

El espacio de Golomb y su no conexidad en pequeño

JOSÉ DEL CARMEN ALBERTO-DOMÍNGUEZ^{a*}, GERARDO ACOSTA^b,
GERARDO DELGADILLO-PIÑÓN^a, MAIRA MADRIZ-MENDOZA^c

^a Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, División Académica de Ciencias Básicas, Tabasco, México.

^b Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Matemáticas, Ciudad de México, México.

^c Instituto Tecnológico Autónomo de México, Departamento de Matemáticas, Ciudad de México, México.

Resumen. En el presente trabajo, estudiamos los espacios de Brown, que son conexos y no completamente de Hausdorff. Utilizando progresiones aritméticas, construimos una base \mathcal{B}_G para una topología τ_G de \mathbb{N} , y mostramos que (\mathbb{N}, τ_G) , llamado el *espacio de Golomb*, es de Brown. También probamos que hay elementos de \mathcal{B}_G que son de Brown, mientras que otros están totalmente separados. Escribimos algunas consecuencias de este resultado. Por ejemplo, (\mathbb{N}, τ_G) no es conexo en pequeño en ninguno de sus puntos. Esto generaliza un resultado probado por Kirch en 1969. También damos una prueba más simple de un resultado presentado por Szczuka en 2010.

Palabras clave: Conexidad, conexidad en pequeño, conexidad local, progresión aritmética, topología de Golomb.

MSC2010: 54D05, 11B25, 54D10, 54A05, 11B05, 11A07, 11A41.

The Golomb space and its non connectedness “im kleinen”

Abstract. In the present paper we study Brown spaces which are connected and not completely Hausdorff. Using arithmetic progressions, we construct a base \mathcal{B}_G for a topology τ_G on \mathbb{N} , and show that (\mathbb{N}, τ_G) , called the *Golomb space* is a Brown space. We also show that some elements of \mathcal{B}_G are Brown spaces, while others are totally separated. We write some consequences of such result. For example, the space (\mathbb{N}, τ_G) is not connected “im kleinen” at each of its points. This generalizes a result proved by Kirch in 1969. We also present a simpler proof of a result given by Szczuka in 2010.

Keywords: Arithmetic progression, connectedness, connectedness “im kleinen”, Golomb topology, local connectedness.

*E-mail: 092a5002@alumno.ujat.mx

Recibido: 13 de junio de 2017, Aceptado: 12 de diciembre de 2017.

Para citar este artículo: J.C. Alberto-Domínguez, G. Acosta, G. Delgadillo-Piñón, M. Madriz-Mendoza, El espacio de Golomb y su no conexidad en pequeño, *Rev. Integr. temas mat.* 35 (2017), No. 2, 189–213.

1. Introducción

Denotamos por \mathbb{R}, \mathbb{Z} y \mathbb{N} los conjuntos de los números reales, de los números enteros y de los números naturales, respectivamente. Además, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. También denotamos por \mathbb{P} el conjunto de los números primos, y suponemos que $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, en donde al menos uno de ellos es diferente de cero, el símbolo $\langle a, b \rangle$ denota el máximo común divisor de a y b . Para cada $a, b \in \mathbb{N}$, consideramos las progresiones aritméticas

$$P(a, b) = \{b + an : n \in \mathbb{N}_0\} = b + a\mathbb{N}_0$$

y

$$P_G(a, b) = \{b + an : n \in \mathbb{N}_0\} = b + a\mathbb{N}_0, \quad \text{siempre que } \langle a, b \rangle = 1.$$

Para $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{Z}$, también consideramos las progresiones aritméticas

$$P_F(a, b) = \{b + az : z \in \mathbb{Z}\} = b + a\mathbb{Z} \quad \text{y} \quad M(a) = \{an : n \in \mathbb{N}\}.$$

Notemos que $P(a, b) = P_G(a, b)$ si y sólo si $\langle a, b \rangle = 1$. Además, $M(a) = P(a, a)$. En 1955 Furstenberg probó en [6] que la familia

$$\mathcal{B}_F = \{P_F(a, b) : (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$$

es base de una topología τ_F en \mathbb{Z} . También mostró que el espacio topológico (\mathbb{Z}, τ_F) es segundo numerable y T_4 , por lo que es metrizable. Más aún, hizo ver que cada básico $P_F(a, b)$ es abierto y cerrado en (\mathbb{Z}, τ_F) , así que este espacio es cero-dimensional y no conexo.

Tanto en 1959 como en 1962, Golomb probó en [7] y en [8] que la familia

$$\mathcal{B}_G = \{P_G(a, b) : (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ y } \langle a, b \rangle = 1\}$$

es base de una topología τ_G en \mathbb{N} (ver Teorema 3.2). En [12, Ejemplos 60 y 61, p. 82], cuya primera edición fue publicada en 1970, a τ_G se lo llama la “topología del entero primo relativo”. En el presente trabajo, al igual que en los artículos [13], [14], [15], [16], [17] y [18] de Szczuka, a τ_G lo llamamos la *topología de Golomb*, y decimos que el espacio topológico (\mathbb{N}, τ_G) es el *espacio de Golomb*.

En [7, Teoremas 2 y 3, p. 663] y [8, Teoremas 2 y 3, p. 180], Golomb probó que (\mathbb{N}, τ_G) es segundo numerable, T_2 y conexo (ver Teoremas 4.1, 4.11 y 4.17). Usando el hecho de que, para cada $p \in \mathbb{P}$, el conjunto $M(p)$ es cerrado en (\mathbb{N}, τ_G) (ver Teorema 4.2), Golomb probó en [7, Teorema 1, p. 663] y [8, Teorema 1, p. 180], que \mathbb{P} es infinito (ver Teorema 4.3). Usando una fuerte herramienta de la Teoría Analítica de Números, Golomb probó en [7, Teoremas 6 y 7, p. 664] y [8, Teoremas 6 y 7, p. 181], que \mathbb{P} es denso en (\mathbb{N}, τ_G) y tiene interior vacío (ver Teoremas 4.28 y 4.29).

La prueba de la conexidad de (\mathbb{N}, τ_G) , como fue presentada por Golomb, utiliza argumentos propios de la Teoría de Números. Como se indica en [7, p. 663] y [8, p. 180] “una prueba de la conexidad de (\mathbb{N}, τ_G) , que no utiliza argumentos de la Teoría de Números, fue presentada por Brown en abril de 1953, durante el congreso de la Sociedad Matemática Americana”, que se llevó a cabo en la ciudad de Nueva York. Brown estudió el espacio (\mathbb{N}, τ_G) antes que Golomb, pero no publicó sus resultados. El resumen de la plática de Brown, publicado en [2, p. 367] y en donde se bosqueja la manera de demostrar la conexidad de (\mathbb{N}, τ_G) , motivó en 2017 a Clark, Lebowitz-Lockard y Pollack, a acuñar en [3] la siguiente noción.

Definición 1.1. Un **espacio de Brown** es un espacio topológico X tal que para cada dos subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de X , tenemos que $\text{cl}_X(U) \cap \text{cl}_X(V) \neq \emptyset$. Si X es un espacio topológico y $Y \subset X$, decimos que Y es un **espacio de Brown en X** si Y , como subespacio de X , es de Brown.

Sea X un espacio topológico. Para simplificar, diremos que X es de Brown, en lugar de decir que X es un espacio de Brown. Si X es no numerable y su topología es la del complemento finito o bien la del complemento numerable, entonces X es de Brown. El siguiente resultado aparece en [3, Proposición 6].

Teorema 1.2. *Todo espacio de Brown X es conexo.*

Demostración. Si X no es conexo, entonces existen dos subconjuntos no vacíos U y V de X , abiertos y cerrados en X , tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces $\text{cl}_X(U) \cap \text{cl}_X(V) = U \cap V = \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que X es de Brown. \square

En el presente trabajo damos una prueba explícita del hecho de que (\mathbb{N}, τ_G) es de Brown (ver Teorema 4.17). También probamos que, para cada $d \in \mathbb{N}$, la progresión aritmética $P_G(1, d)$ es de Brown en (\mathbb{N}, τ_G) (ver Teorema 4.16).

En 1969 Kirch demostró en [9, Teorema 1, p. 169], que (\mathbb{N}, τ_G) no es localmente conexo. Formalmente, hizo ver que (\mathbb{N}, τ_G) no es localmente conexo en 1. Luego de esto definió, en el mismo artículo, una topología τ_K en \mathbb{N} tal que $\tau_K \subset \tau_G$ y (\mathbb{N}, τ_K) es conexo, T_2 y localmente conexo. Aunque Kirch fue el primero en probar que (\mathbb{N}, τ_G) no es localmente conexo, presentamos este hecho de manera más general, pues, como vemos en el Teorema 4.20, para ningún $d \in \mathbb{N}$ el conjunto $P_G(1, d)$ es conexo en pequeño o casi conexo en pequeño, en cada uno de sus puntos.

El presente trabajo está dividido en cuatro secciones. Luego de esta Introducción, en la Sección 2 presentamos una serie de nociones y resultados, propios de la Teoría de Números y de la Topología General, que serán necesarios para probar las propiedades topológicas del espacio (\mathbb{N}, τ_G) , trabajo que se realiza en las Secciones 3 y 4. Conviene destacar que varios resultados presentados en la Sección 4 aparecen por vez primera. Incluimos en la Sección 4 una serie de preguntas abiertas.

2. Definiciones y resultados iniciales

En esta sección presentamos una serie de definiciones y resultados básicos que utilizaremos para probar los enunciados principales. La mayoría de los resultados, propios de la Teoría de Números y de la Topología General, son conocidos y se indica, en cada caso, una referencia adecuada. Un conjunto es *numerable* si tiene la misma cardinalidad que un subconjunto de \mathbb{N} . Un conjunto es *infinito numerable* si tiene la misma cardinalidad que \mathbb{N} .

2.1. Teoría de números

En la presente subsección damos por hecho que el lector tiene conocimientos básicos de la Teoría de Números, por lo que omitiremos varias demostraciones, remitiendo al lector

interesado a textos clásicos como [1] y [11], o bien a uno más reciente como [5]. Si $c, d \in \mathbb{Z}$ y c divide a d , escribimos $c \mid d$. En caso contrario, escribimos $c \nmid d$. Si $c, d \in \mathbb{N}$ y $c \mid d$, entonces $c \leq d$. Recordemos que el máximo común divisor de los enteros a y b , en donde al menos uno de ellos es diferente de cero, lo denotamos por $\langle a, b \rangle$. Es claro que $\langle a, b \rangle \in \mathbb{N}$, y que

$$\langle a, 1 \rangle = 1 \quad \text{para cada } a \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Los dos resultados siguientes, aparecen probados en [11, Teorema 1.2, p. 5] y [11, Teorema 1.9, p. 9], respectivamente. El primero de ellos es conocido como el *Algoritmo de la División*.

Teorema 2.1. *Si $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, entonces existen dos enteros únicos q y r , tales que $a = bq + r$ y $0 \leq r < |b|$.*

Teorema 2.2. *Si $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$ son tales que $a = bq + r$, entonces $\langle a, b \rangle = \langle b, r \rangle$.*

El resultado siguiente aparece probado en [11, Teoremas 1.3 y 1.4, p. 7-8].

Teorema 2.3. *Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $g = \langle a, b \rangle$, entonces existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $g = an + bm$. Más aún, si 1 es combinación lineal de a y b , entonces $\langle a, b \rangle = 1$. Si d es una combinación lineal de a y b , entonces $g \mid d$.*

Teorema 2.4. *Supongamos que $b, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ son tales que $\langle b, a_1 \rangle = \langle b, a_2 \rangle = 1$. Entonces $\langle b, a_1 a_2 \rangle = 1$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\langle b, a_1^n \rangle = \langle b, a_2^n \rangle = 1$.*

Demostración. Como $1 = \langle b, a_1 \rangle = \langle b, a_2 \rangle$, por el Teorema 2.3 existen $n_0, n_1, m_0, m_1 \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = bn_0 + a_1 m_0$ y $1 = bn_1 + a_2 m_1$. Entonces,

$$(a_1 m_0)(a_2 m_1) = (1 - bn_0)(1 - bn_1) = 1 - b(n_1 + n_0 - bn_0 n_1).$$

Haciendo $n = n_1 + n_0 - bn_0 n_1$ y $m = m_0 m_1$, tenemos que $1 = bn + (a_1 a_2)m$. Luego 1 es una combinación lineal de b y $a_1 a_2$ y, por la segunda parte del Teorema 2.3, $\langle b, a_1 a_2 \rangle = 1$. En particular, cuando $a_1 = a_2$, $\langle b, a_1^2 \rangle = \langle b, a_2^2 \rangle = 1$ y, por inducción, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\langle b, a_1^n \rangle = \langle b, a_2^n \rangle = 1$. \square

Diremos que $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ es un *número primo* si sus únicos divisores positivos son 1 y p . Recordemos que \mathbb{P} denota al conjunto de los números primos.

Teorema 2.5. *Sean $p \in \mathbb{P}$ y $a \in \mathbb{Z}$. Si $p \nmid a$, entonces $\langle p, a \rangle = 1$. En particular, para cada $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, tenemos que $\langle p, a \rangle = 1$.*

Demostración. Sea $d = \langle p, a \rangle$. Entonces $d \in \mathbb{N}$ y $d \mid p$, de manera que $d = 1$ o bien $d = p$, ya que p es un número primo. Si $d = p$, sucede que $p \mid a$, contradiciendo que $p \nmid a$. Luego $d = 1$ y $\langle p, a \rangle = 1$. Ahora tomemos $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Entonces $a < p$. Si $p \mid a$, resulta que $p \leq a$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $p \nmid a$ y, así, $\langle p, a \rangle = 1$. \square

Una prueba del siguiente resultado aparece en [11, Teorema 1.15, p. 23].

Teorema 2.6. *Sea $p \in \mathbb{P}$. Si $u, v \in \mathbb{Z}$ son tales que $p \mid uv$, entonces $p \mid u$ o bien $p \mid v$.*

El siguiente resultado aparece, sin demostración, tanto en [9, p. 169] como en [13, p. 902]. Lo utilizaremos más adelante, y presentemos aquí una prueba del mismo.

Teorema 2.7. Sean $p \in \mathbb{P}$ y $b \in \mathbb{Z}$ tales que $\langle p, b \rangle = 1$. Entonces, para toda $n, s \in \mathbb{N}_0$,

$$\langle pn + b, p^s \rangle = 1. \quad (2)$$

En particular si $b \in \mathbb{N}$, entonces para cada $m \in P_G(p, b)$ y todo $s \in \mathbb{N}_0$, tenemos que $\langle m, p^s \rangle = 1$.

Demostración. Si $s = 0$, por (1)

$$\langle pn + b, p^s \rangle = \langle pn + b, p^0 \rangle = \langle pn + b, 1 \rangle = 1, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}_0.$$

Si $s = 1$, entonces, como $\langle p, b \rangle = 1$, por el Teorema 2.2

$$\langle pn + b, p^s \rangle = \langle pn + b, p \rangle = \langle p, b \rangle = 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0. \quad (3)$$

Supongamos ahora que existen $s_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tales que $g = \langle pn_0 + b, p^{s_0} \rangle > 1$. Sea $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \mid g$. Luego $q \mid (pn_0 + b)$ y $q \mid p^{s_0}$. Como $p, q \in \mathbb{P}$ y $q \mid p^{s_0}$, por el Teorema 2.6, $q = p$. Así, $q \mid (pn_0 + b)$ y $q \mid p$, de donde $q \mid \langle pn_0 + b, p \rangle$ y, por (3), $q \mid 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\langle pn + b, p^s \rangle = 1$, para todo $s, n \in \mathbb{N}_0$. Esto termina la primera parte del teorema. La segunda parte es una consecuencia inmediata de la primera. \square

2.2. Congruencias

Ahora veamos algunos resultados sobre las congruencias numéricas. Supongamos que $a, b \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Si a es congruente con b módulo m , escribimos $a \equiv b \pmod{m}$. De lo contrario, escribimos $a \not\equiv b \pmod{m}$. Sean $a, b \in \mathbb{N}$, con $a \neq 1$. Si $c \in P(a, b)$, entonces $c \equiv b \pmod{a}$. Si $c \equiv b \pmod{a}$ y $c \geq b$, entonces $c \in P(a, b)$. Tenemos también el siguiente resultado.

Teorema 2.8. Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Entonces $P(a, b) \subset P_F(a, b)$. Más aún, si $b \leq a$ entonces $P_F(a, b) \cap \mathbb{N} = P(a, b)$.

Demostración. Sea $c \in P_G(a, b)$. Entonces $c = am + b$, para algún $m \in \mathbb{N}_0$. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$, se sigue que b y m son enteros tales que $c = am + b$. Luego $c \in P_F(a, b)$. Por tanto, $P(a, b) \subset P_F(a, b)$. Como $P(a, b) \subset \mathbb{N}$, tenemos que $P(a, b) \subset P_F(a, b) \cap \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que $b \leq a$. Sean $y \in P_F(a, b) \cap \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{Z}$ tales que $y = az + b$. Si $z \leq -1$, entonces $az \leq bz \leq -b$, de donde $y = az + b \leq 0$, lo cual contradice el que $y \in \mathbb{N}$. Luego $z \geq 0$ y, así, $y \in P(a, b)$. Esto prueba que $P_F(a, b) \cap \mathbb{N} \subset P(a, b)$ y, como la otra contención también es cierta, $P_F(a, b) \cap \mathbb{N} = P(a, b)$. \square

Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Si $a < b$, entonces algunos elementos de $P_F(a, b) \cap \mathbb{N}$ son menores que b y, por tanto, no se encuentran en $P(a, b)$. Por ejemplo, $b - a = a(-1) + b \in (P_F(a, b) \cap \mathbb{N}) \setminus P(a, b)$.

En [1, Teorema 5.10(c), p. 110] se prueba que, para cada $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, el conjunto \mathbb{Z} se divide en justo m clases de equivalencia distintas, a saber $[0], [1], \dots, [m-1]$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.9. Sea $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Un conjunto A de m números enteros es un **sistema completo de residuos** módulo m , si cada elemento de A es un representante de una y solo una de las clases $[0], [1], \dots, [m-1]$.

Sea $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Es claro que el conjunto $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ es un sistema completo de residuos módulo m . A continuación, presentamos otras propiedades de las congruencias, que se utilizarán más adelante. Una demostración del siguiente resultado aparece en [5, Lema 2.4.3, p. 24].

Teorema 2.10. Sean $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Entonces:

- 1) Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a + c \equiv b + d \pmod{m}$. En particular, $a \equiv b \pmod{m}$ si y sólo si $a + x \equiv b + x \pmod{m}$, para cualquier entero x .
- 2) Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $d \mid m$, con $d > 1$, entonces $a \equiv b \pmod{d}$.
- 3) Si $c \in \mathbb{N}$, entonces $a \equiv b \pmod{m}$ si y sólo si $ac \equiv bc \pmod{mc}$.

Decimos que los enteros $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ son *primos relativos dos a dos* si para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $i \neq j$, $\langle m_i, m_j \rangle = 1$. El siguiente resultado es el Teorema Chino del Residuo. Una prueba del mismo aparece en [11, Teorema 2.18, p. 64].

Teorema 2.11. Supongamos que $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Entonces todo sistema de congruencias lineales del tipo

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \quad x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \quad \dots \quad x \equiv a_n \pmod{m_n},$$

en las cuales los módulos m_1, m_2, \dots, m_n son primos relativos dos a dos, tiene una única solución con módulo igual al producto de los módulos. Es decir, existe un único entero a tal que $x \equiv a \pmod{m_1 m_2 \cdots m_n}$.

2.3. Topología general

En la presente subsección damos por hecho que el lector tiene conocimientos básicos de la Topología General, por lo que omitiremos varias demostraciones, remitiendo al lector interesado a textos clásicos como [4] y [19]. Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, denotamos por $\text{int}_X(A)$ y $\text{cl}_X(A)$ el interior y la cerradura de A en X , respectivamente. En particular, si $A \subset \mathbb{N}$, el símbolo $\text{cl}_{\mathbb{N}}(A)$ denota la cerradura de A en (\mathbb{N}, τ_G) . Si X es un espacio topológico y $A \subset Y \subset X$, entonces $\text{cl}_Y(A) = \text{cl}_X(A) \cap Y$.

A continuación enlistamos una serie de axiomas de separación que se utilizan en el presente trabajo.

Definición 2.12. Un espacio topológico X es:

- 1) T_1 , si para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es cerrado en X ;
- 2) T_2 o **Hausdorff**, si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$;

- 3) $T_{2\frac{1}{2}}$ o **completamente Hausdorff**, si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $\text{cl}_X(U) \cap \text{cl}_X(V) = \emptyset$;
- 4) **regular**, si para toda $x \in X$ y cada cerrado C en X con $x \notin C$, existen abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $C \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$;
- 5) T_3 , si X es regular y T_1 ;
- 6) T_4 , si X es T_1 y para cada dos cerrados C y D en X con $C \cap D = \emptyset$, existen dos abiertos U y V en X tales que $C \subset U$, $D \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Se sabe que $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_{2\frac{1}{2}} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$, y que ninguna de las implicaciones anteriores es reversible (ver [10, Ejemplos VII.4.2, VII.5.2, VII.6.8, VII.7.5 y VII.8.10]). De las correspondientes definiciones de espacio de Brown y de espacio $T_{2\frac{1}{2}}$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.13. *Ningún espacio de Brown, con al menos dos puntos, es $T_{2\frac{1}{2}}$.*

Por el resultado anterior, ningún espacio de Brown es metrizable. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que X es *indiscreto en x* , o que x es un *punto indiscreto de X* , si X es el único subconjunto abierto en X que contiene a x . Notemos que X posee la topología indiscreta si y sólo si cada punto de X es indiscreto. El siguiente resultado se prueba en [3, Proposición 6].

Teorema 2.14. *En un espacio topológico X se cumplen las siguientes propiedades:*

- 1) *si X contiene un punto indiscreto, entonces X es de Brown;*
- 2) *si X es de Brown, entonces X es regular si y sólo si X posee la topología indiscreta.*

Notemos que los espacios T_1 , con al menos dos puntos, no poseen puntos indiscretos. Utilizando esto y el Teorema 2.14, resulta que ningún espacio conexo y T_3 , con al menos dos puntos, es de Brown. De manera más general, ningún espacio conexo, regular y sin puntos indiscretos, es de Brown. Esto implica que el recíproco del Teorema 1.2 no es cierto.

Sean X y Y dos espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. No es difícil probar que si X es de Brown, entonces Y también es de Brown. Esto implica que si $\{X_s: s \in S\}$ es una familia de espacios topológicos y el producto cartesiano $\prod_{s \in S} X_s$, con la topología producto, es de Brown, entonces cada X_s es de Brown. Tampoco es difícil probar que si, en su lugar, suponemos que cada X_s es de Brown, entonces $\prod_{s \in S} X_s$ también es de Brown.

En el Teorema 4.17 mostramos que (\mathbb{N}, τ_G) es de Brown, y en el Teorema 4.11, que dicho espacio es T_2 . Combinando esto con el Teorema 2.13, tenemos que (\mathbb{N}, τ_G) es un espacio T_2 que no es $T_{2\frac{1}{2}}$. Ahora bien, en el Teorema 4.18 exhibimos subespacios del espacio de Brown (\mathbb{N}, τ_G) , que no son de Brown. Por tanto, ser de Brown no es una propiedad hereditaria.

Considerando a \mathbb{R} con la topología usual τ_U , resulta que si X es de Brown, entonces toda función continua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es constante. En efecto, si f no es constante, existen

$x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que $f(x) \neq f(y)$. Como (\mathbb{R}, τ_U) es $T_{2\frac{1}{2}}$, existen abiertos U y V en \mathbb{R} tales que $f(x) \in U$, $f(y) \in V$ y $\text{cl}_{\mathbb{R}}(U) \cap \text{cl}_{\mathbb{R}}(V) = \emptyset$. Por la continuidad de f , $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos en X tales que $x \in f^{-1}(U)$, $y \in f^{-1}(V)$ y

$$\text{cl}_X(f^{-1}(U)) \cap \text{cl}_X(f^{-1}(V)) \subset f^{-1}(\text{cl}_{\mathbb{R}}(U)) \cap f^{-1}(\text{cl}_{\mathbb{R}}(V)) = \emptyset.$$

Como esto contradice el que X es de Brown, f es constante.

Utilizando [4, Teorema 3.8.2 y Corolario 6.1.4], se tiene el siguiente resultado, que habla sobre la cardinalidad de un conjunto conexo y T_3 .

Teorema 2.15. *Si X es conexo, no vacío, numerable y T_3 , entonces X posee solamente un elemento.*

Sean X un espacio topológico y $x \in X$. La *componente* (conexa) de X que tiene a x , es la unión de todos los subconjuntos conexos de X que tienen a x . La *casicomponente* de X que tiene a x , es la intersección de todos los subconjuntos abiertos y cerrados de X que tienen a x . Haremos uso de estos términos, y de los que aparecen en la siguiente definición.

Definición 2.16. Un espacio topológico X

- 1) es **hereditariamente disconexo**, si ningún subconjunto conexo y no vacío de X , tiene más de un elemento;
- 2) está **totalmente separado**, si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $y \in V$, $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$;
- 3) es **cero-dimensional**, si X es T_1 y posee una base cuyos elementos son abiertos y cerrados en X .

A los espacios hereditariamente disconexos se los suele también llamar *totalmente disconexos*. En [4, Teorema 6.2.1] se prueba que todo espacio cero-dimensional es hereditariamente disconexo. En [4, Teorema 6.2.9] se prueba que si X es hereditariamente disconexo y localmente compacto, entonces X es cero-dimensional. Notemos que un espacio X es hereditariamente disconexo si y sólo si, para cada $x \in X$ la componente C_x de X que tiene a x es justo el conjunto $\{x\}$. Notemos también que X está totalmente separado si y sólo si, para cada $x \in X$ la casicomponente Q_x de X que tiene a x coincide con el conjunto $\{x\}$. Por [4, Teorema 6.1.22], $C_x \subset Q_x$ para cada $x \in X$, así que los espacios totalmente separados son hereditariamente disconexos. Si X es compacto y T_2 , por [4, Teorema 6.1.23], $C_x = Q_x$ para cada $x \in X$. Por tanto, en los espacios compactos y T_2 , las nociones de espacio hereditariamente disconexo y de espacio totalmente separado coinciden.

Sean X un espacio topológico y $a, b \in X$. Decimos que X es *conexo entre a y b* si para cada par de abiertos U y V en X tales que $a \in U$, $b \in V$ y $U \cap V = \emptyset$, se sigue que $X \neq U \cup V$. No es difícil probar que si X es T_2 , entonces X está totalmente separado si sólo si para cada $a, b \in X$ con $a \neq b$, X no es conexo entre a y b .

A continuación enlistamos una serie de axiomas de conexidad que se utilizarán más adelante. Todos ellos garantizan la existencia de conjuntos conexos con interior no vacío.

Definición 2.17. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que X es:

- 1) **conexo en pequeño en x** , si para todo abierto U en X con $x \in U$, existe un subconjunto conexo V de X tal que $x \in \text{int}_X(V) \subset V \subset U$;
- 2) **localmente conexo en x** , si para cada abierto U en X con $x \in U$, existe un abierto y conexo V en X tal que $x \in V \subset U$;
- 3) **casi conexo en pequeño en x** , si para cada abierto V en X con $x \in V$, existe un subconjunto conexo y cerrado U en X tal que $\text{int}_X(U) \neq \emptyset$ y $U \subset V$;
- 4) **casi conexo en pequeño**, si X es casi conexo en pequeño en cada uno de sus puntos;
- 5) **localmente conexo**, si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Es claro que si X es localmente conexo en x , entonces X es conexo en pequeño en x . Ahora mostraremos que el recíproco de esta implicación no es cierto. Vamos a describir un subespacio Z de \mathbb{R}^2 , con la topología usual. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sean $q_i = \left(\frac{1}{i}, 0\right) \in \mathbb{R}^2$ y $L_{i,0}$ el segmento de recta con extremos q_i y q_{i+1} . Para toda $(i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, consideremos el punto

$$p_{i,n} = \frac{1}{i+1} \left(1, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2,$$

así como el segmento de recta $L_{i,n}$ con extremos $p_{i,n}$ y q_i . Es decir, para cada $(i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$L_{i,n} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{i+1} \leq x \leq \frac{1}{i} \quad y = \frac{1}{n}(1 - ix) \right\},$$

donde $y = \frac{1}{n}(1 - ix)$ es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $p_{i,n}$ y q_i . Definamos, para cada $i \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$X_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} L_{i,n}.$$

Entonces

$$Z = \text{cl}_{\mathbb{R}^2} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \right)$$

es un espacio topológico compacto y conexo que, además, es conexo en pequeño en el punto $(0, 0)$ y no es localmente conexo en $(0, 0)$. El espacio Z , llamado *la escoba infinita nula*, aparece en [19, Ejemplo 27.15, p. 201], aunque no se indican los detalles de porque dicho espacio es conexo en pequeño en $(0, 0)$ y no localmente conexo en $(0, 0)$. Por consiguiente, la conexidad en pequeño en un punto, no implica la conexidad local en dicho punto. En [19, Teorema 27.16, p. 201] se prueba que si X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos, entonces X es localmente conexo. Con respecto al espacio Z que hemos descrito, sea

$$Y = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_{i,0} \right) \setminus \{q_i : i \in \mathbb{N}\} \subset Z.$$

Notemos que Z es casi conexo en pequeño en cada punto $p \in Y$, y no es conexo en pequeño en p . Notemos también que si X es un espacio T_3 y conexo en pequeño en un punto $x \in X$, entonces X es casi conexo en pequeño en x .

3. La topología de Golomb

Recordemos que para cada $a, b \in \mathbb{N}$ con $\langle a, b \rangle = 1$,

$$P_G(a, b) = \{b + an : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

En el siguiente teorema, enlistamos tres propiedades de los conjuntos anteriormente definidos.

Teorema 3.1. *Para cada $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $\langle a, b \rangle = 1$, se satisfacen las siguientes propiedades:*

- 1) $P_G(a, b)$ es infinito, $b \in P_G(a, b)$ y $P_G(1, 1) = \mathbb{N}$;
- 2) si $c \in P_G(a, b)$, entonces $\langle a, c \rangle = 1$ y $P_G(a, c) \subset P_G(a, b)$;
- 3) si $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ y $\langle b, a_1 \rangle = \langle b, a_2 \rangle = 1$, entonces $\langle b, a_1 a_2 \rangle = 1$ y $P_G(a_1 a_2, b) \subset P_G(a_1, b) \cap P_G(a_2, b)$.

Demostración. Para ver 1) y 2), sea $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $\langle a, b \rangle = 1$. Entonces $b = a(0) + b \in P_G(a, b)$, es decir, $b \in P_G(a, b)$. Para probar la infinitud de $P_G(a, b)$, sea $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow P_G(a, b)$ la función definida como $f(m) = am + b$, para cada $m \in \mathbb{N}_0$. Si $n, m \in \mathbb{N}_0$ son tales que $f(n) = f(m)$, entonces $an + b = am + b$, por lo que $an = am$ y, como $a \in \mathbb{N}$, la igualdad $am = an$ implica que $n = m$. Esto prueba que f es inyectiva. Claramente f es sobreyectiva, así que f es biyectiva. Luego \mathbb{N}_0 y $P_G(a, b)$ tienen la misma cardinalidad, de donde $P_G(a, b)$ es infinito numerable. Para ver que $P_G(1, 1) = \mathbb{N}$, sea $n \in \mathbb{N}$. Como $n = 1(n - 1) + 1$ y $(n - 1) \in \mathbb{N}_0$, se sigue que $n \in P_G(1, 1)$. Luego $\mathbb{N} \subset P_G(1, 1)$. Como también $P_G(1, 1) \subset \mathbb{N}$, concluimos que $P_G(1, 1) = \mathbb{N}$. Esto prueba 1).

Para probar 2), sea $c \in P_G(a, b)$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $c = b + na$. Por el Teorema 2.2, $\langle c, a \rangle = \langle a, b \rangle = 1$. Si $y \in P_G(a, c)$, entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que $y = c + n_1 a$. Luego

$$y = c + n_1 a = (b + na) + n_1 a = b + (n + n_1)a \in P_G(a, b).$$

Esto prueba que $P_G(a, c) \subset P_G(a, b)$ y 2) se cumple.

Para probar 3), sean $b \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ tales que $\langle b, a_1 \rangle = \langle b, a_2 \rangle = 1$. Por el Teorema 2.4, $\langle b, a_1 a_2 \rangle = 1$. Si $x \in P_G(a_1 a_2, b)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $x = b + n(a_1 a_2)$. Por tanto, $x = b + (na_2)a_1 \in P_G(a_1, b)$ y $x = b + (na_1)a_2 \in P_G(a_2, b)$. Luego $x \in P_G(a_1, b) \cap P_G(a_2, b)$. Esto termina la prueba de 3). \square

Consideremos ahora la familia

$$\mathcal{B}_G = \{P_G(a, b) : (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ con } \langle a, b \rangle = 1\}.$$

Como indicamos en la Introducción, Golomb probó en [7] y en [8] que \mathcal{B}_G es base de la topología τ_G en \mathbb{N} que se indica en el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *La familia*

$$\tau_G = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{N}: \text{para cada } b \in U \text{ existe } a \in \mathbb{N} \text{ tal que } \langle a, b \rangle = 1 \text{ y } P_G(a, b) \subset U\},$$

es una topología en \mathbb{N} . Además $\mathcal{B}_G \subset \tau_G$ y \mathcal{B}_G es una base del espacio topológico (\mathbb{N}, τ_G) .

Demostración. Vamos a probar primero que τ_G es una topología. Por definición $\emptyset \in \tau_G$. Para cada $b \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{N}$ es tal que $\langle 1, b \rangle = 1$ y $P_G(1, b) \subset \mathbb{N}$. Por tanto, $\mathbb{N} \in \tau_G$. Sea $\{U_i: i \in I\}$ una familia de elementos en τ_G . Dada $b \in \bigcup_{i \in I} U_i$, existe $i_0 \in I$ tal que $b \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \in \tau_G$, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $\langle a, b \rangle = 1$ y $P_G(a, b) \subset U_{i_0}$. En vista de que $U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, deducimos que $P_G(a, b) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Esto prueba que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_G$.

Ahora supongamos que $U, V \in \tau_G$. Si $U \cap V = \emptyset$, entonces $U \cap V \in \tau_G$. Consideremos, por tanto, que $U \cap V \neq \emptyset$, y sea $b \in U \cap V$. Como $b \in U$, existe $a_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\langle b, a_1 \rangle = 1$ y $P_G(a_1, b) \subset U$. Como también $b \in V$, existe $a_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\langle b, a_2 \rangle = 1$ y $P_G(a_2, b) \subset V$. Notemos que $a_1 a_2 \in \mathbb{N}$. Además, por la propiedad 3) del Teorema 3.1, $\langle b, a_1 a_2 \rangle = 1$ y

$$P_G(a_1 a_2, b) \subset P_G(a_1, b) \cap P_G(a_2, b) \subset U \cap V.$$

Esto prueba que $U \cap V \in \tau_G$, por lo que τ_G es una topología en \mathbb{N} .

Para mostrar que $\mathcal{B}_G \subset \tau_G$, sea $P_G(a, b) \in \mathcal{B}_G$. Entonces $a, b \in \mathbb{N}$ y $\langle a, b \rangle = 1$. Si $c \in P_G(a, b)$, por la propiedad 2) del Teorema 3.1, $\langle a, c \rangle = 1$ y $P_G(a, c) \subset P_G(a, b)$. Luego $P_G(a, b) \in \tau_G$. Esto prueba que $\mathcal{B}_G \subset \tau_G$.

Tomemos ahora $U \in \tau_G$ y $b \in U$. Entonces existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $\langle a, b \rangle = 1$ y $P_G(a, b) \subset U$. Como $P_G(a, b) \in \mathcal{B}_G$ y $b \in P_G(a, b) \subset U$, resulta que U es una unión de elementos de \mathcal{B}_G . Como cada elemento de \mathcal{B}_G es abierto en (\mathbb{N}, τ_G) , tenemos que \mathcal{B}_G es una base del espacio topológico (\mathbb{N}, τ_G) . \square

4. Propiedades del espacio (\mathbb{N}, τ_G)

Vamos ahora a mostrar una serie de propiedades del espacio de Golomb (\mathbb{N}, τ_G) . Los Teoremas 4.1, 4.2, 4.3, 4.11, 4.28 y 4.29 se mencionaron en la Introducción, y fueron probados por Golomb.

Teorema 4.1. (\mathbb{N}, τ_G) es segundo numerable. Más aún, cada subconjunto abierto y no vacío en (\mathbb{N}, τ_G) es infinito.

Demostración. Por el Teorema 3.2, \mathcal{B}_G es una base del espacio topológico (\mathbb{N}, τ_G) . Sea $A = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \langle a, b \rangle = 1\}$. Como \mathbb{N} es numerable, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ también es numerable. Entonces $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Ahora consideremos la función $g: A \rightarrow \mathcal{B}_G$ definida, para $(a, b) \in A$, como $g(a, b) = P_G(a, b)$. Es claro que g es una función sobreyectiva y, como A es numerable, \mathcal{B}_G es numerable. Por tanto (\mathbb{N}, τ_G) es segundo numerable.

Sean U un subconjunto abierto y no vacío en (\mathbb{N}, τ_G) y $b \in U$. Como \mathcal{B}_G es una base de (\mathbb{N}, τ_G) , existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $\langle a, b \rangle = 1$ y $P_G(a, b) \subset U$. Por la propiedad 1) del Teorema 3.1, $P_G(a, b)$ es infinito. Luego U es infinito. \square

Teorema 4.2. Para cada $p \in \mathbb{P}$, $M(p)$ es cerrado en (\mathbb{N}, τ_G) .

Demostración. Como $p \in \mathbb{P}$, por el Teorema 2.5, $\langle p, i \rangle = 1$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Por tanto cada conjunto $P_G(p, i)$ es abierto en (\mathbb{N}, τ_G) . Además,

$$\mathbb{N} \setminus M(p) = \bigcup_{i=1}^{p-1} P_G(p, i).$$

La unión $\bigcup_{i=1}^{p-1} P_G(p, i)$ es un abierto en (\mathbb{N}, τ_G) . Entonces $\mathbb{N} \setminus M(p)$ es abierto en (\mathbb{N}, τ_G) y, así, $M(p)$ es cerrado en (\mathbb{N}, τ_G) . \square

Teorema 4.3. *El conjunto \mathbb{P} es infinito.*

Demostración. Por el Teorema de Factorización Única, todo número natural distinto de 1 es múltiplo de algún número primo. Por tanto

$$\mathbb{N} \setminus \{1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} M(p).$$

Si \mathbb{P} es finito, por el Teorema 4.2, $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} M(p)$ es una unión finita de subconjuntos cerrados en (\mathbb{N}, τ_G) . Luego $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} M(p)$ es cerrado en (\mathbb{N}, τ_G) y, por tanto, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ es cerrado en (\mathbb{N}, τ_G) . Entonces $\{1\}$ es abierto en (\mathbb{N}, τ_G) . Pero esto contradice el hecho de que los subconjuntos abiertos y no vacíos de (\mathbb{N}, τ_G) son infinitos. Por lo tanto, \mathbb{P} es infinito. \square

El siguiente resultado da una condición necesaria y suficiente para que dos elementos de la base \mathcal{B}_F se intersequen.

Teorema 4.4. *Sean $a, c \in \mathbb{N}$ y $b, d \in \mathbb{Z}$. Entonces $P_F(a, b) \cap P_F(c, d) \neq \emptyset$ si y sólo si $\langle a, c \rangle \mid (b - d)$.*

Demostración. Supongamos que $P_F(a, b) \cap P_F(c, d) \neq \emptyset$. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $ax + b = cy + d$. Luego $b - d = cy + a(-x)$, por lo que $b - d$ es una combinación lineal de a y c . Entonces, por la tercera parte del Teorema 2.3, $\langle a, c \rangle \mid (b - d)$.

Supongamos ahora que $\langle a, c \rangle \mid (b - d)$. Entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $b - d = z\langle a, c \rangle$. Por la primera parte del Teorema 2.3, existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $\langle a, c \rangle = as + ct$. Luego $b - d = asz + ctz$, de donde $d + c(tz) = b + a(-sz)$. Notemos que $d + c(tz) \in P_F(c, d)$ y $b + a(-sz) \in P_F(a, b)$. Luego $P_F(a, b) \cap P_F(c, d) \neq \emptyset$. \square

En la demostración del siguiente resultado utilizamos la Propiedad Arquimediana, la cual dice que si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $an > b$.

Teorema 4.5. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Entonces $P(a, b) \cap P(c, d) \neq \emptyset$ si y sólo si $\langle a, c \rangle \mid (b - d)$.*

Demostración. Supongamos que $P(a, b) \cap P(c, d) \neq \emptyset$. Sean $x, y \in \mathbb{N}$ tales que $ax + b = cy + d$. Luego $b - d = cy + a(-x)$, por lo que $b - d$ es una combinación lineal de a y c . Entonces, por la tercera parte del Teorema 2.3, $\langle a, c \rangle \mid (b - d)$.

Supongamos ahora que $\langle a, c \rangle \mid (b - d)$. Entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $b - d = z\langle a, c \rangle$. Por la primera parte del Teorema 2.3, existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $\langle a, c \rangle = as + ct$. Luego $b - d = asz + ctz$, de donde $d + c(tz) = b + a(-sz)$. Por la Propiedad Arquimediana,

existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $an_1 > -tz$ y $cn_2 > sz$. Sea $n = \max\{n_1, n_2\}$. Entonces $an + tz$ y $cn - sz$ son números naturales. Además

$$d + c(tz) + acn = b + a(-sz) + acn,$$

$$d + c(tz) + acn = d + c(tz + an) \in P(c, d)$$

y

$$b + a(-sz) + acn = b + a(cn - sz) \in P(a, b).$$

Luego, $P(c, d) \cap P(a, b) \neq \emptyset$. ✓

Corolario 4.6. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$. Si $\langle a, c \rangle = 1$, entonces $P(a, b) \cap M(c) \neq \emptyset$.

Demostración. Como $M(c) = P(c, c)$ y $\langle a, c \rangle = 1$, tenemos que $\langle a, c \rangle \mid (b - c)$. Entonces, por el Teorema 4.5, $P(a, b) \cap M(c) = P(a, b) \cap P(c, c) \neq \emptyset$. ✓

Teorema 4.7. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tales que $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle = 1$. Entonces $P_G(a, b) \cap P_G(c, d) \neq \emptyset$ si y sólo si $\langle a, c \rangle \mid (b - d)$.

Demostración. Supongamos que $P_G(a, b) \cap P_G(c, d) \neq \emptyset$. Entonces $P(a, b) \cap P(c, d) \neq \emptyset$ y, por el Teorema 4.5, $\langle a, c \rangle \mid (b - d)$. Supongamos ahora que $\langle a, c \rangle \mid (b - d)$. Entonces, por el Teorema 4.5, $P(a, b) \cap P(c, d) \neq \emptyset$. Como $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle = 1$, tenemos que $P(a, b) = P_G(a, b)$ y $P(c, d) = P_G(c, d)$. Luego $P_G(a, b) \cap P_G(c, d) \neq \emptyset$. ✓

El Teorema 4.7 aparece en la parte 2. de [12, Ejemplos 60 y 61, p. 82], y da una condición necesaria y suficiente para que dos elementos de la base \mathcal{B}_G se intersequen. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tales que $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle = 1$. Si $\langle a, c \rangle \neq 1$ entonces, por el Teorema 4.7,

$$P_G(a, b) \cap P_G(c, d) \neq \emptyset \quad \text{si y sólo si} \quad b \equiv d \pmod{\langle a, c \rangle}.$$

Teorema 4.8. Sean $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$. Si $\langle a, c \rangle = \langle a, e \rangle = \langle c, e \rangle = 1$, entonces $P(a, b) \cap P(c, d) \cap P(e, f) \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $a = 1$. Entonces $P(a, b) = \{b + n : n \in \mathbb{N}_0\}$ es el conjunto de números naturales mayores o iguales a b . Sean $z = d - f$, $g = \frac{b-f}{e}$ y $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = \langle c, e \rangle = cs + et$. Luego $d - f = (cs + et)z = csz + etz$, de donde $f + e(tz) = d + c(-sz)$. Por la Propiedad Arquimediana, existen $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tales que $cn_1 > -tz$, $en_2 > sz$ y $cn_3 > -tz + g$. Sea $n = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Entonces $cn \geq cn_1 > -tz$, por lo que $cn + tz \in \mathbb{N}$. También $en \geq en_2 > sz$, de donde $en - sz \in \mathbb{N}$. Además $cn \geq cn_3 > -tz + g$, por lo que $cn + tz > g = \frac{b-f}{e}$, luego $e(tz + cn) > b - f$, de donde $f + e(tz + cn) > b$. Así, $f + e(tz + cn) \in P(a, b)$. Como $f + e(tz) + ecn = d + c(-sz) + ecn$, tenemos que

$$f + e(tz) + ecn = f + e(tz + cn) \in P(e, f)$$

y

$$d + c(-sz) + ecn = d + c(en - sz) \in P(c, d).$$

Luego $f + e(tz) + ecn \in P(a, b) \cap P(c, d) \cap P(e, f)$, probando así que $P(a, b) \cap P(c, d) \cap P(e, f) \neq \emptyset$. Si $c = 1$ o bien $e = 1$, procediendo de manera similar se prueba que

$P(a, b) \cap P(c, d) \cap P(e, f) \neq \emptyset$. Supongamos, por tanto, que $a \geq 2$, $c \geq 2$ y $e \geq 2$. Consideremos el sistema de congruencias lineales

$$x \equiv b \pmod{a}, \quad x \equiv d \pmod{c}, \quad x \equiv f \pmod{e}.$$

Como $\langle a, c \rangle = \langle a, e \rangle = \langle c, e \rangle = 1$, por el Teorema Chino del Residuo (Teorema 2.11), existe un único entero k tal que $x \equiv k \pmod{ace}$. Sean $l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathbb{Z}$ tales que $x = acel_1 + k$, $x = al_2 + b$, $x = cl_3 + d$ y $x = el_4 + f$. Luego $acel_1 + k = al_2 + b$, $acel_1 + k = cl_3 + d$ y $acel_1 + k = el_4 + f$, de donde $k = a(l_2 - cel_1) + b$, $k = c(l_3 - ael_1) + d$ y $k = e(l_4 - acl_1) + f$. Por tanto, $k \equiv b \pmod{a}$, $k \equiv d \pmod{c}$ y $k \equiv f \pmod{e}$.

Por la Propiedad Arquimediana, existen $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tales que $cen_1 > cel_1 - l_2$, $aen_2 > ael_1 - l_3$ y $acn_3 > acl_1 - l_4$. Entonces $n = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ es un número natural tal que $cen + l_2 - cel_1$, $aen + l_3 - ael_1$ y $acn + l_4 - acl_1$ son números naturales. Luego

$$k + acen = (a(l_2 - cel_1) + b) + acen = a(cen + l_2 - cel_1) + b \in P(a, b),$$

$$k + acen = (c(l_3 - ael_1) + d) + acen = c(aen + l_3 - ael_1) + d \in P(c, d)$$

y

$$k + acen = (e(l_4 - acl_1) + f) + acen = e(acn + l_4 - acl_1) + f \in P(e, f).$$

Así, $k + acen \in P(a, b) \cap P(c, d) \cap P(e, f)$, de donde $P(a, b) \cap P(c, d) \cap P(e, f) \neq \emptyset$. \square

Como una aplicación del Teorema 4.5 tenemos el siguiente resultado, el cual aparece en [13, Lema 4.1, p. 904].

Teorema 4.9. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ con $b < a$. Si $P(a, b) \cap P(c, d) \neq \emptyset$ y $a \mid c$, entonces $P(c, d) \subset P(a, b)$.

Demostración. Como $P(a, b) \cap P(c, d) \neq \emptyset$, por el Teorema 4.5 $\langle a, c \rangle \mid (b - d)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $c = an$. Entonces $\langle a, c \rangle = \langle a, an \rangle = a\langle 1, n \rangle = a$. Luego $a \mid (b - d)$ y, como $a > b \geq 1$, tenemos que $b \equiv d \pmod{a}$. Notemos que $a \geq 2$ y $c = an$ implican que $c \geq 2$. Sea $y \in P(c, d)$. Entonces $y \in \mathbb{N}$, $c \mid (y - d)$ y, como $a \mid c$, resulta que $a \mid (y - d)$. Luego $y \equiv d \pmod{a}$. Ahora bien, como $b \equiv d \pmod{a}$ y $y \equiv d \pmod{a}$, se tiene que $y \equiv b \pmod{a}$. Luego $y \in P_F(a, b) \cap \mathbb{N}$ y, por el Teorema 2.8, $y \in P(a, b)$. \square

Como una aplicación del Teorema 4.7, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.10. Sean $a, x, y \in \mathbb{N}$ tales que $x \neq y$, $\max\{x, y\} < a$, $\langle a, x \rangle = \langle a, y \rangle = 1$. Entonces $P_G(a, x)$ y $P_G(a, y)$ son abiertos en (\mathbb{N}, τ_G) tales que $x \in P_G(a, x)$, $y \in P_G(a, y)$ y $P_G(a, x) \cap P_G(a, y) = \emptyset$. Además $y \notin \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a, x))$.

Demostración. Sean $c = \max\{x, y\}$ y $d = \min\{x, y\}$. Notemos que $\langle a, a \rangle = a$ y que $1 \leq d < c < a$. Como $\langle a, x \rangle = \langle a, y \rangle = 1$, $P_G(a, x)$ y $P_G(a, y)$ son abiertos en (\mathbb{N}, τ_G) tales que $x \in P_G(a, x)$ y $y \in P_G(a, y)$. Supongamos que $P_G(a, x) \cap P_G(a, y) \neq \emptyset$. Entonces, por el Teorema 4.7, $a \mid (x - y)$. Esto implica que $a \mid (c - d)$. Ahora bien, al ser a y $c - d$ enteros positivos, de $a \mid (c - d)$ se sigue que $a \leq c - d < c$. Luego $a < c$, lo cual contradice la desigualdad $c < a$. Esto prueba que $P_G(a, x) \cap P_G(a, y) = \emptyset$ y que $y \notin \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a, x))$. \square

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema 4.10.

Teorema 4.11. (\mathbb{N}, τ_G) es T_2 .

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{N}$ con $x \neq y$, Como \mathbb{P} es infinito, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $\max\{x, y\} < p$. Por el Teorema 2.5, $\langle p, x \rangle = \langle p, y \rangle = 1$. Luego, por el Teorema 4.10, $P_G(p, x)$ y $P_G(p, y)$ son abiertos en (\mathbb{N}, τ_G) tales que $x \in P_G(p, x)$, $y \in P_G(p, y)$ y $P_G(p, x) \cap P_G(p, y) = \emptyset$. Por tanto, (\mathbb{N}, τ_G) es T_2 . \square

Sean $a, x \in \mathbb{N}$. En [15] Szczuka presenta algunos resultados que involucran al conjunto $\text{cl}_{\mathbb{N}}(P(a, x))$. Por ejemplo, en [15, Lema 3.3, p. 16] se muestra que si $x_1 \equiv x \pmod{a}$, $x_1 \leq a$ y $\langle a, x \rangle = 1$, entonces $P_G(a, x_1) \subset \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a, x))$. En [15, Lema 3.5, p. 16] se prueba que si a y x son impares y $\langle a, x \rangle = 1$, entonces $\text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a, x)) = \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(2a, x))$. En el Teorema 4.10 indicamos condiciones bajo las cuales $P_G(a, x)$ no es denso en (\mathbb{N}, τ_G) . Como consecuencia del siguiente resultado, los múltiplos de a se encuentran en $\text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a, x))$.

Teorema 4.12. Sean $a, x \in \mathbb{N}$ tales que $\langle a, x \rangle = 1$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $M(a) \subset \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a^n, x))$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\langle a, x \rangle = 1$, por el Teorema 2.4, $\langle a^n, x \rangle = 1$. Tomemos $ab \in M(a)$ y un abierto W en (\mathbb{N}, τ_G) de modo que $ab \in W$. Sea $d \in \mathbb{N}$ tal que $\langle d, ab \rangle = 1$ y $P_G(d, ab) \subset W$. Si $\langle d, a^n \rangle \neq 1$, entonces existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \mid d$ y $p \mid a^n$. Por el Teorema 2.6, $p \mid a$. Entonces $p \mid d$ y $p \mid ab$, de donde $\langle d, ab \rangle \neq 1$, una contradicción. Luego $\langle d, a^n \rangle = 1$ y, por consiguiente, $\langle d, a^n \rangle \mid (ab - x)$. Esto implica, por el Teorema 4.7, que $P_G(d, ab) \cap P_G(a^n, x) \neq \emptyset$. Luego $W \cap P_G(a^n, x) \neq \emptyset$ y, así, $ab \in \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a^n, x))$. \square

Corolario 4.13. Para cada $d \in \mathbb{N}$, $P_G(1, d)$ es denso en (\mathbb{N}, τ_G) .

Demostración. Sean $d \in \mathbb{N}$ y $a = 1$. Entonces $\langle a, d \rangle = 1$, $M(a) = \mathbb{N}$ y, por el Teorema 4.12, $\mathbb{N} = M(a) \subset \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a, d))$, así que $P_G(a, d) = P_G(1, d)$ es denso en (\mathbb{N}, τ_G) . \square

Por el Teorema 4.10 y el Corolario 4.13, entre los miembros \mathcal{B}_G algunos son densos en (\mathbb{N}, τ_G) , y otros no. Es un problema abierto el caracterizar los elementos de \mathcal{B}_G y los de la forma $P(a, b)$, que son densos en (\mathbb{N}, τ_G) .

Teorema 4.14. Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $P_F(a, b) \cap \mathbb{N} \subset \text{cl}_{\mathbb{N}}(P(a, b))$.

Demostración. Notemos que si $b \leq a$, entonces por el Teorema 2.8, $P_F(a, b) \cap \mathbb{N} = P(a, b) \subset \text{cl}_{\mathbb{N}}(P(a, b))$. Sea $x \in P_F(a, b) \cap \mathbb{N}$. Entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $x = az + b$. Sean U un abierto en (\mathbb{N}, τ_G) y $c \in \mathbb{N}$ tales que $x \in U$, $\langle c, x \rangle = 1$ y $P_G(c, x) \subset U$. Como $\langle c, a \rangle \mid a$, sucede que $\langle c, a \rangle \mid az$. Luego $\langle c, a \rangle \mid (x - b)$ y, por el Teorema 4.5, $P_G(c, x) \cap P(a, b) = P(c, x) \cap P(a, b) \neq \emptyset$. Esto prueba que $x \in \text{cl}_{\mathbb{N}}(P(a, b))$. \square

Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$P_F(a, b) \cap \mathbb{N} = P(a, b) \cup \{b - an \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}.$$

En otras palabras, $P_F(a, b) \cap \mathbb{N}$ se consigue uniéndole a $P(a, b)$, aquellos elementos de la progresión aritmética $\{b - a, b - 2a, b - 3a, \dots\}$ que sean mayores o iguales a uno.

El siguiente resultado aparece en la parte 10. de [12, Ejemplos 60 y 61, p. 83]. La prueba que presentamos difiere de la dada en [12].

Teorema 4.15. *Sean $c \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{P}$ tales que $\langle p, c \rangle = 1$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(p^n, c)) = M(p) \cup [P_F(p^n, c) \cap \mathbb{N}]$.*

Demostración. Tomemos $n \in \mathbb{N}$. Como $\langle p, c \rangle = 1$, por el Teorema 2.4, $\langle p^n, c \rangle = 1$. Por el Teorema 4.14, $P_F(p^n, c) \cap \mathbb{N} \subset \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(p^n, c))$, y por el Teorema 4.12, $M(p) \subset \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(p^n, c))$. Por tanto $M(p) \cup [P_F(p^n, c) \cap \mathbb{N}] \subset \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(p^n, c))$. Para probar la otra contención, sea $x \in \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(p^n, c))$. Entonces $x \in \mathbb{N}$ y todo abierto básico en (\mathbb{N}, τ_G) que tiene a x , interseca a $P_G(p^n, c)$. Luego,

$$\text{para cada } t \in \mathbb{N} \text{ con } \langle t, x \rangle = 1, P_G(t, x) \cap P_G(p^n, c) \neq \emptyset. \quad (4)$$

Si $p \mid x$, entonces $x \in M(p)$. Consideremos, por tanto, que $p \nmid x$. Sea $t = p^n$. Notemos que $\langle p^n, p^n \rangle = p^n$. Supongamos que $\langle t, x \rangle = \langle p^n, x \rangle \neq 1$. Entonces existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \mid p^n$ y $q \mid x$. Por el Teorema 2.6, $q \mid p$. Esto implica que $q = p$, por lo que $p \mid x$, un absurdo. Luego $\langle t, x \rangle = \langle p^n, x \rangle = 1$ y, por (4), $P_G(p^n, x) \cap P_G(p^n, c) \neq \emptyset$. Aplicando el Teorema 4.7, deducimos que $p^n \mid (x - c)$, de donde $x \in P_F(p^n, c) \cap \mathbb{N}$. Con esto probamos que $\text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(p^n, c)) \subset M(p) \cup [P_F(p^n, c) \cap \mathbb{N}]$. \square

Sean $c \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{P}$ tales que $\langle p, c \rangle = 1$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $c < p^n$, por los Teoremas 2.8 y 4.15 tenemos que

$$\text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(p^n, c)) = M(p) \cup P_G(p^n, c).$$

Sean $a, x \in \mathbb{N}$ tales que $\langle a, x \rangle = 1$. Es un problema abierto el describir el conjunto $\text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a, x))$. Por el Teorema 4.12, $M(a) \cup P_G(a, x) \subset \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a, x))$. Sin embargo, describir a $\text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a, x)) \setminus (M(a) \cup P_G(a, x))$ parece un problema difícil. Hasta donde se ha investigado, solo se conocen los resultados de Szczuka que hemos mencionado, los Teoremas 4.10, 4.12, 4.15 y el Corolario 4.13.

Teorema 4.16. *Para cada $d \in \mathbb{N}$, $P_G(1, d)$ es de Brown en (\mathbb{N}, τ_G) . En particular, $P_G(1, d)$ es conexo.*

Demostración. Sean U y V dos abiertos no vacíos en $P_G(1, d)$. Como $P_G(1, d)$ es abierto en (\mathbb{N}, τ_G) , U y V son abiertos en (\mathbb{N}, τ_G) . Sean $x \in U$ y $y \in V$. Tomemos $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $\langle a, x \rangle = \langle b, y \rangle = 1$, $P_G(a, x) \subset U$ y $P_G(b, y) \subset V$. Si $a = 1$, entonces $P_G(a, x) = \{x + n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Como $P_G(b, y)$ es infinito, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $y + bn_0 \geq x$, y entonces

$$\begin{aligned} y + bn_0 &\in P_G(a, x) \cap P_G(b, y) \subset U \cap V \cap P_G(1, d) \\ &\subset \text{cl}_{\mathbb{N}}(U) \cap \text{cl}_{\mathbb{N}}(V) \cap P_G(1, d) = \text{cl}_{P_G(1, d)}(U) \cap \text{cl}_{P_G(1, d)}(V). \end{aligned}$$

Por tanto, $\text{cl}_{P_G(1, d)}(U) \cap \text{cl}_{P_G(1, d)}(V) \neq \emptyset$. De manera similar, si $b = 1$ tenemos que $\text{cl}_{P_G(1, d)}(U) \cap \text{cl}_{P_G(1, d)}(V) \neq \emptyset$. Ahora supongamos que $a \geq 2$ y $b \geq 2$. Por el Teorema 4.12, $M(a) \subset \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a, x))$ y $M(b) \subset \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(b, y))$. En particular, $abd \in \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a, x)) \cap \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(b, y))$. Como $a \geq 2$ y $b \geq 2$, tenemos que $d < abd$, así que $abd \in P_G(1, d)$. Luego

$$\begin{aligned} abd &\in \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a, x)) \cap \text{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(b, y)) \cap P_G(1, d) \\ &\subset \text{cl}_{\mathbb{N}}(U) \cap \text{cl}_{\mathbb{N}}(V) \cap P_G(1, d) = \text{cl}_{P_G(1, d)}(U) \cap \text{cl}_{P_G(1, d)}(V). \end{aligned}$$

Por tanto, $\text{cl}_{P_G(1,d)}(U) \cap \text{cl}_{P_G(1,d)}(V) \neq \emptyset$ y, así, $P_G(1, d)$ es de Brown en (\mathbb{N}, τ_G) . Como los espacios de Brown son conexos, $P_G(1, d)$ es conexo. \square

A continuación presentamos una prueba explícita de lo que M. Brown afirmó en el resumen de la plática que impartió en abril de 1953, y que comentamos en la Introducción.

Teorema 4.17. (\mathbb{N}, τ_G) es de Brown. En particular, (\mathbb{N}, τ_G) es conexo y no es $T_{2\frac{1}{2}}$.

Demostración. Como $P_G(1, 1) = \mathbb{N}$, el resultado se sigue del Teorema 4.16 y del hecho de que los espacios de Brown son conexos y no $T_{2\frac{1}{2}}$. \square

Sería interesante caracterizar los subconjuntos de (\mathbb{N}, τ_G) que son de Brown. En particular, caracterizar los conjuntos de la forma $P_G(a, b)$ y/o $P(a, b)$ que son de Brown en (\mathbb{N}, τ_G) . Como vimos en el Teorema 4.16, hay elementos de \mathcal{B}_G que son de Brown. En el Teorema 4.18 mostramos que también hay elementos de \mathcal{B}_G que no son de Brown.

Hemos demostrado que la conexidad del espacio (\mathbb{N}, τ_G) es consecuencia del hecho de que es de Brown. Existen otras propiedades que implican la conexidad. Por ejemplo, un espacio topológico X es *hiperconexo* si todo subconjunto abierto y no vacío de X , es denso en X . Decimos que X es *ultraconexo* si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, se cumple que $\text{cl}_X(\{x\}) \cap \text{cl}_X(\{y\}) \neq \emptyset$. Si X es hiperconexo, entonces X no contiene dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos. Por otro lado, si X es ultraconexo, entonces X no es T_1 y, en consecuencia, tampoco T_2 . Por lo tanto, todo espacio hiperconexo o ultraconexo es conexo pero no T_2 . No es complicado ver que todo espacio hiperconexo o ultraconexo es de Brown. El recíproco de esta afirmación no es cierto, pues como hemos visto, (\mathbb{N}, τ_G) es de Brown y T_2 , por lo que dicho espacio no es hiperconexo ni ultraconexo.

Por [4, Teoremas 3.1.9 y 3.3.1], los espacios compactos y T_2 , así como los espacios localmente compactos y T_2 , son T_4 y por tanto $T_{2\frac{1}{2}}$. Entonces (\mathbb{N}, τ_G) no es compacto ni localmente compacto. Estas observaciones también fueron hechas por Golomb en [7, Teorema 5] y [8, Teorema 5], aunque con demostraciones distintas a las que hemos presentado. Sería interesante determinar si (\mathbb{N}, τ_G) posee alguna propiedad de compacidad.

El siguiente resultado muestra que una buena cantidad de elementos de la forma $P_G(p, c)$, donde $p \in \mathbb{P}$, no son conexos en (\mathbb{N}, τ_G) . Hasta donde hemos investigado, el siguiente resultado aparece en la literatura por primera vez.

Teorema 4.18. Sean $c \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{P}$ con $\langle p, c \rangle = 1$. Tomemos $a, b \in P_G(p, c)$ tales que $a < b$ y $n, m \in \mathbb{N}_0$, de modo que $a = pm + c, b = pn + c$ y $0 \leq m < n$. Entonces

$$U = \bigcup_{i=0}^m P_G(p^{n+1}, pi + c) \quad y \quad V = \bigcup_{j=m+1}^{p^n-1} P_G(p^{n+1}, pj + c) \quad (5)$$

son abiertos en (\mathbb{N}, τ_G) y tales que $a \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset$ y $P_G(p, c) = U \cup V$. En particular, $P_G(p, c)$ no es conexo ni de Brown.

Demostración. Tomemos c, p, a, b, n y m como se indica en el teorema. Como $p \in \mathbb{P}$ y $\langle p, c \rangle = 1$, el Teorema 2.7 garantiza que $\langle p^{n+1}, pi + c \rangle = 1$, para cada $i \in \mathbb{N}_0$. Entonces podemos considerar los conjuntos U y V que se indican en (5), y estos son abiertos en

(\mathbb{N}, τ_G) . La propiedad 1) del Teorema 3.1 asegura que U y V son conjuntos infinitos. Como $0 \leq m < n < 2^n \leq p^n$, tenemos que $m + 1 \leq n \leq p^n - 1$. Por tanto,

$$a = pm + c = p^{n+1}(0) + pm + c \in P_G(p^{n+1}, pm + c) \subset \bigcup_{i=0}^m P_G(p^{n+1}, pi + c) = U$$

y

$$b = pn + c = p^{n+1}(0) + pn + c \in P_G(p^{n+1}, pn + c) \subset \bigcup_{j=m+1}^{p^n-1} P_G(p^{n+1}, pj + c) = V.$$

Es decir, $a \in U$ y $b \in V$. Para verificar que U y V son ajenos, supongamos, por el contrario, que existe $z \in U \cap V$. Sean $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ y $j \in \{m + 1, m + 2, \dots, p^n - 1\}$ tales que $z \in P_G(p^{n+1}, pi + c)$ y $z \in P_G(p^{n+1}, pj + c)$. Como $p^{n+1} > 1$, pues p es un número primo, tenemos que

$$z \equiv pi + c \pmod{p^{n+1}} \quad \text{y} \quad z \equiv pj + c \pmod{p^{n+1}}.$$

La transitividad de la congruencia y los incisos 1) y 3) del Teorema 2.10 implican que $pi + c \equiv pj + c \pmod{p^{n+1}}$, de donde $pi \equiv pj \pmod{p^{n+1}}$. Luego $i \equiv j \pmod{p^n}$. Sin embargo, como el conjunto $A = \{0, 1, \dots, m, m + 1, \dots, p^n - 1\}$ es un sistema completo de residuos módulo p^n , ningún par de elementos distintos de A son congruentes módulo p^n . En particular, como $i \leq m < m + 1 \leq j$, resulta que $i \not\equiv j \pmod{p^n}$. De esta contradicción se infiere que $U \cap V = \emptyset$.

Vamos a probar ahora que $U \cup V = P_G(p, c)$. Si $z \in U$, entonces existe $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ tal que $z \in P_G(p^{n+1}, pi + c)$. Tomemos $z_0 \in \mathbb{N}_0$ de modo que $z = p^{n+1}z_0 + pi + c$. Entonces $z = p(p^n z_0 + i) + c \in P_G(p, c)$. De manera similar, si $z \in V$, existe $j \in \{m + 1, m + 2, \dots, p^n - 1\}$ tal que $z \in P_G(p^{n+1}, pj + c)$. Al tomar $z_1 \in \mathbb{N}_0$ de modo que $z = p^{n+1}z_1 + pj + c$, deducimos que $z = p(p^n z_1 + j) + c \in P_G(p, c)$. Esto prueba que $U \cup V \subset P_G(p, c)$.

Para probar la otra contención, sea $z \in P_G(p, c)$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}_0$ para el cual $z = pk + c$. Por el Algoritmo de la División (Teorema 2.1) aplicado a k y p^n , existen $s, t \in \mathbb{N}_0$ de manera que $k = p^n s + t$ y $0 \leq t < p^n$. Así obtenemos

$$z = pk + c = p(p^n s + t) + c = p^{n+1}s + pt + c. \tag{6}$$

Como $0 \leq t < p^n$ y $0 \leq m < p^n$, se sigue que

$$t \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\} = \{0, 1, \dots, m\} \cup \{m + 1, m + 2, \dots, p^n - 1\}.$$

Luego, de (6),

$$z \in \left(\bigcup_{i=0}^m P_G(p^{n+1}, pi + c) \right) \cup \left(\bigcup_{j=m+1}^{p^n-1} P_G(p^{n+1}, pj + c) \right) = U \cup V.$$

Esto prueba que $P_G(p, c) \subset U \cup V$ y, como la otra contención también es cierta, $U \cup V = P_G(p, c)$. Así probamos la primera parte del teorema. Ahora bien, como el conjunto $P_G(p, c)$ ha sido escrito como la unión de dos conjuntos abiertos en (\mathbb{N}, τ_G) , que además son ajenos y no vacíos, $P_G(p, c)$ no es conexo. Como los espacios de Brown son conexos, $P_G(p, c)$ no es de Brown. \square

Sean $c \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{P}$ tales que $\langle p, c \rangle = 1$. Tomemos $a, b \in P_G(p, c)$ de modo que $b < a$. Usando las mismas ideas que mostramos en la prueba del Teorema 4.18, se sigue que existen abiertos U y V en (\mathbb{N}, τ_G) tales que $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$ y $P_G(p, c) = U \cup V$. Tenemos, por tanto, el siguiente resultado.

Teorema 4.19. *Sean $c \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{P}$ tales que $\langle p, c \rangle = 1$. Tomemos $a, b \in P_G(p, c)$ de modo que $a \neq b$. Entonces existen abiertos U y V en (\mathbb{N}, τ_G) tales que $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$ y $P_G(p, c) = U \cup V$. En otras palabras, $P_G(p, c)$ está totalmente separado.*

Como los espacios totalmente separados son hereditariamente desconexos, para cada $c \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{P}$ con $\langle p, c \rangle = 1$ el conjunto $P_G(p, c)$ es hereditariamente desconexo. Utilizando esto, presentamos algunas consecuencias del Teorema 4.19. Como mencionamos en la Introducción, en 1969 Kirch probó que (\mathbb{N}, τ_G) no es localmente conexo en 1. En el siguiente teorema generalizamos este resultado.

Teorema 4.20. *Para ningún $d \in \mathbb{N}$, $P_G(1, d)$ es conexo en pequeño, o bien casi conexo en pequeño en todos sus puntos.*

Demostración. Sea $d \in \mathbb{N}$ y supongamos, por el contrario, que $P_G(1, d)$ es conexo en pequeño, o bien casi conexo en pequeño en algún punto $c \in P_G(1, d)$. Definimos un conjunto $P_G(p, c)$ como sigue: si c es impar, sea $p = 2$. Si c es par, tomamos $p \in \mathbb{P}$ tal que $c < p$. En cualquier caso, $p \in \mathbb{P}$, $\langle p, c \rangle = 1$ y $P_G(p, c)$ es un subconjunto abierto de $P_G(1, d)$ tal que $c \in P_G(p, c)$. Como $P_G(1, d)$ es conexo en pequeño o bien casi conexo en pequeño en c , existe un subconjunto conexo C de $P_G(1, d)$ tal que $\text{int}_{P_G(1, d)}(C) \neq \emptyset$ y $C \subset P_G(p, c)$. Al ser $P_G(1, d)$ abierto en (\mathbb{N}, τ_G) , tenemos que $\text{int}_{\mathbb{N}}(C) \neq \emptyset$. Como los subconjuntos abiertos y no vacíos de (\mathbb{N}, τ_G) son infinitos, el conjunto C es infinito. Esto contradice el hecho de que $P_G(p, c)$ es hereditariamente desconexo. Por tanto, $P_G(1, d)$ no es conexo en pequeño ni casi conexo en pequeño en c . \square

Corolario 4.21. *(\mathbb{N}, τ_G) no es conexo en pequeño ni casi conexo en pequeño en ninguno de sus puntos. En particular (\mathbb{N}, τ_G) no es localmente conexo.*

Demostración. Como $P_G(1, 1) = \mathbb{N}$, la primera parte se sigue del Teorema 4.20. Si (\mathbb{N}, τ_G) es localmente conexo, entonces (\mathbb{N}, τ_G) es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos, lo cual contradice el Teorema 4.20. \square

Hemos visto que la base \mathcal{B}_G posee elementos que son conexos, y también elementos que son hereditariamente desconexos. Sería interesante poder encontrar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales dos elementos de \mathcal{B}_G son homeomorfos. Incluso encontrar condiciones bajo las cuales un elemento de \mathcal{B}_G sea una imagen continua de otro elemento de \mathcal{B}_G .

Para $a \in \mathbb{N}$, definimos $\Theta(a) = \{p \in \mathbb{P} : p \mid a\}$. Observemos que $\Theta(1) = \emptyset$. El siguiente resultado aparece en [13, Teorema 3.3]. La prueba que presentamos es diferente, e incluso más corta, a la dada en el artículo [13], pues utilizamos el Teorema 4.19.

Teorema 4.22. *Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Entonces $P(a, b)$ es conexo en (\mathbb{N}, τ_G) si y sólo si $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. En particular,*

- 1) $M(a)$ es conexo en (\mathbb{N}, τ_G) ;
- 2) si $\langle a, b \rangle = 1$, entonces $P_G(a, b)$ es conexo en (\mathbb{N}, τ_G) si y sólo si $a = 1$.

Demostración. Supongamos que $P(a, b)$ es conexo. Si $\Theta(a)$ no es un subconjunto de $\Theta(b)$, entonces $a > 1$ y existe $p \in \Theta(a)$ tal que $p \notin \Theta(b)$. Luego p es un número primo que divide a a pero no a b . Por tanto, $\langle p, b \rangle = 1$. Como $p \mid a$, tenemos que $P(a, b) \subset P_G(p, b)$. Del Teorema 4.19 se sigue que $P_G(p, b)$ es hereditariamente desconexo, así que $P(a, b)$ posee solo un elemento, lo cual es una contradicción. Esto prueba que $\Theta(a) \subset \Theta(b)$.

Ahora supongamos que $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. Si $P(a, b)$ no es conexo, entonces existen dos subconjuntos no vacíos O_1 y O_2 de $P(a, b)$, abiertos en el subespacio $P(a, b)$ de (\mathbb{N}, τ_G) y tales que $P(a, b) = O_1 \cup O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Sean U_1 y U_2 abiertos en (\mathbb{N}, τ_G) tales que $O_1 = U_1 \cap P(a, b)$ y $O_2 = U_2 \cap P(a, b)$. Consideremos $b_1 \in O_1$ y $b_2 \in O_2$. Como $b_1 \in U_1$, $b_2 \in U_2$ y tanto U_1 como U_2 son abiertos en (\mathbb{N}, τ_G) , existen $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ tales que $\langle a_1, b_1 \rangle = \langle a_2, b_2 \rangle = 1$, $P_G(a_1, b_1) \subset U_1$ y $P_G(a_2, b_2) \subset U_2$.

Vamos a probar que $\langle a, a_1 \rangle = 1$. Para esto, supongamos que $\langle a, a_1 \rangle \neq 1$. Entonces existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \mid a$ y $p \mid a_1$. Luego $p \in \Theta(a)$ y, como $\Theta(a) \subset \Theta(b)$, tenemos que $p \in \Theta(b)$. Luego $p \mid b$ y $p \mid a_1$. Ahora bien, como $b_1 \in O_1 \subset P(a, b)$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b_1 = an_1 + b$. En vista de que a y b son múltiplos de p , de la igualdad $b_1 = an_1 + b$, se sigue que $p \mid b_1$. Luego $p \mid a_1$ y $p \mid b_1$, de donde $p \mid \langle a_1, b_1 \rangle$, es decir $p \mid 1$. Esto es un absurdo, luego $\langle a, a_1 \rangle = 1$. De manera similar, se prueba que $\langle a, a_2 \rangle = 1$. Luego, por el Corolario 4.6,

$$P(a, b) \cap M(a_1) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad P(a, b) \cap M(a_2) \neq \emptyset.$$

Ahora vamos a probar que $P(a, b) \cap M(a_1) \subset O_1$. Tomemos un elemento $d \in P(a, b) \cap M(a_1)$. Como $P(a, b) = O_1 \cup O_2$, tenemos que $d \in O_1$ o bien $d \in O_2$. Supongamos que $d \in O_2$. Entonces $d \in U_2$ y, como U_2 es abierto en (\mathbb{N}, τ_G) , existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $\langle c, d \rangle = 1$ y $P_G(c, d) \subset U_2$. Si existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \mid c$ y $p \mid a_1$, entonces, como d es un múltiplo de a_1 y $p \mid a_1$, tenemos que $p \mid d$. Luego $p \mid c$ y $p \mid d$, de donde $p \mid \langle c, d \rangle$, es decir $p \mid 1$. Esto es absurdo, así que $\langle c, a_1 \rangle = 1$. Ahora supongamos que existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \mid a$ y $p \mid c$. Como $\Theta(a) \subset \Theta(b)$ y $p \in \Theta(a)$, tenemos que $p \in \Theta(b)$. Luego $p \mid b$ y, en vista de que $d \in P(a, b)$ y tanto a como b son múltiplos de p , tenemos que $p \mid d$. Entonces $p \mid c$ y $p \mid d$, de donde $p \mid \langle c, d \rangle$. Así $p \mid 1$, lo cual es absurdo. Esto prueba que $\langle a, c \rangle = 1$.

Notemos que a, c , y a_1 son números naturales tales que $\langle a_1, c \rangle = \langle a_1, a \rangle = \langle c, a \rangle = 1$. Entonces, por el Teorema 4.8, $P_G(a_1, b_1) \cap P_G(c, d) \cap P(a, b) \neq \emptyset$. Esto implica que

$$\begin{aligned} \emptyset \neq P(a_1, b_1) \cap P_G(c, d) \cap P(a, b) &\subset U_1 \cap U_2 \cap P(a, b) \\ &= (U_1 \cap P(a, b)) \cap (U_2 \cap P(a, b)) = O_1 \cap O_2. \end{aligned}$$

Luego $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Entonces $d \in O_1$, probando con esto que $P(a, b) \cap M(a_1) \subset O_1$. De manera similar se prueba que $P(a, b) \cap M(a_2) \subset O_2$. Como $\langle a, a_1 \rangle = \langle a, a_2 \rangle = 1$, por el Teorema 2.4, $\langle a, a_1 a_2 \rangle = 1$. Luego, por el Corolario 4.6, $P(a, b) \cap M(a_1 a_2) \neq \emptyset$. Ahora bien, notemos que

$$\emptyset \neq P(a, b) \cap M(a_1 a_2) \subset (P(a, b) \cap M(a_1)) \cap (P(a, b) \cap M(a_2)) \subset O_1 \cap O_2.$$

Esto contradice el hecho de que $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Dicha contradicción proviene de suponer que $P(a, b)$ no es conexo. Por tanto, $P(a, b)$ es conexo.

Para probar 1), notemos que $M(a) = P(a, a)$ y, como $\Theta(a) \subset \Theta(a)$, por la primera parte del teorema $M(a)$ es conexo en (\mathbb{N}, τ_G) .

Para probar 2) supongamos primero que $\langle a, b \rangle = 1$ y que $P_G(a, b)$ es conexo. Entonces, por la primera parte del teorema, $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. Si $a \geq 2$, entonces existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \mid a$, por lo que también $p \mid b$, contradiciendo que $\langle a, b \rangle = 1$. Luego $a = 1$. El recíproco se sigue del Teorema 4.16. \square

A continuación presentamos un resultado que pertenece a la Teoría Analítica de Números, y es llamado el *Teorema de Dirichlet*.

Teorema 4.23. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ con $a > 1$ y $\langle a, b \rangle = 1$. Entonces existe una cantidad infinita de números primos p , para los cuales $p \equiv b \pmod{a}$.

La prueba del Teorema de Dirichlet utiliza propiedades de ciertas funciones multiplicativas, y varios resultados sobre aritmética de números complejos. En vista de que es bastante dispendiosa, no suele incluirse en textos clásicos de Teoría de Números. Una prueba detallada se puede consultar en [1, Sección 7.3, p. 148].

Sean $a, b \in \mathbb{N}$ con $a > 1$ y $\langle a, b \rangle = 1$. Tomemos $p \in \mathbb{P}$. Notemos que $p \equiv b \pmod{a}$ si y sólo si $p \in P_F(a, b) \cap \mathbb{P}$. Por tanto, en términos de los elementos de la base \mathcal{B}_F de τ_F el Teorema de Dirichlet dice que si $a, b \in \mathbb{N}$ son tales que $a > 1$ y $\langle a, b \rangle = 1$, entonces el conjunto $P_F(a, b) \cap \mathbb{P}$ es infinito. Si $a = 1$, entonces $P_F(a, b) \cap \mathbb{P}$ es infinito, pues $P_F(a, b) = P_F(1, b) = \mathbb{Z}$ y, por tanto, $P_F(a, b) \cap \mathbb{P} = \mathbb{P}$ es infinito (Teorema 4.3). Tenemos entonces que

(\star) si $a, b \in \mathbb{N}$ y $\langle a, b \rangle = 1$, entonces $P_F(a, b) \cap \mathbb{P}$ es infinito.

Utilizaremos (\star) para probar que, en el espacio (\mathbb{Z}, τ_F) , la cerradura del conjunto $\mathbb{P}_0 = \{\pm p : p \in \mathbb{P}\}$ es $\mathbb{P}_0 \cup \{-1, 1\}$. Los elementos de \mathbb{P}_0 se llaman *enteros primos*.

Teorema 4.24. $\text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P}_0) = \mathbb{P}_0 \cup \{-1, 1\}$.

Demostración. Sea $b \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Hagamos $a = 2|b|$, donde $|b|$ es el valor absoluto de b . Entonces $|b| = b$ si $b \geq 0$, mientras que $|b| = -b$ si $b < 0$. Por esta razón, podemos decir que $|b| = \pm b$. Ahora bien, $x \in P_F(a, b)$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x = an + b = 2|b|n + b = \pm 2bn + b = b(1 \pm 2n).$$

Como $b \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, el producto $b(1 \pm 2n)$ es un entero primo si y sólo si $n = 0$, caso en el cual dicho número coincide con b . Por tanto,

$$P_F(a, b) \cap \mathbb{P}_0 = \begin{cases} \{b\}, & \text{si } b \in \mathbb{P}_0; \\ \emptyset, & \text{si } b \notin \mathbb{P}_0. \end{cases}$$

Esto muestra que si $b \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ y, además, $b \notin \mathbb{P}_0$, entonces $P_F(2|b|, b)$ es un abierto en (\mathbb{Z}, τ_F) que tiene a b y no interseca a \mathbb{P}_0 . Luego, $b \notin \text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P}_0)$. Naturalmente $\mathbb{P}_0 \subset \text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P}_0)$, por lo que, para determinar $\text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P}_0)$, solo debemos verificar si contiene los enteros $-1, 0$ y 1 . Notemos que $P_F(4, 0)$ es un abierto en (\mathbb{Z}, τ_F) que tiene a 0 . Como $P_F(4, 0) = \{4z : z \in \mathbb{Z}\}$ es el conjunto de los enteros que son múltiplos de 4 ,

resulta que $P_F(4, 0) \cap \mathbb{P}_0 = \emptyset$. Luego $0 \notin \text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P}_0)$. Consideremos ahora un abierto U en (\mathbb{Z}, τ_F) tal que $1 \in U$. Entonces existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $P_F(c, 1) \subset U$. Como $\langle c, 1 \rangle = 1$, por (\star) $P_F(c, 1) \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$. En particular $U \cap \mathbb{P}_0 \neq \emptyset$. Esto prueba que $1 \in \text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P}_0)$. De manera similar se prueba que $-1 \in \text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P}_0)$. Por consiguiente, $\text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P}_0) = \mathbb{P}_0 \cup \{-1, 1\}$. \square

Corolario 4.25. $\text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P}) = \mathbb{P} \cup \{-1, 1\}$ y $\text{cl}_{(\mathbb{N}, (\tau_F)_{\mathbb{N}})}(\mathbb{P}) = \mathbb{P} \cup \{1\}$, donde $(\tau_F)_{\mathbb{N}}$ es la topología relativa de (\mathbb{Z}, τ_F) a \mathbb{N} .

Demostración. Como $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}_0$, por el Teorema 4.24,

$$\mathbb{P} \subset \text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P}) \subset \text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P}_0) = \mathbb{P}_0 \cup \{-1, 1\}.$$

Por tanto, para determinar $\text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P})$, debemos verificar si contiene los enteros $-1, 1$ y los de la forma $-p$, donde $p \in \mathbb{P}$. Sea U un abierto en (\mathbb{Z}, τ_F) tal que $1 \in U$. Entonces existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $P_F(c, 1) \subset U$. Como $\langle c, 1 \rangle = 1$, por (\star) $P_F(c, 1) \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$. En particular, $U \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$. Esto prueba que $1 \in \text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P})$. De manera similar se prueba que $-1 \in \text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P})$. Supongamos ahora que $p \in \mathbb{P}$. Notemos que $x \in P_F(3p, -p)$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 3pn - p = p(3n - 1)$. Como $p \in \mathbb{P}$ para ningún $n \in \mathbb{Z}$, el producto $p(3n - 1)$ es un número primo. Por tanto, $P_F(3p, -p)$ es un abierto en (\mathbb{Z}, τ_F) tal que $-p \in P_F(3p, -p)$ y $P_F(3p, -p) \cap \mathbb{P} = \emptyset$. Luego, $-p \notin \text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P})$. Esto prueba que $\text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P}) = \mathbb{P} \cup \{-1, 1\}$. Para probar la segunda parte, notemos que

$$\text{cl}_{(\mathbb{N}, (\tau_F)_{\mathbb{N}})}(\mathbb{P}) = \text{cl}_{(\mathbb{Z}, \tau_F)}(\mathbb{P}) \cap \mathbb{N} = (\mathbb{P} \cup \{-1, 1\}) \cap \mathbb{N} = \mathbb{P} \cup \{1\}. \quad \square$$

En el Corolario 4.25 indicamos que la cerradura de \mathbb{P} en el espacio $(\mathbb{N}, (\tau_F)_{\mathbb{N}})$ es $\mathbb{P} \cup \{1\}$, por lo que \mathbb{P} no es denso en $(\mathbb{N}, (\tau_F)_{\mathbb{N}})$. Como mostramos en el Teorema 4.28, \mathbb{P} es denso en (\mathbb{N}, τ_G) . Para probar esto necesitamos unos resultados previos.

Teorema 4.26. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- 1) para cada $P_G(a, b) \in \mathcal{B}_G$, $P_G(a, b) \cap \mathbb{P}$ es infinito;
- 2) para cada $P_G(a, b) \in \mathcal{B}_G$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $an + b \in \mathbb{P}$.

Demostración. Es claro que 1) implica 2). Supongamos ahora que 2) se cumple. Sea $P_G(a, b) \in \mathcal{B}_G$. Por 2), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $an_1 + b \in \mathbb{P}$. Como $a < an_1 + b$ y $an_1 + b \in \mathbb{P}$, por el Teorema 2.5 $\langle a, an_1 + b \rangle = 1$. Entonces $P_G(a, an_1 + b) \in \mathcal{B}_G$ y, por 2), existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $an_2 + (an_1 + b) = a(n_2 + n_1) + b \in \mathbb{P}$. Entonces $P_G(a, b)$ contiene por lo menos dos números primos, a saber $an_1 + b$ y $a(n_2 + n_1) + b$. Como $a < a(n_2 + n_1) + b$ y $a(n_2 + n_1) + b \in \mathbb{P}$, por el Teorema 2.5 $\langle a, a(n_2 + n_1) + b \rangle = 1$. Por tanto, $P_G(a, a(n_2 + n_1) + b) \in \mathcal{B}_G$ y, por 2), existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $an_3 + a(n_2 + n_1) + b = a(n_3 + n_2 + n_1) + b \in \mathbb{P}$. Entonces $P_G(a, b)$ contiene por lo menos tres números primos, a saber $an_1, a(n_2 + n_1) + b$ y $a(n_3 + n_2 + n_1) + b$. Continuando de esta manera, resulta que el conjunto $P_G(a, b)$ contiene una cantidad infinita de números primos. Esto muestra que 2) implica 1). \square

El Teorema de Dirichlet (Teorema 4.23) se puede enunciar en términos de elementos de la base \mathcal{B}_G . Dado $P_G(a, b) \in \mathcal{B}_G$, con $a > 1$, el Teorema de Dirichlet asegura que $P_G(a, b)$ contiene una cantidad infinita de números primos. Si $a = 1$ y $b \in \mathbb{N}$, entonces $\langle a, b \rangle = 1$ y $P_G(a, b) = \{b, b + 1, b + 2, \dots\}$ contiene una cantidad infinita de números primos. Por tanto, para cada $P_G(a, b) \in \mathcal{B}_G$ se tiene que $P_G(a, b)$ contiene una cantidad infinita de números primos. Con esta observación será más práctico probar la siguiente equivalencia.

Teorema 4.27. *El Teorema de Dirichlet es equivalente a afirmar que \mathbb{P} es denso en (\mathbb{N}, τ_G) .*

Demostración. Supongamos que el Teorema de Dirichlet es cierto. Para ver que \mathbb{P} es denso en (\mathbb{N}, τ_G) , sea U un abierto no vacío en (\mathbb{N}, τ_G) . Tomemos $b \in U$ y $a \in \mathbb{N}$ de modo que $\langle a, b \rangle = 1$ y $P_G(a, b) \subset U$. Como el Teorema de Dirichlet es válido, $P_G(a, b)$ contiene una cantidad infinita de números primos. En particular $P_G(a, b) \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$. Luego $U \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$. Esto prueba que \mathbb{P} es denso en (\mathbb{N}, τ_G) .

Ahora supongamos que \mathbb{P} es denso en (\mathbb{N}, τ_G) . Sean $P_G(a, b) \in \mathcal{B}_G$ y $c \in P_G(a, b)$ tales que $c \neq b$. Por la parte 2) del Teorema 3.1, $\langle a, c \rangle = 1$ y $P_G(a, c) \subset P_G(a, b)$. Como $P_G(a, c)$ es un abierto no vacío en (\mathbb{N}, τ_G) y \mathbb{P} es denso en (\mathbb{N}, τ_G) , sucede que $P_G(a, c) \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$. Esto implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $an + b \in \mathbb{P}$ y, por el Teorema 4.26, $P_G(a, b)$ contiene una cantidad infinita de números primos. Por tanto, el Teorema de Dirichlet se cumple. \square

El Teorema 4.27 indica que una afirmación aritmética (el Teorema de Dirichlet, en este caso) es equivalente a una afirmación topológica (que \mathbb{P} es denso en (\mathbb{N}, τ_G)). Como el Teorema de Dirichlet es cierto, por el Teorema 4.27, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.28. *\mathbb{P} es denso en (\mathbb{N}, τ_G) .*

Si podemos probar el Teorema 4.28, sin utilizar el Teorema de Dirichlet, posiblemente usando solamente argumentos topológicos, entonces por el Teorema 4.27 tendremos una demostración, en este caso topológica, del Teorema de Dirichlet. Como ya indicamos, la prueba que se conoce del Teorema de Dirichlet es compleja, por lo que resulta interesante saber si se pueden dar demostraciones alternativas y menos complicadas. Tanto en [7] como en [8], Golomb pregunta si es posible probar el Teorema 4.28, sin utilizar el Teorema de Dirichlet. Hasta donde sabemos, el problema permanece abierto.

El siguiente resultado asegura que \mathbb{P} tiene interior vacío. En particular, \mathbb{P} no es abierto en (\mathbb{N}, τ_G) .

Teorema 4.29. *No existe un abierto no vacío U en (\mathbb{N}, τ_G) tal que $U \subset \mathbb{P}$.*

Demostración. Supongamos que existe un abierto no vacío U en (\mathbb{N}, τ_G) tal que $U \subset \mathbb{P}$. Tomemos $b \in U$ y $a \in \mathbb{N}$ de manera que $\langle a, b \rangle = 1$ y $P_G(a, b) \subset U$. Entonces cada miembro de $P_G(a, b)$ es un número primo. En particular, $b \geq 2$ y el elemento $a(a + b + 1) + b$, de $P_G(a, b)$, es primo. Sin embargo, como $a + 1 \geq 2$, $a + b \geq 3$ y

$$a(a + b + 1) + b = a(a + 1) + ab + b = a(a + 1) + b(a + 1) = (a + 1)(a + b);$$

así, el número $a(a + b + 1) + b$ es compuesto. De esta contradicción deducimos que no existe un abierto no vacío U en (\mathbb{N}, τ_G) tal que $U \subset \mathbb{P}$. \square

Un espacio topológico X es *homogéneo* si para cada $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $f: X \rightarrow X$ tal que $f(x) = y$. Es un problema abierto el determinar si (\mathbb{N}, τ_G) es homogéneo.

Agradecimientos

Los autores agradecen las correcciones sugeridas por el árbitro pues, gracias a ellas, se cuenta ahora con lo que consideramos una mejor versión del presente trabajo, el cual ha sido apoyado parcialmente por la Asociación Mexicana de Cultura A. C.

Referencias

- [1] Apostol T.M., *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer Verlag, New York-Heidelberg, 1976.
- [2] Brown M., “A countable connected Hausdorff space”, in *The April Meeting in New York*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 59 (1953), No. 4, 367.
- [3] Clark P.L., Lebowitz-Lockard N. and Pollack P., “A note on Golomb topologies”, *Preprint*.
- [4] Engelking R., *General Topology*, Revised and Completed Edition, Sigma Series in Pure Mathematics Vol.6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [5] Fine B. and Rosenberger G., *Number Theory. An Introduction via the Density of Primes*, Second Edition, Birkhäuser, 2016.
- [6] Furstenberg H., “On the infinitude of primes”, *Amer. Math. Monthly* 62 (1955), No. 5, 353.
- [7] Golomb S.W., “A connected topology for the integers”, *Amer. Math. Monthly* 66 (1959), No 8, 663–665.
- [8] Golomb S.W., “Arithmetica topologica”, *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra*, Proceedings of the Symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962, 179–186.
- [9] Kirch A.M., “A countable, connected, locally connected Hausdorff space”, *Amer. Math. Monthly* 76 (1969), No. 2, 169–171.
- [10] Margalef Roig J., Outerelo Domínguez E. and Pinilla Ferrando J.L., *Topología*, Editorial Alhambra, Madrid, 1979.
- [11] Niven I., Zuckerman H.S. and Montgomery H.L., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth Edition, John Wiley and Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1991.
- [12] Steen L.A. and Seebach Jr. J.A., *Counterexamples in Topology*, Reprint of the Second (1978) Edition Original Springer-Verlag, New York. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1995.
- [13] Szczuka P., “The connectedness of arithmetic progressions in Furstenberg’s, Golomb’s and Kirch’s topologies”, *Demonstratio Math.* 43 (2010), No. 4, 899–909.
- [14] Szczuka P., “Connections between connected topological spaces on the set of positive integers”, *Cent. Eur. J. Math.* 11 (2013), No. 5, 876–881.
- [15] Szczuka P., “Regular open arithmetic progressions in connected topological spaces on the set of positive integers”, *Glas. Mat. Ser. III* 49(69)(2014), No. 1, 13–23.

- [16] Szczuka P., “The closures of arithmetic progressions in the common division topology on the set of positive integers”, *Cent, Eur. J. Math.* 12 (2014), No. 7, 1008–1014.
- [17] Szczuka P., “The closures of arithmetic progressions in Kirch’s topology on the set of positive integers”, *Int. J. Number Theory* 11 (2015), No. 3, 673–682.
- [18] Szczuka P., “Properties of the division topology on the set of positive integers”, *Int. J. Number Theory* 12 (2016), No. 3, 775–785.
- [19] Willard S., *General Topology*, Reprint of the 1970 Original Addison-Wesley, Rending, MA. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2004.