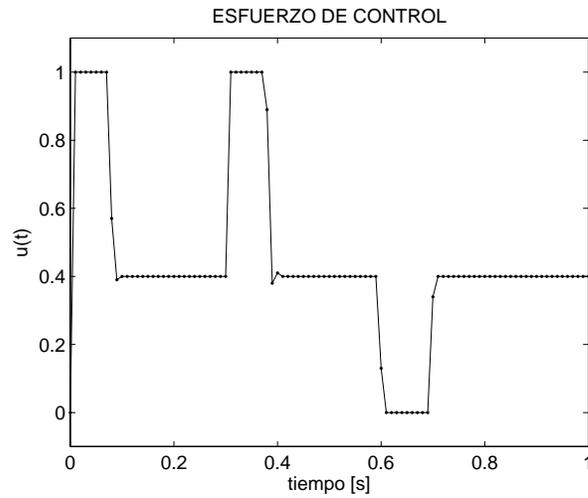


Figura 6. Esfuerzo de control óptimo.

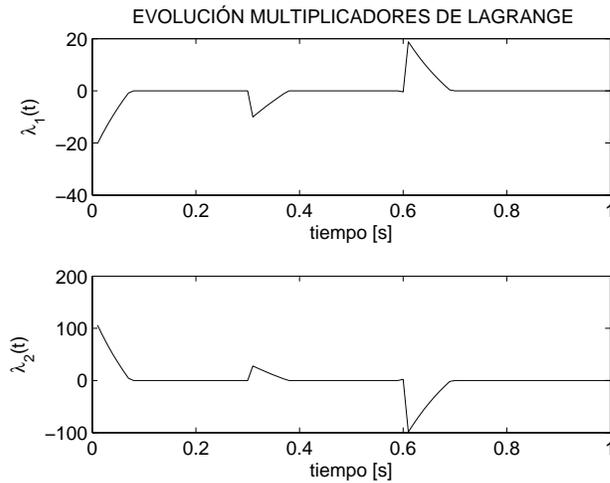


Figura 7. Evolución temporal para multiplicadores de Lagrange $\lambda(t) = [\lambda_1(t) \lambda_2(t)]^T$.

De otro lado, la señal de control $u(t)$ se ilustra en la Figura 6. De la misma se observa cómo el esfuerzo de control es máximo en principio cuando el error es máximo (y por consiguiente el hamiltoniano es mínimo). Una vez se alcanza el valor de salida deseado, el esfuerzo de control se establece en un valor aproximado de 0,4 unidades porcentuales (valor nominal para el ciclo útil en el Cuadro 1). Tras aplicar la perturbación, este esfuerzo de control vuelve a incrementarse, notándose cómo a través de esta acción el sistema retoma la condición deseada en la variable $x_1(t)$, momento en el cual $u(t)$ se reduce a su valor nominal. Asimismo, cuando la perturbación se elimina se experimenta en la respuesta un pico de voltaje que revierte el esfuerzo de control, manifestándose

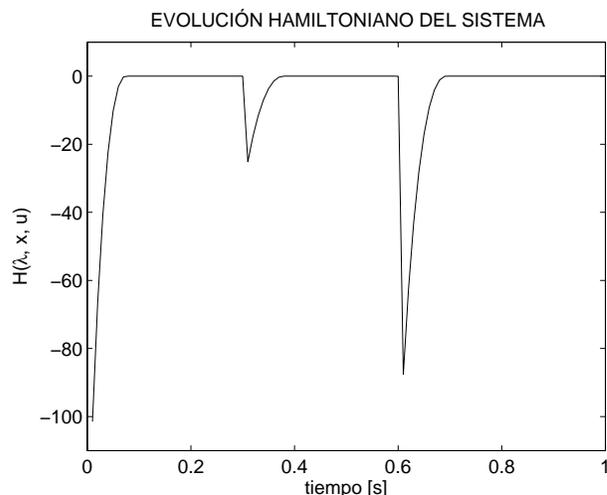


Figura 8. Evolución temporal para $H(\lambda(t), \mathbf{x}(t), u(t))$.

como una reducción a su valor mínimo que nuevamente se reestablece al valor nominal cuando la salida alcanza el valor de referencia. Con lo anterior se verifica la efectividad para la estrategia de control óptimo propuesta. Esta tendencia en el comportamiento de la ley de control es corroborada por la evolución temporal tanto de los multiplicadores de Lagrange $\lambda(t)$ en la Figura 7, como por la función hamiltoniana $H(\lambda(t), \mathbf{x}(t), u(t))$ en la Figura 8, visiblemente maximizada a pesar de la incidencia de perturbaciones en el sistema.

6. Conclusiones

Los resultados analíticos y numéricos presentados permiten concluir que es posible manipular el comportamiento dinámico de un sistema híbrido a partir de una señal de control calculada mediante análisis de la evolución temporal del hamiltoniano, como solución para un problema de optimización.

Se ha mostrado, a partir de la evaluación del principio del máximo de Pontriaguin aplicado sobre las ecuaciones que describen un sistema eléctrico, la verificación de un resultado esperado en el contexto de un sistema de control; i.e., la maximización del hamiltoniano, y por ende la solución del problema de control óptimo, significan la reducción de la energía del error de regulación. Lo anterior constituye una formulación alternativa para resolver el problema de control óptimo en forma más general que en otros métodos, como el basado en la ecuación algebraica de Ricatti (regulador lineal cuadrático LQR), en donde el funcional de costo J se restringe a una forma cuadrática ponderada.

En el presente artículo se han presentado resultados analíticos y de simulación numérica para el control óptimo de un circuito convertidor de potencia. Actualmente se desarrollan trabajos complementarios que buscan la verificación experimental en laboratorio para estas predicciones teóricas. En particular, se busca incrementar la eficiencia energética para esta clase de dispositivos.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad Industrial de Santander por financiar el presente proyecto bajo el código VIE-UIS 5568.

Referencias

- [1] Brogliato B., *Nonsmooth Mechanics - Models, Dynamics and Control*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [2] Goebel R., Sanfelice R.G. and Teel A.R., “Hybrid dynamical systems”, *Control Systems, IEEE* 29 (2009), no. 2, 28–93.
- [3] Di Bernardo M., Budd J., Champneys A.R. and Kowalczyk P., *Bifurcations and Chaos in Piecewise Smooth Dynamical Systems - Theory and Applications*, Springer-Verlag, U.K., 2007.
- [4] Rashid M.H., *Electrónica de potencia. Circuitos, dispositivos y aplicaciones*, 2 ed., México, 1995.
- [5] Hart D.W., *Power electronics*, New York, 2010.
- [6] Lamloumi L., Yaich A. and Chaari A., “Switching control design based on multi-observer for nonlinear systems”, *Electrotechnical Conference (MELECON), 2012 16th IEEE Mediterranean*, (2012), 689–692.
- [7] Mingjun Z. and Tarn T., “A hybrid switching control strategy for nonlinear and under-actuated mechanical systems”, *Automatic Control, IEEE Transactions* 48 (2003), no. 10, 1777–1782.
- [8] Luenberger D.G., *Introduction to dynamic systems theory, models and applications*, USA, 394–416, 1979.
- [9] Ogata K., *Modern control engineering*, Prentice-Hall Inc., 2009.
- [10] Esteban P., Tutira Y. y Fuentes L., *Diseño y simulación de estrategias de control conmutado en convertidores de potencia*, Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2012, 86 pág.