

## Una descomposición convexa

MARIO LOMELÍ-HARO\*, VERÓNICA BORJA M.,  
J. ALEJANDRO HERNÁNDEZ T.

Universidad Tecnológica de la Mixteca, Instituto de Física y Matemáticas, Huajuapán de León, Oaxaca, México.

**Resumen.** Dada una colección  $P$  de puntos en el plano, una descomposición convexa de  $P$  es un conjunto  $\Gamma$  de polígonos convexos con vértices en  $P$  que satisfacen lo siguiente: La unión de todos los elementos de  $\Gamma$  es el cierre convexo de  $P$ , cada elemento de  $\Gamma$  es vacío (no contiene a ningún otro elemento de  $P$  en su interior) y para cualesquiera 2 elementos diferentes en  $\Gamma$  sus interiores son disjuntos (se intersecan en a lo más una arista). Únicamente se sabe que existen descomposiciones convexas con a lo más  $\frac{7n}{5}$  elementos para toda colección de  $n$  puntos. En este trabajo diremos cómo obtener una descomposición convexa específica de  $P$  con a lo más  $\frac{3n}{2}$  elementos.

**Palabras clave:** Aristas girables en triangulaciones, descomposiciones convexas, triangulaciones

**MSC2010:** 68U05, 68R05, 68R10.

## A convex decomposition

**Abstract.** Given a point set  $P$  on the plane, a convex decomposition of  $P$  is a set  $\Gamma$  of convex polygons with vertices in  $P$  satisfying the following conditions: The union of all elements in  $\Gamma$  is the convex hull of  $P$ , every element in  $\Gamma$  is empty (that is, they no contain any element of  $P$  in its interior), and any given 2 elements in  $\Gamma$  its interiors are disjoint intersecting them in at most one edge. It is known that if  $P$  has  $n$  elements, then there exists a convex decomposition of  $P$  with at most  $\frac{7n}{5}$  elements. In this work we give a procedure to find a specific convex decomposition of  $P$  with at most  $\frac{3n}{2}$  elements.

**Keywords:** Flipping edges in triangulations, convex decompositions, triangulations.

---

\*E-mail: lomeli@mixteco.utm.mx

Recibido: 07 de diciembre de 2013. Aceptado: 06 de agosto de 2014.

Para citar este artículo: M. Lomelí-Haro, V. Borja, J.A. Hernández, Una descomposición convexa, *Rev. Integr. Temas Mat.* 32 (2014), no. 2, 169-180.

## 1. Introducción

Comenzaremos con algunos antecedentes de este problema a manera de motivación. En 1931 Esther Klein probó que si tenemos un conjunto de cinco puntos en el plano, de manera que no haya tres de ellos en una misma línea recta, siempre podemos encontrar cuatro elementos que son los vértices de un cuadrilátero convexo.

Este problema lo planteó de manera más general: Dado un entero  $c \geq 4$ , ¿existe un número  $N(c)$  tal que en cualquier colección de puntos en el plano con al menos  $N(c)$  elementos, que no contenga 3 de ellos en una misma línea recta, siempre sea posible obtener un subconjunto de tamaño  $c$  formando el conjunto de vértices de un polígono convexo?

Este problema lo resuelven P. Erdős y G. Szekeres [4] de manera afirmativa con el siguiente resultado, conocido como el Teorema de Erdős-Szekeres:

**Teorema 1.1.** *Sea  $c \geq 4$  un entero. Entonces existe un natural  $N(c)$  tal que, en cualquier colección de puntos en el plano con al menos  $N(c)$  elementos, que no contenga 3 de ellos en una misma línea recta, siempre es posible seleccionar un subconjunto de tamaño  $c$  formando el conjunto de vértices de un polígono convexo.*

Este resultado ha sido muy estudiado por su belleza y por ser un gran reto encontrar el valor exacto de  $N(c)$ . Han pasado más de 60 años sin que se haya logrado un avance substancial. Hasta ahora lo que se sabe es que existe una constante  $\alpha$  tal que:

$$2^c \leq N(c) \leq \alpha 4^c.$$

La cota inferior es del mismo artículo [4], mientras que la cota superior la obtienen G. Thot y P. Valter [13]. Para otra demostración del Teorema de Erdős-Szekeres referiremos al lector al libro de M. Boná [2].

Cabe aclarar que el polígono que nos garantiza el Teorema de Erdős-Szekeres puede contener algunos elementos de la colección en su interior. Así, si tenemos un conjunto de puntos  $P$  y un polígono  $\gamma$ , diremos que  $\gamma$  es *vacío* si no contiene ningún elemento de  $P$  en su interior.

### 1.1. Polígonos convexos vacíos

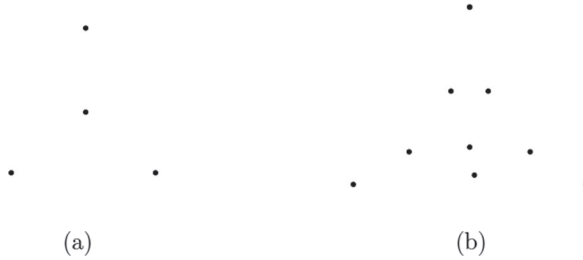
Desde luego, también podemos plantear el siguiente problema: Sea  $c \geq 3$  un entero. ¿Existe un número  $H(c)$  tal que en cualquier colección de al menos  $H(c)$  puntos sea posible seleccionar  $c$  de ellos formando un polígono convexo vacío?

Trivialmente tenemos que  $H(3) = 3$ . Como podemos encontrar colecciones de 4 puntos sin que formen un cuadrilátero convexo,  $H(4) \geq 5$  (véase la Figura 1 (a)). Dado que el cuadrilátero que nos garantiza el resultado de Esther Klein puede ser vacío,  $H(4) = 5$ .

En la Figura 1(b) vemos una colección de 9 puntos donde no hay pentágonos convexos, indicando esto que  $H(5) \geq 10$ . H. Harbort [8] prueba que  $H(5) = 10$ .

M. Overmars [12] encuentra una familia de 29 puntos sin hexágonos, hasta que recientemente T. Gerken [7] prueba que  $H(6)$  existe, y que es a lo más 219. No se conoce el valor exacto de  $H(6)$ .

Por otro lado, J.D. Horton [9] da colecciones de puntos arbitrariamente grandes en las que no hay heptágonos convexos vacíos, ni heptágonos, ni octágonos, etc, mostrando que  $H(k)$  no existe para  $k \geq 7$ .

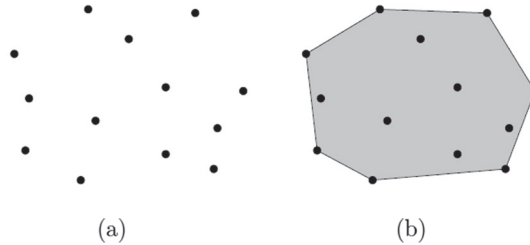


**Figura 1.** (a) Colección de 4 puntos sin cuadrilátero convexo, (b) colección de 9 puntos sin pentágono convexo.

Debido a la naturaleza de nuestro problema a estudiar, todas las colecciones de puntos bajo consideración estarán en el plano y en posición general, esto es, no tendrán 3 o más de sus elementos sobre una misma línea recta.

Tenemos la siguiente definición:

**Definición 1.2.** Sea  $P$  una colección de puntos. El *cierre convexo* de  $P$  es el polígono convexo más pequeño que contiene a  $P$ . Lo denotaremos como  $Conv(P)$ .



**Figura 2.** (a) Una colección de puntos  $P$  con 13 elementos y (b) su cierre convexo  $Conv(P)$ .

## 2. Descomposiciones convexas

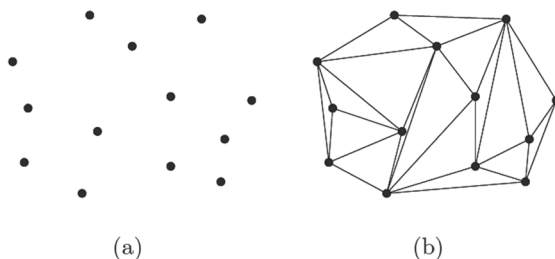
Estudiaremos la cantidad de polígonos convexos que podamos encontrar con vértices en una colección dada de puntos.

**Definición 2.1.** Dada una colección de puntos  $P$ , una *descomposición convexa*  $\Gamma$  de  $P$  es un conjunto de polígonos  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$  que cumplen lo siguiente:

- (C1) Los vértices de  $\gamma_i$  son elementos de  $P$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ .
- (C2) Todo  $\gamma_i$  es vacío.
- (C3) Para cualesquiera 2 diferentes  $\gamma_i, \gamma_j \in \Gamma$ , sus interiores son ajenos.
- (C4)  $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_m = Conv(P)$ .

De aquí en adelante  $P_n$  denotará una colección de  $n$  puntos y  $c$  el número de vértices en  $Conv(P_n)$ . Siempre con  $n \geq 5$  y  $c \geq 3$ .

Un ejemplo muy estudiado de descomposiciones convexas son las triangulaciones. Estas son descomposiciones convexas en las que cada uno de sus elementos es un triángulo. Véase la siguiente figura.

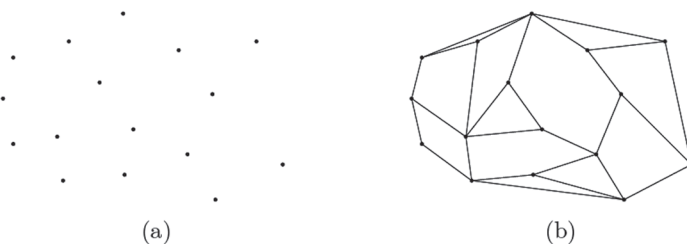


**Figura 3.** (a) Una colección  $P_{13}$  y (b) Una triangulación de  $P_{13}$ ; esta tiene  $2(13) - 7 - 2$  elementos.

Estamos interesados en encontrar descomposiciones convexas con el menor número de elementos posible. Se puede probar que toda triangulación de  $P_n$  tiene  $2n - c - 2$  elementos. Con esto, trivialmente obtenemos que toda descomposición convexa de cualquier  $P_n$  tendrá a lo más  $2n$  elementos.

Sea  $g(P_n) = \min\{|\Gamma| : \Gamma \text{ es una descomposición convexa de } P_n\}$ , y sea  $g(n)$  el máximo valor de  $g$  tomado de todas las colecciones de  $n$  puntos. Urrutia [14] conjeturó que

$g(n) \leq n+1$ , pero O. Aichholzer y Krasser [1] dan un conjunto  $Q$  de  $n$  puntos tal que cada descomposición convexa de  $Q$  tiene al menos  $n+2$  elementos. Posteriormente J. García-López y C. M. Nicolás [5] dan una colección de puntos  $P_n$  en la cual toda descomposición convexa tiene  $\frac{11n}{10}$  elementos. Con esto tenemos que  $g(n) \geq \frac{11n}{10}$ , que hasta ahora es la mejor cota inferior de  $g$ .



**Figura 4.** (a) Una colección  $P_{15}$  y (b) una descomposición convexa con 12 elementos.

En las Figuras 3(b) y 4(b) mostramos descomposiciones convexas.

V. Neumann, E. Rivera-Campo y J. Urrutia [11] prueban que para toda colección  $P_n$  siempre existe una descomposición convexa con a lo más  $\frac{10n}{7}$  elementos, cota que K. Hosono [10] mejora a  $\frac{7n}{5}$ . Así,

$$\frac{11n}{10} \leq g(n) \leq \frac{7n}{5}.$$

El objetivo principal de este trabajo es dar un algoritmo para obtener en  $P_n$  una descomposición convexa específica con a lo más  $\frac{3n}{2} - c$  elementos.

### 3. Obteniendo la descomposición convexa

Daremos 3 procedimientos que nos ayudarán a encontrar la descomposición convexa buscada. Etiquetaremos los elementos de  $P_n$  de la siguiente manera:

Llamaremos  $p_1 = (x_1, y_1)$  al elemento de  $P_n$  cuya coordenada en  $y$  sea la menor de todas. De haber dos con esta misma, rotaremos la colección de puntos para que no suceda esto.

Todo  $p \in P_n \setminus p_1$  será etiquetado con respecto al orden creciente del ángulo entre la recta  $y = x_1$  y el segmento de recta  $\overline{p_1 p}$ . Al elemento que haga el  $i$ -ésimo ángulo más pequeño lo llamaremos  $p_{i+1}$ . Ahora, para  $i = 3, 4, \dots, n - 1$ , si  $p_i$  está en el interior del triángulo  $Conv(\{p_1, p_{i-1}, p_{i+1}\})$ , le añadiremos la etiqueta “-”. De lo contrario, si  $p_i$  está en el exterior de  $Conv(\{p_1, p_{i-1}, p_{i+1}\})$ , llevará la etiqueta “+”. No llevarán esta etiqueta  $p_2$  y  $p_n$ . Véase la Figura 5(b).

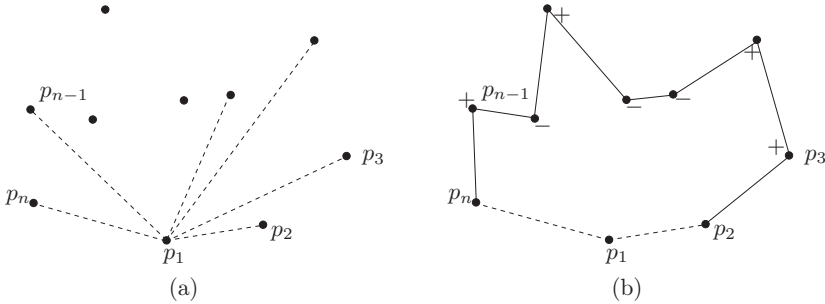


Figura 5. Etiquetación de los vértices.

En los algoritmos que daremos a continuación utilizaremos la notación de [3]. Correrán sobre la colección de puntos ya etiquetados, y  $\sigma(p_i)$  denotará el signo de  $p_i$ . Estudiaremos los bloques consecutivos de puntos, ya sea con etiqueta “+” ó “-”.

```

ENCONTRAR_ $A_i(P_n)$ {
 $k \leftarrow 1$ 
if  $\sigma(p_3) = +$  then  $A_k \leftarrow \{p_1, p_2\}$ 
if  $\sigma(p_3) = -$  then {
     $A_k \leftarrow \{p_1, p_2, p_3\}$ 
     $k \leftarrow k + 1$ 
}
for  $i \leftarrow 3$  to  $n - 2$  do {
    if  $\sigma(p_i) = +$  then {
         $A_k \leftarrow A_k \cup \{p_i\}$ 
    }
}
    
```

```

if  $\sigma(p_{i+1}) = -$  then {
     $A_k \leftarrow A_k \cup \{p_1, p_{i+1}\}$ 
     $k \leftarrow k + 1$ 
}
}
if ( $\sigma(p_i) = -$  and  $\sigma(p_{i+1}) = +$ ) then  $A_k \leftarrow A_k \cup \{p_i\}$ 
}
if ( $\sigma(p_{n-1}) = +$ ) then  $A_k \leftarrow A_k \cup \{p_1, p_{n-1}, p_n\}$ 
if ( $\sigma(p_{n-1}) = -$ ) then {
     $k \leftarrow k + 1$ 
     $A_k \leftarrow \{p_1, p_{n-1}, p_n\}$ 
}
}
return  $k$ 
}
    
```

En la siguiente figura ilustramos cómo funciona el procedimiento.

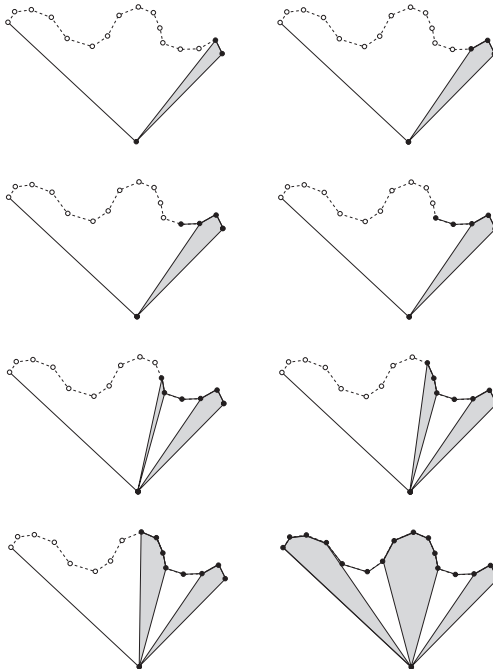


Figura 6. Algoritmo ENCONTRAR\_  $A_i$  corriendo sobre una colección  $P_{17}$ .

Con un algoritmo semejante pero más simple encontraremos las colecciones  $B_i$ .

```

ENCONTRAR_ $B_i(P_n)$ {
 $k \leftarrow 1$ 
if  $\sigma(p_3) = -$  then  $B_k \leftarrow \{p_2\}$ 
for  $i \leftarrow 3$  to  $n - 2$  do {
  if  $\sigma(p_i) = -$  then {
     $B_k \leftarrow B_k \cup \{p_i\}$ 
    if  $\sigma(p_{i+1}) = +$  then {
       $B_k \leftarrow B_k \cup \{p_{i+1}\}$ 
       $k \leftarrow k + 1$ 
    }
  }
}
if  $(\sigma(p_i) = +$  and  $\sigma(p_{i+1}) = -)$  then {
   $B_k \leftarrow B_k \cup \{p_i\}$ 
}
if  $\sigma(p_{n-1}) = -$  then  $B_k \leftarrow B_k \cup \{p_{n-1}, p_n\}$ 
}
}

```

Con el siguiente procedimiento obtendremos triángulos con vértices consecutivos de etiqueta “-” compartiendo el vértice  $p_1$ :

```

TRIÁNGULOS_ $\Delta_B$ {
 $\Delta_B \leftarrow \emptyset$ 
  for  $i \leftarrow 3$  to  $n - 2$  do {
    if  $(\sigma(p_i) = -$  and  $\sigma(p_{i+1}) = -)$  then  $\Delta_B \leftarrow \Delta_B \cup \{p_i, p_{i+1}, p_1\}$ 
  }
}

```

En la Figura 7 mostramos la colección  $P_{17}$  de las Figuras 6 y 7 después de haber ejecutado los procedimientos ENCONTRAR\_ $A_i$ , ENCONTRAR\_ $B_i$  y TRIÁNGULOS\_ $B$ .

Sea  $A$  el conjunto de vértices de etiqueta “+”. Le llamaremos  $\mathcal{L}$  al polígono con vértices  $A \cup \{p_1, p_2, p_n\}$ , y le llamaremos  $\mathcal{U}$  a la cerradura de la región (o regiones)  $Conv(P_n) \setminus \mathcal{L}$ . En la Figura 8 las regiones en blanco serán  $\mathcal{U}$ , y en la Figura 9 la región sombreada.

Agregaremos aristas de tal manera que cada región en  $\mathcal{U}$  quede dividida en triángulos.

Obtendremos una descomposición convexa  $\Gamma$  con el procedimiento:

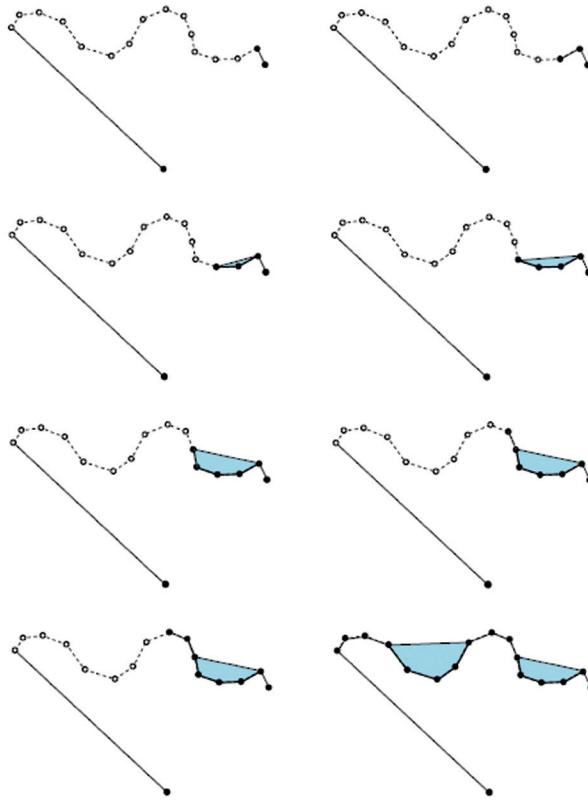


Figura 7. Algoritmo ENCONTRAR  $B_i$  corriendo sobre una colección  $P_{17}$ .

ENCONTRAR  $\Gamma(P_n)$  {

ENCONTRAR  $A_i(P_n)$

ENCONTRAR  $B_i(P_n)$

TRIÁNGULOS  $\Delta B(P_n)$

Agregar tantas aristas (con su interior en  $\mathcal{U}$ ) como sea posible.

}

Demostraremos que si  $P_n$  tiene  $c$  vértices en  $Conv(P_n)$ , entonces  $|\Gamma| = n + k - c$ .

**Lema 3.1.** Sea  $P_n$  una colección con 3 vértices en su cierre convexo, y  $k$  el número de polígonos obtenidos con el procedimiento ENCONTRAR  $A_i$ . Entonces la descomposición convexa  $\Gamma$  de  $P_n$  obtenida de aplicar ENCONTRAR  $\Gamma$  es tal que

$$|\Gamma| \leq n + k - 3.$$

*Demostración.* Sea  $P_n$  una colección de puntos en posición general, con 3 vértices



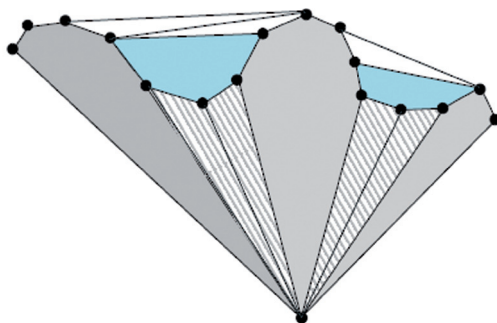


Figura 8. Descomposición convexa resultante de aplicar los algoritmos descritos.

en  $Conv(P_n)$ , sea  $k$  el número de conjuntos  $A_i$  obtenidos por el procedimiento ENCONTRAR\_ $A_i$ , y sea  $\Gamma$  la descomposición convexa inducida por ENCONTRAR\_ $\Gamma$ .

Tenemos los siguientes hechos

1. En el procedimiento TRIÁNGULOS\_ $\Delta_B$  cada  $B_i$  genera  $|B_i| - 3$  triángulos (compartiendo  $p_1$ ).
2. El número de aristas añadidas en la línea 4 de ENCONTRAR\_ $\Gamma$  será  $|A \cup \{p_2, p_n\}| - 3$ , generando  $|A \cup \{p_2, p_n\}| - 2$  triángulos.
3. Dado que cada  $A_i$  está compuesto por  $|A_i| - 3$  vértices de etiqueta "+",  $|A| = |A_1| - 3 + |A_2| - 3 + \dots + |A_k| - 3$ .
4. Dado que cada  $B_i$  está formado por  $|B_i| - 2$  vértices de etiqueta "-",  $|B| = |B_1| - 2 + |B_2| - 2 + \dots + |B_{k-1}| - 2$ .
5. Como cada elemento en el interior de  $Conv(P_n)$  tiene etiqueta "+" o etiqueta "-", tenemos que la suma  $|A_1| - 3 + |A_2| - 3 + \dots + |A_k| - 3 + |B_1| - 2 + |B_2| - 2 + \dots + |B_{k-1}| - 2 = n - 3$ .

Considerando los  $k$  polígonos obtenidos con ENCONTRAR\_ $A_i$  y los  $k - 1$  obtenidos con ENCONTRAR\_ $B_i$ , y usando los hechos 1, 2, 3 y 4, encontramos que  $\Gamma$ , la descomposición convexa de  $P_n$  obtenida con ENCONTRAR\_ $\Gamma$ , cumple

$$|\Gamma| \leq k + (k - 1) + |B_1| - 3 + |B_2| - 3 + \dots + |B_{k-1}| - 3 + |A_1| - 3 + |A_2| - 3 + \dots + |A_k| - 3.$$

Usando el hecho 5 en la ecuación anterior, tenemos que

$$|\Gamma| \leq k + (k - 1) + n - 3 - (k - 1) = n + k - 3. \quad \square$$

Con ayuda de este lema demostraremos que  $|\Gamma| \leq n + k - c$ , donde  $c \geq 3$  es el número de vértices en  $Conv(P_n)$ .

**Teorema 3.2.** Sea  $P_n$  una colección tal que  $Conv(P_n)$  tiene  $c \geq 3$  vértices, y sea  $k$  el número de conjuntos  $A_i$  obtenidos con el procedimiento ENCONTRAR\_ $A_i$ . Entonces la descomposición convexa  $\Gamma$  de  $P_n$  obtenida al aplicar ENCONTRAR\_ $\Gamma$  cumple

$$|\Gamma| \leq \frac{3n}{2} - c.$$

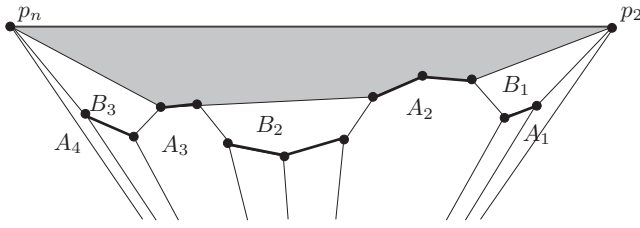


Figura 9. Colección  $P_n$  sin aristas en  $\mathcal{U}$ .

*Demostración.* Sea  $P_n$  una colección de puntos en posición general, con  $c$  vértices en  $\text{Conv}(P_n)$ , sea  $k$  el número de conjuntos  $A_i$  obtenidos por el procedimiento ENCONTRAR\_  $A_i$ , y sea  $\Gamma$  la descomposición convexa inducida por ENCONTRAR\_  $\Gamma$ .

**Observación 1.**  $k$  alcanza el valor máximo,  $\frac{n}{2}$ , cuando  $n$  es par y  $p_i$  tiene etiqueta “-”, para  $i = 3, 5, 7, \dots, n - 1$ , y  $p_j$  tiene etiqueta “+”,  $j = 4, 6, \dots, n - 2$ .

Probaremos nuestro resultado por inducción sobre  $c$ . El caso base será  $c = 3$ ; por el lema anterior,  $|\Gamma| \leq n + k - c$ , y por la Observación 1,

$$|\Gamma| = n + k - c \leq n + \frac{n}{2} - c = \frac{3n}{2} - c.$$

Supongamos que el resultado se cumple para todo  $c \geq 3$ . Probaremos que también se cumple para  $c + 1$ . Sea  $P_n$  una colección de  $n$  puntos con  $c + 1$  en su cierre convexo y  $\Gamma$  la descomposición convexa obtenida de haber aplicado el procedimiento ENCONTRAR\_  $\Gamma$ . Etiquetaremos los vértices de  $\text{Conv}(P_n)$  en el sentido contrario de las manecillas del reloj de manera que  $q_1 = p_1, q_2 = p_2, \dots, q_{c+1} = p_n$ . Haremos  $R = P_n \cap \text{Conv}(\{q_1, q_c, q_{c+1}\})$  y  $P = (P_n \setminus R) \cup \{q_1, q_c\}$ .

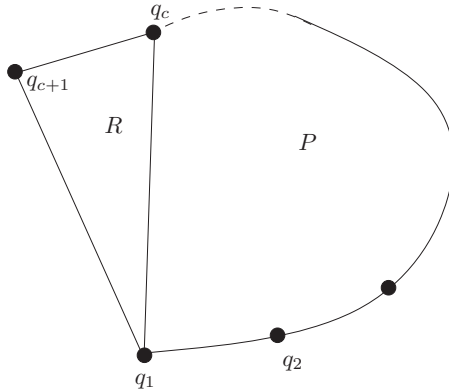


Figura 10.  $P_n$  con  $P$  y  $R$ .

Sea  $A_q$  el  $A_i$  tal que  $q_c \in A_q$ , y sea  $\gamma$  el polígono inducido por  $A_q$ . Diremos que en  $P$  hay  $q$  conjuntos  $A_i$  y haremos  $\gamma_P = P \cap \gamma$ . En cuanto a  $R$ , tenemos que hay  $k - q + 1$  conjuntos  $A_i$  y haremos  $\gamma_R = R \cap \gamma$  (véase la Figura 11).

Sean  $\Gamma_P$  y  $\Gamma_R$  las descomposiciones convexas de  $P$  y  $R$  respectivamente. Observemos que

$$\Gamma = (\Gamma_P \setminus \gamma_P) \cup (\Gamma_R \setminus \gamma_R) \cup \gamma.$$

Así  $|\Gamma| = (|\Gamma_P| - 1) + (|\Gamma_R| - 1) + 1$ . Aplicando inducción en  $P$  y  $R$ , tenemos que  $|\Gamma| = (|P| + q - c) - 1 + (|R| + (k - q + 1) - 3) - 1 + 1$ . Simplificando, y tomando en cuenta que  $|P| + |R| = n + 2$ , tenemos que  $|\Gamma| = n + 2 + q - c + k - q - 3 = n + k - c - 1$ .

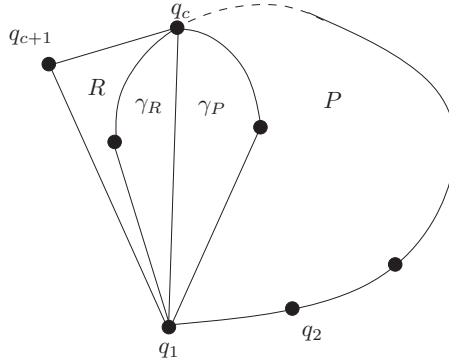


Figura 11.  $P, R$  y  $\gamma = \gamma_P \cup \gamma_R$ .

Finalmente, por la Observación 1 tenemos que si  $P_n$  tiene  $c + 1$  vértices en  $Conv(P_n)$  entonces  $|\Gamma| \leq \frac{3n}{2} - (c + 1)$ .

Con esto probamos que para toda colección  $P_n$  con  $c$  elementos en  $Conv(P_n)$  el procedimiento ENCONTRAR\_Γ arroja una descomposición convexa  $\Gamma$ , donde

$$|\Gamma| \leq \frac{3n}{2} - c. \quad \square$$

Este resultado es importante, ya que encontramos una descomposición convexa específica de  $P_n$  de las cuales, hasta ahora, por [11], se sabía únicamente de su existencia.

#### 4. Conclusiones

Hemos dado un algoritmo para encontrar una descomposición convexa específica de una colección de puntos en el plano en posición general. Queremos mejorar la cotas de K. Hosono [10] o al menos igualarla. Daremos las siguientes definiciones para plantear una idea.

**Definición 4.1.** Sea  $T$  una triangulación de  $P_n$  y  $e$  una arista en  $T$ . Si  $e$  es la arista común a dos triángulos cuya unión es un cuadrilátero convexo  $Q$ , entonces llamaremos a  $e$  *arista girable*. Girar  $e$  es borrarla y reemplazarla por la otra diagonal de  $Q$ .

**Definición 4.2.** Sean  $e$  y  $e'$  dos aristas girables en una triangulación  $T$ , y sean  $Q$  y  $Q'$  los cuadriláteros que las contienen respectivamente. Diremos que  $e$  y  $e'$  son *girables simultáneamente* si los interiores de  $Q$  y  $Q'$  son ajenos.

Inicialmente intentamos remover aristas girables simultáneamente. J. Galtier, F. Hurtado, M. Noy, S. Perennes y J. Urrutia [6] prueban que el número de aristas es al menos  $\frac{n}{6}$ . Al removerlas obtenemos una descomposición convexa con  $\frac{5n}{3} - c - 2$  triángulos y  $\frac{n}{6}$  cuadriláteros, es decir  $\frac{11n}{6} - c - 2$  elementos. Podemos aplicar este razonamiento a  $\mathcal{U}$ , pero no tenemos con certeza la cardinalidad del número de triángulos en esta región.

## Referencias

- [1] Aichholzer O. and Krasser H., “The point set order type data base: A collection of applications and results”, in *Proc. 13th Canadian Conference on Computational Geometry*, Waterloo, Ontario, Canada, (2001), 17-20.
- [2] Boná M., *A Walk Through Combinatorics. An Introduction to Enumeration and Graph Theory*, World Scientific, 2006.
- [3] Cormen T., Leiserson C.E., Rivest R.L. and Stein C., *Introduction to Algorithms*, McGraw-Hill, Boston, 2001.
- [4] Erdős P. and Szekeres G., “A combinatorial problem in geometry”, *Compositio Math.* 2 (1935), 463-470.
- [5] García-López J. and Nicolás C., “Planar point sets with large minimum convex partitions”, in *Proc. 22nd Euro. Workshop on Comput. Geom.*, Delphi, Greece, (2006), 51-54.
- [6] Galtier J., Hurtado F., Noy M., Pérennes S. and Urrutia J., “Simultaneous Edge Flipping in Triangulations”, *Internat. J. Comput. Geom. Appl.* 13 (2003), no. 2, 113-133.
- [7] Gerken T., “Empty convex hexagons in planar point sets”, *Discrete Comput. Geom.* 39 (2008), no. 1-3, 239-272.
- [8] Harborth H., “Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen”, *Elem. Math.* 33 (1978), no. 5, 116-118.
- [9] Horton J.D., “Sets with no empty convex 7-gons”, *Canad. Math. Bull.* 26 (1983), no. 4, 482-484.
- [10] Hosono K., “On convex decompositions of a planar point set”, *Discrete Math.* 309 (2009), no. 6, 1714-1717.
- [11] Neumann V., Rivera-Campo E. and Urrutia J., “A note on convex decompositions of a set of points in the plane”, *Graphs Combin.* 20 (2004), no. 2, 223-231.
- [12] Overmars M., *Finding sets of points without empty convex 6-gons*, *Discrete Comput. Geom.* 29 (2003), 153-158.
- [13] Tóth G. and Valtr P., “Note on the Erdős-Szekeres theorem”, *Discrete Comput. Geom.* 19 (1998), no. 3, 457-459.
- [14] Urrutia J., “Open-problem session”, in *10th Canadian Conference on Computational Geometry*, Montreal, Canada, (1998).