Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 32, No. 2, 2014, pág. 129–138

Análisis de extinción de una ecuación de difusión no local con término de absorción

Mauricio Bogoya[a]*, Claudia Patricia Mora[b]

[a] Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Bogotá, Colombia.

[b] Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Departamento de Matemáticas, Tunja, Colombia.

Resumen. Se estudia un problema de difusión no local con término de absorción y condiciones de frontera de Neumann. Se analiza la existencia y unicidad de las soluciones, y se da un principio de comparación para ellas. Se analiza la extinción de la solución para algunos términos de absorción.

Palabras clave: Difusión no local, Neumann, absorción, extinción.
MSC2010: 35K57, 35B40.

Quenching analysis for a nonlocal diffusion equation with absorption term

Abstract. We study a nonlocal diffusion problem with absorption term and Neumann boundary conditions. We prove the existence and uniqueness of solutions, and give a comparison principle for them. The quenching phenomena of solutions is analyzed for some absorption term.
Keywords: Non local diffusion, Neumann, absorption, quenching.

1. Introducción

La descripción matemática de una gran variedad de fenómenos que aparecen en las ciencias biológias, físicas y químicas, entre otras, puede llevarse a cabo mediante ecuaciones en derivadas parciales lineales y no lineales. Entre estos modelos, los de difusión tienen gran importancia en las ciencias básicas.

La ecuación de medios porosos

$$v_t = C\Delta(v^m),\ en\ \mathbb{R}^N \times [0,\infty), \tag{1}$$

* E-mail: mbogoyal@unal.edu.co
Recibido: 17 de enero de 2014, Aceptado: 3 de mayo de 2014.
Para citar este artículo: M. Bogoya, C.P. Mora, Análisis de extinción de una ecuación de difusión no local con término de absorción, *Rev. Integr. Temas Mat.* 32 (2014), no. 2, 129-138.

donde $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ es el operador Laplaciano y $m > 1$ y $C > 0$ son constantes, ha sido muy utilizada para describir procesos de difusión o transferencia de calor. Otras aplicaciones aparecen en biología matemática, filtración de agua y problemas de fronteras libres. La ecuación (1) comparte algunas propiedades con la ecuación clásica del calor, pero una diferencia es que la ecuación de medios porosos tiene la propiedad de propagación finita de la velocidad, es decir, si la condición inicial tiene soporte compacto, entonces la solución tiene soporte compacto en cualquier instante $t > 0$, lo cual origina la existencia de frontera libre. Para mayor conocimiento sobre la ecuación (1) ver [2, 9] y sus correspondientes referencias.

Cortázar y otros, en [4], estudian un modelo unidimensional de difusión no local cuyo comportamiento es análogo a la ecuación (1). Luego Bogoya en [3] generaliza este modelo a dimensiones mayores. Para tal fin considera $J : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con $N \geq 1$ una función no negativa, suave, simétrica $J(-x) = J(x)$, radialmente decreciente, de soporte compacto en la bola unitaria y con $\int_{\mathbb{R}^N} J(r)dr = 1$. Para este modelo $u(x,t)$ representa la función de densidad de una población en la posición $x \in \mathbb{R}^N$ y en un instante $t \geq 0$. La distribución de probabilidad de saltar de la posición y a la posición x está dada por

$$J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right)\frac{1}{u^{N\alpha}(y,t)}$$

cuando $u(x,t) > 0$, y es cero en otro caso, donde $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{N}$. Se sigue que la razón con la cual los individuos están llegando a la posición x de todos los otros lugares es

$$\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t)dy,$$

y la razón con la cual se están desplazando de la posición x hacia todas las otras posiciones es

$$-u(x,t) = -\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,t)dy.$$

Estas consideraciones, en ausencia de fuentes externas, llevan a que la densidad u verifique

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t)dy - u(x,t) \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N \times [0,\infty), \\ u(x,0) &= d + w_0(x) \quad \text{sobre} \quad \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $d \geq 0$ y $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $w_0 \geq 0$. Se observa que el valor de u depende de x y de todos los valores cercanos a x, razón por la cual (2) es un modelo de difusión no local. En [1] se pueden ver más problemas de difusión no local.

En [3] se estudia la existencia y unicidad de la solución de (2), un principio de comparación para las soluciones. Además se obtiene que las soluciones del problema (2), al igual que las soluciones de la ecuación de medios porosos (1), satisfacen la propiedad de propagación finita de la velocidad, la cual genera la existencia de frontera libre.

En [3] también se estudia el problema con condiciones de Neumann asociado a (2). Para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un dominio acotado con frontera suave, se considera el problema

$$u_t(x,t) = \int_{\Omega} \left(J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t) - J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,t) \right) dy, \tag{3}$$

con $u(x,0) = u_0(x) \in L^1(\Omega)$ no negativa. En [3] se analiza la existencia y unicidad de las soluciones de (3). Además, se demuestra que la solución cuando $t \to \infty$ tiende al valor medio de la condición inicial.

El objetivo en este artículo es estudiar el problema de difusión no local con término de absorción asociado a (3). Para $x \in \Omega$ consideramos el problema

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t)dy \\ &\quad - \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,t)dy - f(u(x,t)), \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{4}$$

donde $u_0 \in L^1(\Omega)$ es una función no negativa y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y suave. En este modelo se supone que ningún individuo puede saltar del interior del dominio Ω al exterior del dominio Ω (y viceversa). Por lo tanto, las integrales son consideradas en Ω, y el flujo de individuos entrando o saliendo del dominio Ω es nulo. En consecuencia, la variación de individuos en la frontera de Ω es cero. Este hecho, origina que el problema sea considerado de Neumann. Por otro lado, la función f es no negativa, representa el término de absorción y satisface las siguientes hipótesis:

(H_1): $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ es una función creciente con $f(0) \geq 0$ y $f(s) > 0$ para todo $s > 0$.

(H_2): $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(s)}ds < \infty.$

Un interés en el estudio de ecuaciones de evolución se concentra en las soluciones que van a cero en un tiempo finito. Este fenómeno se conoce como extinción o apagamiento (en la literatura inglesa se conoce como *quenching*). Se dice que la solución se extingue (o se apaga) en tiempo finito T si existe $T > 0$ tal que

$$\lim_{t\to T^-} \min_{x\in\Omega} u(x,t) = 0.$$

Algunos autores (ver [5]) consideran que hay extinción cuando u_t no está acotada. El estudio de extinción de la solución para diferentes problemas ha concentrado la atención de muchos matemáticos en los últimos decenios (ver por ejemplo [6, 7, 8] y sus correspondientes referencias).

El trabajo está distribuido de la siguiente forma: en la sección 2 estudiamos la existencia y unicidad de la solución del problema (4) y la validez de un principio de comparación para sus soluciones; en la sección 3 estudiamos la extinción de la solución del problema (4), para algunas casos especiales del término de absorción f; en la sección 4 se dan las conclusiones.

2. El Problema de Neumann

El estudio de la existencia y unicidad de la solución de (4) es consecuencia del teorema del punto fijo de Banach. Para este fin, fijamos $t_0 > 0$ y consideramos el espacio de

Banach $X_{t_0} = C([0, t_0]; L^1(\Omega))$ con la norma

$$|||w||| = \max_{0 \le t \le t_0} \|w(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Consideramos el subespacio $X_{t_0}^+ = \{w \in X_{t_0} \mid 0 \le w \le M \ ctp, \ M \ge 2||w_0||\}$, el cual es cerrado en X_{t_0}. Se obtiene la solución de (4) como el punto fijo del operador $T_{w_0} : X_{t_0}^+ \to X_{t_0}^+$ definido por

$$\begin{aligned} T_{w_0}w(x,t) = & \int_0^t \int_\Omega \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,t)} \right) w^{1-N\alpha}(y,t) - J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(x,t)} \right) w^{1-N\alpha}(x,t) \right) dyds \\ & - \int_0^t f(w(x,t))\, ds + w_0(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Se tiene el siguiente lema, el cual es importante para el estudio de la existencia y unicidad de la solución de (4).

Lema 2.1. *Sean w_0 y z_0 funciones no negativas tales que $w_0, z_0 \in L^1(\Omega)$ y $w, z \in X_{t_0}^+$. Si f es una función de Lipschitz con constante $K > 0$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que $|||T_{w_0} - T_{z_0}||| \le Ct_0|||w - z||| + ||w_0 - z_0||_{L^1(\Omega)}$.*

Demostración. Sean $w, z \in X_{t_0}^+$. Se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega |T_{w_0,f}(w)(x,t) - T_{z_0,f}(z)(x,t)| dx \\ & \le \int_0^t \int_\Omega \left| \int_\Omega \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)} \right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)} \right) z^{1-N\alpha}(y,s) \right) dy \right| dx\, ds \\ & + \int_0^t \int_\Omega \left| \int_\Omega \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(x,s)} \right) w^{1-N\alpha}(x,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(x,s)} \right) z^{1-N\alpha}(x,s) \right) dy \right| dx\, ds \\ & + \int_0^t \int_\Omega |f(z(x,s)) - f(w(x,s))|\, dx\, ds + \int_\Omega |w_0 - z_0|(x) dx \\ & = I_1 + I_2 + I_3 + \|w_0 - z_0\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Para el término I_1 se consideran los conjuntos

$$A^+(s) = \{y \in \Omega \mid w(y,s) \ge z(y,s)\} \quad y \quad A^-(s) = \{y \in \Omega \mid w(y,s) < z(y,s)\}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left| \int_\Omega \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)} \right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)} \right) z^{1-N\alpha}(y,s) \right) dy \right| dx \\ & \le \int_\Omega \int_{A^+(s)} \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)} \right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)} \right) z^{1-N\alpha}(y,s) \right) dy\, dx \\ & + \int_\Omega \int_{A^-(s)} \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)} \right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)} \right) z^{1-N\alpha}(y,s) \right) dy\, dx. \end{aligned}$$

Como J es una función radialmente decreciente, los términos a integrar son no negativos; por lo tanto, se tiene por el Teorema de Fubini que

$$\int_\Omega \int_{A^+(s)} \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}\right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)}\right) z^{1-N\alpha}(y,s)\right) dy\,dx$$

$$\leq \int_{A^+(s)} (w(y,s)-z(y,s))dy.$$

En forma similar se analiza el caso correspondiente a $A^-(s)$. Por consiguiente, se tiene que

$$\int_\Omega \left| \int_\Omega \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}\right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)}\right) z^{1-N\alpha}(y,s)\right) dy \right| dx$$

$$\leq \int_\Omega |w(y,s)-z(y,s)|dx.$$

En forma análoga se tiene un estimativo para el término I_2:

$$\int_\Omega \left| \int_\Omega \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(x,s)}\right) w^{1-N\alpha}(x,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(x,s)}\right) z^{1-N\alpha}(x,s)\right) dy \right| dx$$

$$\leq \int_\Omega |w(x,s)-z(x,s)|dx.$$

Para el término I_3, como f es una función de Lipschitz con constante $K > 0$, se tiene que

$$I_3 \leq K \int_0^t \int_\Omega |w(x,s)-z(x,s)|dx\ ds.$$

Finalmente se obtiene que

$$\int_\Omega |T_{w_0,f}(w)(x,t) - T_{z_0,f}(z)(x,t)|dx$$

$$\leq (2+K) \int_0^t \int_\Omega |w(y,s)-z(y,s)|dy\,ds + \|w_0-z_0\|_{L^1(\Omega)},$$

de lo cual resulta que

$$|||T_{w_0}(w) - T_{z_0}(z)||| \leq Ct_0|||w-z||| + \|w_0-z_0\|_{L^1(\Omega)},$$

con $C = (2+K)$. ☑

A continuación estudiaremos el teorema de existencia y unicidad para la solución del problema (4).

Teorema 2.2. *Sea f una función de Lipschitz con constante $K > 0$ y $w_0 \in L^1(\Omega)$ una función no negativa; entonces existe una única solución u de (4) tal que $u \in X_{t_0}^+$.*

Demostración. Veamos primero que T_{w_0} envía $X_{t_0}^+$ en $X_{t_0}^+$. Sea $w \in X_{t_0}^+$. Como J y f son no negativas, se tiene que

$$\begin{aligned} T_{w_0}w(x,t) &\leq \int_0^t \int_\Omega \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,t)} \right) w^{1-N\alpha}(y,t) \right) dyds + w_0(x) \\ &\leq \int_0^t \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{M^\alpha} \right) M^{1-N\alpha} dyds + w_0(x) \\ &\leq Mt_0 + w_0(x) \leq M/2 + M/2 = M, \end{aligned}$$

para t_0 muy pequeño. Ahora, como $w \geq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} T_{w_0}w(x,t) &\geq \int_0^t \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,t)} \right) w^{1-N\alpha}(y,t)\, dyds - Mt_0 - \int_0^t f(M)ds + w_0(x) \\ &\geq \int_0^t \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,t)} \right) w^{1-N\alpha}(y,t)\, dyds - t_0(M - f(M)) + w_0(x); \end{aligned}$$

por consiguiente, se tiene que $T_{w_0}w(x,t) \geq 0$.

Además, si hacemos $z_0 \equiv w_0$ en el Lema 2.1, y eligiendo $Ct_0 < 1$, se obtiene que T_{w_0} es una contracción; por lo tanto, por el teorema del punto fijo de Banach existe un único punto fijo $u \in X_{t_0}^+$ de T_{u_0}, el cual es la única solución de (4). ☑

Como consecuencia inmediata de los resultados anteriores, se tienen las siguientes observaciones:

Observación 2.3. La solución de (4) depende en forma continua de la condición inicial; esto es, si u y v son soluciones de (4) con datos iniciales u_0 y v_0 respectivamente, entonces existe una constante $\widetilde{C} = \widetilde{C}(t_0, K)$, donde K es la constante de Lipchitz de la función f, tal que

$$|\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|| \leq \widetilde{C}\|u_0 - v_0\|_{L^1(\Omega)}.$$

Observación 2.4. La función $u \in X_{t_0}^+$ es solución de (4) si y solo si

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_0^t \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u(y,s)^\alpha} \right) u(y,s)^{1-N\alpha} dy\, ds \\ &- \int_0^t \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u(x,s)^\alpha} \right) u(x,s)^{1-N\alpha} dy\, ds - \int_0^t f(u(x,s))\, ds + u_0(x). \end{aligned}$$

Observación 2.5. Si u es una solución de (4) con condición inicial u_0, entonces la masa M satisface

$$M = \int_\Omega u(x,t)dx = \int_\Omega u_0(x)dx - \int_0^t \int_\Omega f(u(x,s))dxds$$

en Ω.

Teorema 2.6 (Principio de Comparación). *Sean u y v soluciones continuas de (4) con condiciones iniciales u_0 y v_0 respectivamente. Si $u(x,0) \leq v(x,0)$ para $x \in \Omega$, entonces $u(x,t) \leq v(x,t)$ para todo $(x,t) \in \Omega \times [0,T)$.*

Demostración. Consideremos inicialmente que $u(x,0)$ y $v(x,0)$ son funciones C^1 con soporte compacto. Existe $\delta > 0$ tal que $u(x,0) + \delta < v(x,0)$. Razonaremos por contradicción. Si la conclusión no se tiene, existe un tiempo $t_0 > 0$ y un punto $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0,t_0) = v(x_0,t_0)$ y $u(x,t) \leq v(x,t)$ para todo $(x,t) \in \Omega \times [0,t_0]$.

Consideremos el conjunto $G = \{x \in \Omega \mid u(x,t_0) = v(x,t_0)\}$. $G \neq \emptyset$, ya que $x_0 \in G$; además, G es cerrado en Ω. Sea $x_1 \in G$; se tiene entonces que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (u-v)_t(x_1,t_0) \\
&= \int_\Omega \left(J\left(\frac{x_1-y}{u^\alpha(y,t_0)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t_0) - J\left(\frac{x_1-y}{v^\alpha(y,t_0)}\right) v^{1-N\alpha}(y,t_0) \right) dy \\
&\qquad - \left(f(u(x_1,t_0)) - f(v(x_1,t_0))\right) \;\leq\; 0,
\end{aligned}
$$

lo cual implica que $u(y,t_0) = v(y,t_0)$ para todo $y \in B_\epsilon(x_1)$. Por lo tanto G es abierto en Ω. Lo anterior conduce a que $G = \Omega$, lo cual no puede ser posible.

Para el caso de que $w(x,0)$ y $z(x,0)$ no sean funciones de clase C^1, consideramos sucesiones crecientes $(u_n(x,0))_n$ y $(v_n(x,0))_n$ de funciones de clase C^1 tales que $u_n(x,0) \to u(x,0)$ y $v_n(x,0) \to v(x,0)$ en Ω cuando $n \to \infty$, y además, $u_n(x,0) \leq v_n(x,0)$. Sean u_n y v_n soluciones de (4) con datos iniciales $u_n(x,0)$ y $v_n(x,0)$, respectivamente. Por el argumento previo, se tiene que $u_n(x,t) \leq v_n(x,t)$. Aplicando el teorema de la convergencia monótona y la Observación 2.4, se tiene que $u(x,t) \leq v(x,t)$ para todo $(x,t) \in \Omega \times [0,T)$. ☑

Observación 2.7. El Principio de Comparación es válido en L^1.

A continuación extenderemos el análisis de la existencia y unicidad de la solución de (4), para funciones f que satisfacen (H_1).

Teorema 2.8. *Para una función no negativa $u_0 \in L^1(\Omega)$ y para una función f que satisface (H_1), existe un tiempo $\tau > 0$ y una única solución u de (4) tales que $u \in C([0,\tau); L^1(\Omega))$.*

Demostración. Sea $(f_n)_n$ una sucesión creciente de funciones de Lipschitz que convergen a f, con $f_n(s) = f(s)$ para $s \in [0,n]$. Sea u_n la única solución de (4) con condición inicial $u_n(x,0)$ y con término de absorción f_n. Suponiendo que la sucesión de las condiciones iniciales $(u_n(x,0))_n$ es creciente y converge uniformemente a $u(x,0)$, por el Principio de Comparación (Teorema 2.6) se tiene que $u_n(x,t) \leq u_{n+1}(x,t)$. Por lo tanto, existe una función u (la cual puede ser infinita en algunos puntos) tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$.

Sea $\tau = \sup\left\{ t \mid \sup_{x\in\Omega} u(x,t) < \|u_0\|_\infty + 1 \right\}$, donde $\tau > 0$. De la Observación 2.4 se tiene que u_n satisface la ecuación integral, y por lo tanto al tomar $n \to \infty$ se tiene por el teorema de la convergencia monótona que u satisface la ecuación integral de la Observación 2.4, así que u es la única solución de (4) en $\Omega \times [0, \tau)$ con condición inicial $u(x, 0)$ y término de absorción f. ☑

A continuación enunciaremos el Principio de Comparación para funciones f que satisfacen H_1. Su demostración es análoga a la hecha en el Teorema 2.6

Teorema 2.9 (Principio de Comparación). *Sean f una función que satisface H_1 y u, v soluciones continuas de (4) con datos iniciales u_0 y v_0, respectivamente. Si $u(x, 0) \leq v(x, 0)$ para todo $x \in \Omega$, entonces $u(x, t) \leq v(x, t)$ para todo $(x, t) \in \Omega \times [0, \tau)$.*

3. Extinción

A continuación estudiaremos el comportamiento de la solución de (4) cuando f satisface (H_2).

Teorema 3.1. *Sea f una función que satisface (H_2). Sea u la solución de (4), con condición inicial u_0 tal que $\sup u_0 = A < \infty$. Entonces u se extingue en tiempo finito.*

Demostración. Sea $h(t)$ la única solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$h'(t) = -f(h(t)), \quad t > 0; \quad h(0) = A. \tag{6}$$

Como f satisface (H_2), se tiene que h se extingue en tiempo finito T. Para $v(x, t) = h(t)$, se tiene que v es solución de (4) con condición inicial $v_0 = v(x, 0) = h(0) = A$. Sea u la solución de (4) con condición inicial u_0. Como $u_0 \leq A = v_0$, se tiene por el Principio de Comparación (Teorema 2.9) que $u(x, t) \leq v(x, t) = h(t)$ pata todo $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$; por lo tanto u se extingue en tiempo finito. ☑

A continuación estudiaremos el caso particular para $f(u) = u^p$ con $p > 0$. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} u_t(x,t) = &\int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t)dy - \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,t)dy - u^p(x,t), \\ u(x,0) = &\ u_0(x). \end{aligned} \tag{7}$$

Sea $u_0 \in L^1(\Omega)$; como $f(u) = u^p$ con $p > 0$ satisface (H_1), se tiene por el Teorema 2.8 que el problema (7) tiene una única solución $u \in C([0, \tau); L^1(\Omega))$. En cuanto a la extinción de la solución, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *Sea $u_0 \in L^1(\Omega)$ una función positiva con $\sup u_0 = A < \infty$. Si $0 < p < 1$, entonces la solución u de (4) se extingue en tiempo finito T, con $T \leq \beta A^{1/\beta}$ donde $\beta = 1/(1-p)$. Además*

$$\lim_{t \to T^-} \frac{u(x, t)}{(T - t)^\beta} = C_p, \tag{8}$$

con $C_p = (1 - p)^{1/(1-p)}$.

Demostración. Como $0 < p < 1$, se tiene que

$$\int_0^1 \frac{1}{u^p} du = \frac{1}{1-p} < \infty;$$

por lo tanto f satisface (H_2), y como $u_0 \in L^1(\Omega)$ es una función positiva con $\sup u_0 = A < \infty$, se tiene por el Teorema 3.1 que la solución u del problema (7) se extingue en tiempo finito $T > 0$.

En (6) se tiene que la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$h'(t) = -h^p(t), \quad t > 0; \quad h(0) = A,$$

es la función $h(t) = (A^{1-p} - (1-p)t)^{\beta}$. Efectivamente, h se extingue cuando $T_h = \beta A^{1/\beta}$. Como $u_0 \leq A$, se tiene por el Principio de Comparación (Teorema 2.9) que $u(x,t) \leq h(t)$ para todo $x \in \Omega$ y $t \in [0, T]$. Por consiguiente, el tiempo T de extinción de u es menor al tiempo T_h de extinción de h, por lo cual se tiene que $T \leq T_h = \beta A^{1/\beta}$.

Ahora demostraremos (8). Del análisis anterior se tiene que $u(x,t) \leq h(t) = C_p(T_h - t)^{\beta}$ para todo $x \in \Omega$ y para todo $t \in [0, T]$.

A continuación demostraremos que $u(x,t) \geq C_p(T-t)^{\beta}$. Razonando por contradicción, supongamos que la desigualdad no se cumple; por consiguiente, existe un tiempo $t_0 > 0$ tal que $u(x, t_0) < C_p(T - t_0)^{\beta}$. Se puede elegir un tiempo $\widetilde{T}$ cerca a T con $\widetilde{T} < T$ tal que $u(x, t_0) < C_p(\widetilde{T} - t_0)^{\beta}$. Sea $z(t) = C_p(\widetilde{T} - t)^{\beta}$ la solución de (7), con $u_0 \leq z(t_0)$. Entonces, por el Principio de Comparación (Teorema 2.9) se tiene que $u(x,t) \leq z(t)$ para todo $x \in \Omega$ y $t \in [0, \widetilde{T}]$, luego u se extingue en el tiempo finito $\widetilde{T} < T$, lo cual es una contradicción. ☑

Teorema 3.3. *Sea u la solución de (7), con condición inicial $u_0 > 0$ y $\sup u_0 = A < \infty$. Si $p \geq 1$, entonces $u(x,t) > 0$, para todo $x \in \Omega$ y para todo $t > 0$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\sup u_0 < 1$. Se tiene que la solución u de (7) satisface $u(x,t) < 1$ para todo $x \in \Omega$ y para todo $t > 0$. En efecto, razonando por contadicción, supongamos que existe $t_0 > 0$, con $t_0 = \text{mín}\{t : \ u(x,t) = 1\}$. Sea $u(x_1, t_0) = \text{máx}_{x \in \Omega}(x, t_0) = 1$. Como J es una función radialmente decreciente, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq u_t(x_1, t_0) = & \int_\Omega J\left(\frac{x_1 - y}{u^{\alpha}(y, t_0)}\right) u^{1-N\alpha}(y, t_0) dy \\ & - \int_\Omega J\left(\frac{x_1 - y}{u^{\alpha}(x_1, t_0)}\right) u^{1-N\alpha}(x_1, t) dy - u^p(x_1, t_0) \\ \leq & - u^p(x_1, t_0) = -1, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Como $p \geq 1$, se tiene que $u^p(x,t) \leq u(x,t)$. Sea $u(\widetilde{x}, t) = \text{mín}_{x \in \Omega} u(x,t)$; de (7) se tiene que

$$\begin{aligned} u_t(\widetilde{x}, t) \geq & \int_\Omega J\left(\frac{\widetilde{x} - y}{u^{\alpha}(y, t)}\right) u^{1-N\alpha}(y, t) dy - \int_\Omega J\left(\frac{\widetilde{x} - y}{u^{\alpha}(\widetilde{x}, t)}\right) u^{1-N\alpha}(\widetilde{x}, t) dy - u(\widetilde{x}, t) \\ \geq & - u(\widetilde{x}, t), \end{aligned}$$

por lo tanto $u_t(\widetilde{x},t) \geq -u(\widetilde{x},t)$, de donde se tiene que $u(\widetilde{x},t) \geq e^{-t}u(\widetilde{x},0) > 0$. Por consiguiente, $u(x,t) > 0$, para todo $x \in \Omega$ y para todo $t > 0$. ☑

4. Conclusiones

Se concluye que el problema (4) de difusión no local con término de absorción y condiciones de frontera de Neumann es un problema bien puesto, es decir, tiene una única solución y además hay dependencia continua con respecto a la condición inicial. Las soluciones de (4) satisfacen un principio de comparación.

Si el término de absorción representado por la función f satisface la hipótesis (H_2), $\int_0^1 \frac{1}{f(s)}ds < \infty$, se tiene que las soluciones de (4) se extinguen en tiempo finito. Para el caso particular $f(u) = u^p$, se tiene que si $0 < p < 1$ la solución de (7) se extingue en tiempo finito T con $T \leq \beta A^{1/\beta}$, donde $\beta = 1/(1-p)$. Si $p \geq 1$ la solución de (7) es positiva para todo $t > 0$.

Referencias

[1] Andreu-Vaillo F., Mazón J.M., Rossi J.D. and Todelo-Melero J.J., *Nonlocal Diffusion Problems*, Mathematical Surveys and Monographs, AMS 165, 2010.

[2] Aronson D.G., “The porous medium equation”, in *Nonlinear diffusion problems*, *Lecture Notes in Math.* 1224, Springer, Berlin (1986), 1-46.

[3] Bogoya M., “A nonlocal nonlinear diffusion equation in higher space dimensions”, *J. Math. Anal. Appl.* 344 (2008), no. 2, 601-615.

[4] Cortázar C., Elgueta M. and Rossi J.D., “A nonlocal diffusion equation whose solutions develop a free boundar”, *Ann. Henri Poincaré* 6 (2005), no. 2, 269-281.

[5] Kawarada H., “On solutions of initial-boundary problem for $u_t = u_{xx} + 1/(1-u)$”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 10 (1974/75), no. 3, 729-736.

[6] Kirk C.M. and Roberts C.A., “A review of quenching results in the context of nonlinear Volterra equations”, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.* 10 (2003), no. 1-3, 343-356.

[7] Levine H.A., “The phenomenon of quenching: a survey”, in *Trends in the theory and practice of nonlinear analysis*, *North-Holland Math. Stud.* 110, North-Holland, Amsterdam (1985), 275-286.

[8] Levine H.A., “Quenching and beyond: a survey of recent results”, in *Nonlinear Mathematical Problems in Industry*, II, *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.* 2, Gakkōtosho, Tokyo (1993), 501-512.

[9] Vázquez J.L., “An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation”, in *Shape optimization and free boundaries*, *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* 380, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1992), 347-389.