

Distribución de probabilidad de Maxwell transmutada

YURI A. IRIARTE*, JUAN M. ASTORGA

Universidad de Atacama, Instituto Tecnológico, Copiapó, Chile.

Resumen. En este artículo introducimos una extensión de la distribución de probabilidad de Maxwell. Esta extensión se genera utilizando el mapa de transmutación de rango cuadrático, estudiado por Shaw y Buckley en [13], considerando como función base la función de distribución acumulada del modelo de Maxwell. Estudiamos propiedades probabilísticas, realizamos inferencia estadística y estudiamos una aplicación con datos reales.

Palabras clave: Distribución de Maxwell, distribución de Maxwell transmutada, mapa de transmutación de rango cuadrático.

Transmuted Maxwell probability distribution

Abstract. In this paper we introduce an extension of the Maxwell probability distribution. This extension is generated using the quadratic rank transmutation map studied by Shaw and Buckley in [13], considering as the basis function the cumulative distribution function of the Maxwell model. We study probabilistic properties, we perform statistical inference and study an application with real data.

Keywords: Maxwell distribution, transmuted Maxwell distribution, quadratic rank transmutation map.

1. Introducción

La distribución de Maxwell es ampliamente utilizada en la mecánica estadística como una función de densidad de la magnitud de las velocidades de las moléculas de gas. Si X es la magnitud de la velocidad de una molécula (seleccionada al azar) de un gas encerrado en un contenedor, bajo el supuesto de que el gas no fluye y que la presión en el gas es la misma en todas las direcciones, entonces la variable X sigue una distribución de Maxwell de velocidades, denotada como $X \sim M(\theta)$, y queda especificada por la función de densidad de probabilidad

*E-mail: yuri.iriarte@uda.cl

Recibido: 29 de enero de 2014, Aceptado: 09 de julio de 2014.

Para citar este artículo: Y.A. Iriarte, J.M. Astorga, Distribución de probabilidad de Maxwell transmutada, *Rev. Integr. Temas Mat.* 32 (2014), no. 2, 211-221.

$$f_X(x; \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta^{3/2} x^2 e^{-\frac{\theta}{2} x^2}, \quad (1)$$

donde $x > 0$ y $\theta > 0$ es un parámetro de escala.

La función de distribución acumulada de una variable aleatoria $X \sim M(\theta)$ está dada por

$$F_X(x; \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta^{3/2} \int_0^x t^2 e^{-\frac{\theta}{2} t^2} dt.$$

Considerando el cambio de variable $u = \frac{\theta}{2} x^2$, la función de distribución acumulada del modelo de Maxwell puede ser escrita en términos de la función de distribución acumulada del modelo Gamma, como

$$F_X(x; \theta) = \int_0^{\frac{\theta}{2} x^2} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} u^{\frac{3}{2}-1} e^{-u} du. \quad (2)$$

Tyagi y Bhattacharya [14] obtienen el estimador insesgado de varianza mínima y el estimador de Bayes para el parámetro de escala del modelo de Maxwell; además, calculan la función de confiabilidad de este modelo. Chaturvedi y Rani [5] generalizan el modelo de Maxwell y obtienen estimadores clásicos y bayesianos para este modelo. Bekker y Roux [4] realizan un estudio de confiabilidad basado en la distribución de Maxwell. Shakil et al. [12] estudian la distribución del producto y del cociente de variables aleatorias de Maxwell. Kazmi et al. [7] obtienen estimadores bayesianos para los parámetros de la distribución de una mezcla de variables aleatorias de Maxwell.

Por otra parte, al revisar la literatura estadística resultan evidentes los esfuerzos que han realizado diversos investigadores por extender o generalizar distribuciones de probabilidad estándar. Estos esfuerzos han permitido flexibilizar en términos de forma, de asimetría y de curtosis, variados modelos probabilísticos estándar, entre ellos el modelo de Maxwell, posibilitando mejorar los análisis estadísticos realizados en diferentes áreas aplicadas. En este contexto, Shaw y Buckley [13] estudian el mapa de transmutación de rango cuadrático e introducen una clase de distribuciones denominadas distribuciones transmutadas. Una variable aleatoria X sigue una distribución transmutada si su función de distribución acumulada está dada por

$$F(x) = (1 + \lambda)G(x) - \lambda G(x)^2, \quad |\lambda| \leq 1, \quad (3)$$

donde $G(x)$ es la función de distribución acumulada de la distribución base. Se puede observar que cuando $\lambda = 0$ se obtiene la distribución de la variable aleatoria base. Esta clase de distribuciones tiene como característica principal ser más flexible en términos de asimetría y curtosis que las distribuciones base, siendo un aporte importante a la modelización estadística. Aryal y Tsokos [2] utilizan la familia de distribuciones transmutadas para introducir la distribución de Gumbel Transmutada. Aryal y Tsokos [3] utilizan la familia de distribuciones transmutadas para introducir la distribución de Weibull Transmutada. Merovci [8] utiliza la familia de distribuciones transmutadas para introducir la distribución de Rayleigh Transmutada. Merovci [9] utiliza la familia de distribuciones transmutadas para introducir la distribución de Rayleigh generalizada Transmutada.

Este artículo es motivado por el trabajo de Shaw y Buckley [13]; nosotros utilizamos la familia de distribuciones transmutadas para introducir una extensión de la distribución de Maxwell a la que llamamos la distribución de Maxwell transmutada. Específicamente, generamos la función de distribución acumulada de la distribución de Maxwell transmutada considerando en la expresión (3) la función de distribución acumulada del modelo de Maxwell como función base. El resultado es una distribución de dos parámetros más flexible en términos de asimetría y curtosis que el modelo de Maxwell estándar. Esta característica permite proponer a la distribución de Maxwell transmutada como un modelo alternativo del modelo de Maxwell. Si bien la extensión favorece la posibilidad de mejorar el ajuste de fenómenos aleatorios donde el modelo de Maxwell es comúnmente utilizado, también podría ser apropiada su utilización para la modelización de fenómenos aleatorios en la cual el modelo de Maxwell no es muy utilizado debido a que otros modelos presentan un mejor desempeño.

El artículo se desarrolla de la siguiente manera. En la Sección 2 estudiamos características generales de la distribución de Maxwell transmutada. En la Sección 3 realizamos inferencia estadística con el nuevo modelo. En la Sección 4 realizamos un estudio de simulación. En la Sección 5 estudiamos una aplicación con datos reales. En la Sección 6 entregamos algunas conclusiones.

2. Distribución de Maxwell transmutada

En esta sección utilizamos las expresiones (2) y (3) para generar la función de distribución acumulada del modelo de Maxwell transmutado. La expresión resultante es derivada para obtener la función de densidad de Maxwell transmutada, y posteriormente calcular los momentos, esperanza, varianza y coeficientes de asimetría y curtosis.

2.1. Función de distribución y función de densidad

Definición 2.1. Diremos que X sigue una distribución de Maxwell transmutada de parámetros θ y λ , que denotaremos como $X \sim TM(\theta, \lambda)$, si su función de distribución acumulada está dada por

$$F_X(x; \theta, \lambda) = (1 + \lambda)G\left(\frac{\theta x^2}{2}; \frac{3}{2}, 1\right) - \lambda G\left(\frac{\theta x^2}{2}; \frac{3}{2}, 1\right)^2, \quad (4)$$

y su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f_X(x; \theta, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta^{3/2} x^2 e^{-\frac{\theta}{2} x^2} \left[1 + \lambda - 2\lambda G\left(\frac{\theta x^2}{2}; \frac{3}{2}, 1\right) \right], \quad (5)$$

donde $x > 0$, $\theta > 0$ y $|\lambda| \leq 1$, y $G(x; \alpha, \beta) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt$ es la función de distribución acumulada del modelo Gamma.

Observación 2.2. Nótese que la distribución de Maxwell puede ser obtenida como caso particular de la distribución de Maxwell transmutada, específicamente cuando $\lambda = 0$. La Figura 1 muestra algunas formas que puede tomar la función de densidad de Maxwell transmutada para diferentes valores de los parámetros θ y λ . De la figura se puede

observar que la distribución de Maxwell transmitada es más flexible en términos de asimetría que el modelo de Maxwell estándar, lo cual se debe al funcionamiento del parámetro λ .

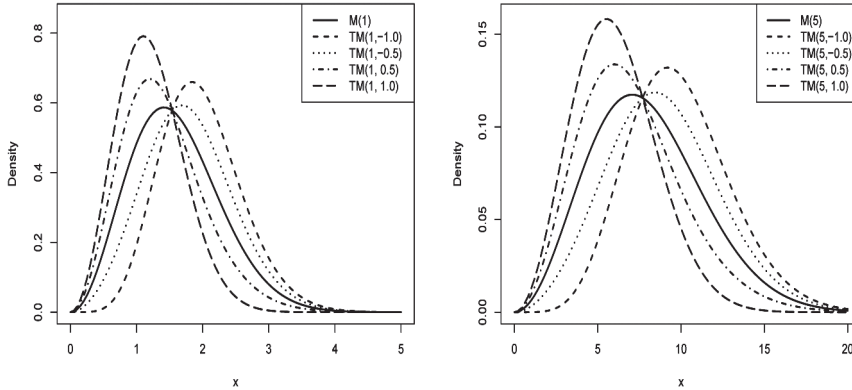


Figura 1. Gráfica de la función de densidad de Maxwell transmitada para distintos valores de θ y λ .

2.2. Momentos

Proposición 2.3. Si $X \sim TM(\theta, \lambda)$, entonces para $r = 1, 2, \dots$ se tiene que el r -ésimo momento está dado por

$$\mu_r = E(X^r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\theta}\right)^{r/2} a_r, \tag{6}$$

donde $a_r = (1 + \lambda)\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right) - 2\lambda I(r)$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u} du$ es la función gamma, $I(r) = \int_0^\infty u^{\frac{r+1}{2}}e^{-u}G(u, 3/2, 1) du$ y $G(u, \alpha, \theta) = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}u^{\alpha-1}e^{-\beta u} du$ es la función de distribución acumulada del modelo Gamma.

Demostración. Utilizando la definición de momentos, el r -ésimo momento de la variable aleatoria $X \sim TM(\theta, \lambda)$ está dado por

$$\mu_r = \int_0^\infty x^r \sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta^{3/2} x^2 e^{-\frac{\theta}{2}x^2} \left(1 + \lambda - 2\lambda G\left(\frac{\theta x^2}{2}; \frac{3}{2}, 1\right)\right) dx;$$

realizando el cambio de variable $u = \frac{\theta}{2}x^2$, se obtiene que

$$\mu_r = E(X^r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\theta}\right)^{r/2} \left((1 + \lambda)\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right) - 2\lambda I(r)\right);$$

finalmente, considerando $a_r = (1 + \lambda)\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right) - 2\lambda I(r)$ se obtiene el resultado. ☑

Observación 2.4. Para el cálculo de la esperanza, la varianza y los coeficientes de asimetría y curtosis, determinamos las expresiones analíticas de los primeros cuatro momentos distribucionales del modelo de Maxwell transmutado; para ello calculamos los valores que toma la función $I(r)$ cuando $r = 1, 2, 3, 4$, utilizando procedimientos numéricos. El Cuadro 1 muestra las expresiones analíticas de los primeros cuatro momentos distribucionales del modelo de Maxwell transmutados y los valores que toma la función $I(r)$ cuando $r = 1, 2, 3, 4$.

Cuadro 1. Cuatro primeros momentos distribucionales del modelo de Maxwell transmutado y valores que toma la función $I(r)$ cuando $r = 1, 2, 3, 4$.

r	$E(X^r)$	$I(r)$
1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\theta}\right)^{1/2} a_1$	0,6187184
2	$\frac{4}{\sqrt{\pi}\theta} a_2$	0,9467650
3	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\theta}\right)^{3/2} a_3$	1,5688932
4	$\frac{8}{\sqrt{\pi}\theta^2} a_4$	2,7900547

Corolario 2.5. Si $X \sim TM(\theta, \lambda)$, entonces la esperanza $E(X)$ y la varianza $Var(X)$ están dados, respectivamente, por

$$E(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\theta}\right)^{1/2} a_1 \tag{7}$$

y

$$Var(X) = \frac{4}{\sqrt{\pi}\theta} \left(a_2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} a_1^2\right). \tag{8}$$

Corolario 2.6. Si $X \sim TM(\theta, \lambda)$, entonces los coeficientes de asimetría ($\sqrt{\beta_1}$) y curtosis(β_2) son respectivamente

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\sqrt{2}\pi^{1/4} \left(\frac{1}{2}a_3 - \frac{3}{\sqrt{\pi}}a_1a_2 + \frac{4}{\pi}a_1^3\right)}{\left(a_2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}a_1^2\right)^{3/2}} \tag{9}$$

y

$$\beta_2 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \left(a_4 - \frac{8}{\sqrt{\pi}}a_1a_3 + \frac{24}{\pi}a_1^2a_2 - \frac{24}{\pi^{3/2}}a_1^4\right)}{\left(a_2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}a_1^2\right)^2}. \tag{10}$$

Observación 2.7. La Figura 2 muestra las gráficas de los coeficientes de asimetría y curtosis de la distribución de Maxwell transmutada. En la figura se puede observar que el modelo de Maxwell transmutado es más flexible en términos de asimetría y curtosis que el modelo de Maxwell. Cuando $\lambda = 0$ los coeficientes de asimetría y curtosis de la distribución de Maxwell transmutada toman los valores $\frac{2\sqrt{2}(16-5\pi)}{(3\pi-8)^{3/2}}$ y $\frac{15\pi^2+16\pi-192}{(3\pi-8)^2}$, respectivamente, que son los coeficientes de asimetría y curtosis de la distribución de Maxwell.

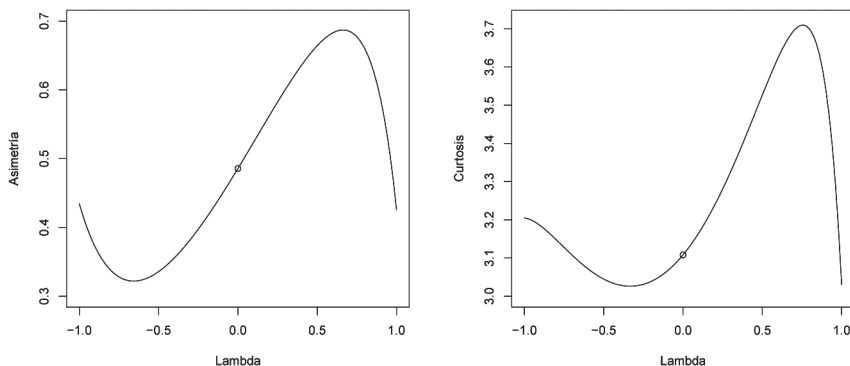


Figura 2. Gráficas de los coeficientes de asimetría y curtosis de los modelos de Maxwell y de Maxwell transmutado. Parte izquierda: la línea sólida representa la asimetría del modelo de Maxwell transmutado, y el punto representa la asimetría del modelo de Maxwell. Parte derecha: la línea sólida representa la curtosis del modelo de Maxwell transmutado, y el punto representa la curtosis del modelo de Maxwell.

3. Inferencia

En esta sección estudiamos los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud para los parámetros θ y λ de la distribución de Maxwell transmutada.

Proposición 3.1. Si X_1, \dots, X_n es una muestra aleatoria de una distribución de la variable aleatoria $X \sim TM(\theta, \lambda)$, entonces los estimadores de momentos de $\theta = (\theta, \lambda)$ son

$$\hat{\theta}_M = \frac{4}{\sqrt{\pi \bar{X}^2}} a_2 \quad (11)$$

y

$$\frac{2\bar{X}^2}{\bar{X}} a_1^2 - a_2 = 0, \quad (12)$$

donde \bar{X} es la media muestral, \bar{X}^2 es la media muestral de las observaciones al cuadrado, con a_1 y a_2 según se definen en la Proposición 2.3.

Demostración. Utilizando (6) se tiene que

$$E(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\theta}\right)^{1/2} a_1 \quad \text{y} \quad E(X^2) = \frac{4}{\sqrt{\pi}\theta} a_2,$$

y luego, sustituyendo $E(X)$ por \bar{X} y $E(X^2)$ por \bar{X}^2 , se obtiene un sistema de ecuaciones dos por dos. Despejando θ de cada ecuación se obtiene

$$\theta = \frac{8}{\pi \bar{X}^2} a_1^2 \quad (\text{a}) \quad \text{y} \quad \theta = \frac{4}{\sqrt{\pi} \bar{X}^2} a_2 \quad (\text{b}). \quad (13)$$

La ecuación (13b) corresponde al resultado mostrado en (12); finalmente, igualando las expresiones (13a) y (13b) se obtiene el resultado mostrado en (11). \square

3.3. Estimadores de máxima verosimilitud

Para una muestra aleatoria X_1, \dots, X_n que proviene de la distribución $TM(\theta, \lambda)$, la función log-verosimilitud puede ser escrita como:

$$\log L(\theta, \lambda) = \frac{n}{2} \log\left(\frac{2}{\pi}\right) + \frac{3n}{2} \log(\theta) + 2 \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \frac{\theta}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda - 2\lambda F(x; \theta)). \tag{14}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de máxima verosimilitud son dadas por

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^n \frac{F_1(x_i; \theta)}{1 + \lambda - 2\lambda F(x_i; \theta)} = \frac{3n}{2\theta}, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{F(x_i; \theta)}{1 + \lambda - 2\lambda F(x_i; \theta)} = 0, \tag{16}$$

donde $F(x; \theta)$ es la función de distribución de Maxwell y $F_1(x; \theta) = \frac{d}{d\theta} F(x; \theta)$. Sin embargo, las ecuaciones (15) y (16) no conducen a soluciones analíticas explícitas para las estimaciones de los parámetros del modelo. Por lo general, es más conveniente utilizar algoritmos de optimización no lineales, tales como el algoritmo cuasi-Newton para maximizar numéricamente la función de log-verosimilitud dada en (14). Por ejemplo, el programa R [10] posee la librería de optimización no lineal `optim` para resolver estos problemas.

Observación 3.2. Para el cálculo de los estimadores de máxima verosimilitud utilizando la librería `optim`, es conveniente usar como valores iniciales los estimadores de momentos de la distribución de Maxwell transmutada. Otra alternativa es, si ya se conoce el estimador de máxima verosimilitud de la distribución de Maxwell, considerar dicho estimador como valor inicial teniendo en cuenta $\lambda = 0$.

3.4. Matriz de información

En esta subsección discutimos la matriz de información observada de la distribución de Maxwell transmutada.

Si $X \sim TM(\theta, \lambda)$, entonces la matriz de información observada está dada por

$$I_n(\theta, \lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{3n}{2\theta^2} - 2\lambda G_\theta(x_i) & -2 \sum_{i=1}^n \frac{F_1(x_i; \theta)}{1 + \lambda - 2\lambda F(x_i; \theta)} - 2\lambda G_\lambda(x_i) \\ -2G_\theta(x_i) & -2G_\lambda(x_i) \end{pmatrix},$$

donde $G_\nu(x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{d\nu} \frac{F(x_i; \theta)}{1 + \lambda - 2\lambda F(x_i; \theta)}$, $\nu = \theta, \lambda$ con F y F_1 dadas en la subsección anterior.

4. Estudio de simulación

En esta sección se realiza un estudio de simulación para ilustrar el comportamiento de los estimadores MLE de los parámetros θ y λ . Generamos 1000 muestras aleatorias de

tamaños $n = 50$, $n = 100$ y $n = 200$ desde la distribución $TM(\theta, \lambda)$ para valores fijos de los parámetros. Los números aleatorios $X \sim TM(\theta, \lambda)$ pueden ser generados computando

$$X = F^{-1} \left(\frac{1 + \lambda - \sqrt{(1 + \lambda)^2 - 4\lambda U}}{2\lambda} \right), \tag{17}$$

donde $U \sim u(0, 1)$ y F^{-1} es la función de los cuantiles de la distribución de Maxwell. Los estimadores se pueden obtener utilizando la librería `optim` que utiliza el método L-BFGS-B en el paquete estadístico R [10]. Las medias y las desviaciones estándar empíricas se presentan en Cuadro 2; aquí se puede observar que las medias empíricas son cercanas a los verdaderos valores de los parámetros y las desviaciones estándar son pequeñas; esto se hace más evidente a medida que el tamaño muestral aumenta.

Cuadro 2. Estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros θ y λ de la distribución TM para muestras simuladas de tamaño 50, 100 y 200.

θ	λ	$n = 50$		$n = 100$		$n = 200$	
		$\hat{\theta}$ (SD)	$\hat{\lambda}$ (SD)	$\hat{\theta}$ (SD)	$\hat{\lambda}$ (SD)	$\hat{\theta}$ (SD)	$\hat{\lambda}$ (SD)
1,0	0,5	1,098 (0,26)	0,347 (0,45)	1,071 (0,22)	0,389 (0,40)	1,046 (0,18)	0,428 (0,32)
	0,01	1,044 (0,22)	-0,066 (0,43)	1,004 (0,17)	0,006 (0,36)	0,997 (0,14)	0,029 (0,30)
	-0,5	1,007 (0,15)	-0,488 (0,35)	0,997 (0,12)	-0,495 (0,28)	1,000 (0,07)	-0,497 (0,16)
2,0	-1,0	1,969 (0,18)	-0,940 (0,13)	1,977 (0,12)	-0,966 (0,06)	1,987 (0,09)	-0,975 (0,04)
	0,01	2,114 (0,46)	-0,084 (0,44)	2,016 (0,35)	0,008 (0,36)	1,967 (0,29)	0,051 (0,32)
	1,0	2,209 (0,42)	0,888 (0,23)	2,165 (0,37)	0,896 (0,21)	2,096 (0,27)	0,938 (0,16)
3,0	0,2	3,272 (0,74)	0,063 (0,43)	3,104 (0,57)	0,142 (0,36)	3,044 (0,50)	0,185 (0,32)
	0,5	3,270 (0,76)	0,351 (0,44)	3,183 (0,62)	0,399 (0,37)	3,145 (0,53)	0,420 (0,32)
	0,8	3,164 (0,64)	0,750 (0,29)	3,110 (0,58)	0,755 (0,27)	3,118 (0,49)	0,747 (0,24)

5. Aplicación

Las compañías eléctricas necesitan información acerca de los hábitos de consumo de los clientes para obtener pronósticos exactos de las demandas de energía. Los datos 2,97; 4,00; 5,20; 5,56; 5,94; 5,98; 6,35; 6,62; 6,72; 6,78; 6,80; 6,85; 6,94; 7,15; 7,16; 7,23; 7,29; 7,62; 7,62; 7,69; 7,73; 7,87; 7,93; 8,00; 8,26; 8,29; 8,37; 8,47; 8,54; 8,58; 8,61; 8,67; 8,69; 8,81; 9,07; 9,27; 9,37; 9,43; 9,52; 9,58; 9,60; 9,76; 9,82; 9,83; 9,83; 9,84; 9,96; 10,04; 10,21; 10,28; 10,28; 10,30; 10,35; 10,36; 10,40; 10,49; 10,50; 10,64; 10,95; 11,09; 11,12; 11,21; 11,29; 11,43; 11,62; 11,70; 11,70; 12,16; 12,19; 12,28; 12,31; 12,62; 12,69; 12,71; 12,91; 12,92; 13,11; 13,38; 13,42; 13,43; 13,47; 13,60; 13,96; 14,24; 14,35; 15,12; 15,24; 16,06; 18,26; corresponden al consumo ajustado de energía (en BTU) durante cierto período para una muestra de 90 hogares con calefacción de gas. Estos datos pueden ser encontrados en Devore [6].

Calculamos el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro θ del modelo de Maxwell, el que fue $\hat{\theta} = 5,970$. Considerando $\lambda = 0$, utilizamos estos valores como valor

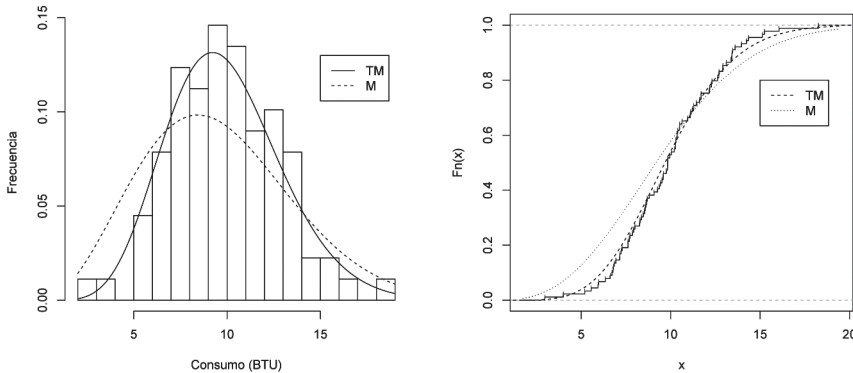


Figura 3. Parte izquierda: Histograma del consumo de energía ajustado con los modelos de Maxwell y de Maxwell transmutado provistos de las estimaciones de máxima verosimilitud. Parte derecha: Distribución empírica y distribuciones de Maxwell y de Maxwell transmutada provistas de las estimaciones de máxima verosimilitud.

inicial para el cálculo de los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetro θ y λ del modelo de Maxwell transmutado mediante procedimientos numéricos (ver Figura 3).

La matriz de varianzas y covarianzas de Maxwell transmutada ($\hat{\theta} = 0,0397, \hat{\lambda} = -1,0000$) está dada por

$$I(\hat{\Theta})^{-1} = \begin{pmatrix} 8,260 \cdot 10^{-6} & -1,359 \cdot 10^{-4} \\ -1,359 \cdot 10^{-4} & 1,155 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

Así, la varianza de las estimaciones de máxima verosimilitud de θ y λ son $Var(\hat{\theta}) = 8,260 \cdot 10^{-6}$ y $Var(\hat{\lambda}) = 1,155 \cdot 10^{-2}$.

Para comparar el ajuste realizado por las distribuciones de Maxwell y de Maxwell transmutada utilizamos los criterios de Kolmogórov-Smirnov (K-S), de información de Akaike AIC [1] y de información Bayesiano BIC [11]. Los criterios AIC y BIC están definidos como

$$AIC = 2k - 2 \log(L) \quad \text{y} \quad BIC = k \log(n) - 2 \log(L),$$

donde k es el número de parámetros del modelo estadístico, n es el tamaño de la muestra y L es el máximo valor de la función de verosimilitud para el modelo estimado. Para el cálculo de los valores correspondientes al criterio K-S usamos las estimaciones de máxima verosimilitud para θ y λ mostradas en el Cuadro 3. El Cuadro 3 muestra las estimaciones de máxima verosimilitud para los parámetros de los modelos de Maxwell y de Maxwell transmutado. El Cuadro 4 muestra los valores correspondientes a los criterios K-S, AIC y BIC asociados a los ajustes realizados con los modelos de Maxwell y de Maxwell transmutado. Del Cuadro 4 se puede observar que la distribución de Maxwell transmutada ajusta de mejor forma los datos asociados al consumo de energía.

Cuadro 3. Estimaciones de máxima verosimilitud para los parámetros de los modelos M y TM para los datos del consumo de energía.

Modelo	Parámetros estimados	I. C. 95%
M	$\hat{\theta} = 0,0281$	[0,023 , 0,033]
TM	$\hat{\theta} = 0,0397$ $\hat{\lambda} = -1,0000$	[0,034 , 0,045] [-1,210 , -0,789]

Cuadro 4. Criterios de comparación.

Modelo	K-S	AIC	BIC
M	0,0976	229,035	462,558
TM	0,0598	217,789	444,555

6. Conclusiones finales

En este estudio se ha presentado una generalización de la distribución de Maxwell a la que llamamos distribución de Maxwell transmutada. Esta distribución se genera usando el mapa transmutación de rango cuadrático, considerando como función base la función de distribución acumulada de Maxwell. La distribución de Maxwell transmutada posee un parámetro θ de escala y un parámetro λ que introduce flexibilidad en términos de asimetría y curtosis. Derivamos los momentos distribucionales y calculamos los coeficientes de asimetría y de curtosis. Del análisis de inferencia se obtuvieron los estimadores de momentos, las ecuaciones de máxima verosimilitud y la matriz de información observada. Del estudio de simulación, se observa que el comportamiento de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros θ y λ de la distribución Maxwell transmutada son consistente. De la aplicación con datos reales podemos señalar que la distribución de Maxwell transmutada puede presentar un mejor ajuste que el modelo de Maxwell estándar. Por lo anterior, proponemos a la distribución de Maxwell transmutada como un modelo alternativo al modelo de Maxwell.

Referencias

- [1] Akaike H., "A new look at the statistical model identification", *IEEE Trans. Automat. Control* 19 (1974), no. 6, 716-723.
- [2] Aryal G. and Tsokos C., "On the transmuted extreme value distribution with application", *Nonlinear Anal.* 71 (2009), 1401-1407.
- [3] Aryal G. and Tsokos C., "Transmuted weibull distribution: a generalization of the weibull probability distribution", *Eur. J. Pure and Appl. Math.* 4 (2011), no. 2, 89-102.
- [4] Bekker A. and Roux J., "Reliability characteristics of the Maxwell distribution: a bayes estimation study". *Comm. Statist. Theory Methods* 34 (2005), 2169-2178.
- [5] Chaturvedi A. and Rani U., "Classical and Bayesian reliability estimation of the generalized Maxwell failure distribution", *J. Statist. Res.* 32 (1998), 113-120.
- [6] Devore J., *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*, Thomson. México, 2005.
- [7] Kazmi S., Aslam M. and Ali S., "On the Bayesian Estimation for two Component Mixture of Maxwell Distribution, Assuming Type I Censored Data", *SOURCE International Journal of Applied Science & Technology* 2 (2012), no. 1, 197.

- [8] Merovci F., "Transmuted Rayleigh distribution". *Austrian Journal of Statistics* 42 (2013), no. 1, 21-31.
- [9] Merovci F., "Transmuted Generalized Rayleigh Distribution". *J. of Stat. Appl. Prob.* 3 (2014), no. 1, 9-20.
- [10] R Development Core Team R., "A language and environment for statistical computing", R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, <http://www.R-project.org> [citado 9 julio 2014].
- [11] Schwarz G., "Estimating the dimension of a model", *Ann. Statist.* 6 (1978), 461-464.
- [12] Shakil M., Golam B. and Chang k., "Distributions of the product and ratio of Maxwell and Rayleigh random variables", *Statist. Papers* 49 (2008), 729-747.
- [13] Shaw W. and Buckley I., "The alchemy of probability distributions: beyond gram-charlier expansions, and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map", IMA, Primera Conferencia sobre Finanzas Computacionales, Cornell University, <http://arxiv.org/abs/0901.0434> (2007).
- [14] Tyagi R. and Bhattacharya S., "A note on the MVU estimation of reliability for the Maxwell failure distribution", *Estadística* 41 (1989), no. 137.