Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 39, N° 2, 2021, pág. 129–135

Una nueva prueba para una conjetura de Özban

Aníbal Coronel [a] ✉, Esperanza Lozada [b]

[a,b] Universidad del Bío-Bío, Departamento de Ciencias Básicas, Chillán, Chile.

Resumen. En este artículo presentamos una prueba corta y elemental de la siguiente desigualdad algebraico-trigonométrica de tipo Laub-Ilani: $\cos(x^y)+\cos(y^x) \geq \cos(x^x)+\cos(y^y)$ para $x, y \in [0, \pi/2]$ que fue conjeturada por Özban ['New algebraic-trigonometric inequalities of Laub-Ilani type', Bull. Aust. Math. Soc. 96 (2017), 87–97] y recientemente probada por Matejíčka ['Proof of one open inequality of Laub-Ilani type', Journal of Mathematical Inequalities, 14 (2020), 83–98]. La prueba se basa en las propiedades de las funciones potenciales-exponenciales y trigonométricas.

Palabras clave: Desigualdad de Laub-Ilani, desigualdad trigonométrica, desigualdad algebraica-trigonométrica, desigualdad potencial-exponencial.

MSC2010: 26D05, 26D07, 26D20.

A new proof for a Özban conjecture

Abstract. In this paper, we present an elementary short proof of the following algebraic-trigonometric inequality of Laub-Ilani type: $\cos(x^y)+\cos(y^x) \geq \cos(x^x)+\cos(y^y)$ for $x, y \in [0, \pi/2]$ which was conjectured by Özban ['New algebraic-trigonometric inequalities of Laub-Ilani type', Bull. Aust. Math. Soc. 96 (2017), 87–97] and recently proved by Matejíčka ['Proof of one open inequality of Laub-Ilani type', Journal of Mathematical Inequalities, 14 (2020), 83–98]. The proof is based on the properties of the power-exponential and trigonometric functions.

Keywords: Laub-Ilani inequality, trigonometric inequality, algebraic-trigonometric inequality, power-exponential inequality.

E-mail: acoronel@ubiobio.cl [a] ✉, elozada@udec.cl [b].
Recibido: 8 de septiembre 2020, Aceptado: 23 de marzo 2021.
Para citar este artículo: A. Coronel & E. Lozada, Una nueva prueba para una conjetura de Özban, *Rev. Integr. Temas Mat.,* 39 (2021), No. 2, 129-135. doi: 10.18273/revint.v39n2-2021001

1. Introducción

La siguiente desigualdad

$$\cos(x^x) + \cos(y^y) < \cos(x^y) + \cos(y^x), \quad 0 < x < y \leq \pi/2, \tag{1}$$

fue conjeturada por Özban en [15] y fue probada recientemente por Matejíčka [11]. Se recuerda que la introducción de varias desigualdades algebraico-trigonométricas por Özban [15], se inspiró en la siguiente desigualdad exponencial-potencial

$$x^x + y^y \geq x^y + y^x, \quad x, y \in [0, \infty), \tag{2}$$

que fue probada de forma independiente por Laub-Ilani [6, 5] y Zeikii-Cirtoaje-Berndt [17, 2]. Para obtener detalles importantes sobre generalizaciones, extensiones y desigualdades relacionadas con (2), consultar las referencias [4, 3, 1, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16]. Además, se observa que la prueba de (1) desarrollada por Matejíčka en [11] se basa en métodos de análisis matemático y numérico. Sin embargo, se puede construir una prueba alternativa basada en las propiedades elementales de las funciones exponencial, potencial y trigonométricas. Así, el objetivo de este artículo es presentar una prueba alternativa de (1) y extender la desigualdad al caso $x, y \in [0, \pi/2]$, es decir, se demostrará el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *La siguiente desigualdad*

$$\cos(x^x) + \cos(y^y) \leq \cos(x^y) + \cos(y^x), \quad x, y \in [0, \pi/2], \tag{3}$$

es válida.

2. Prueba del Teorema 1.1

Se introduce la notación $S = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ y los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
\hat{S} &= S - \{(0,0)\}, & S_1^u &= \{(x,y) \in \hat{S} \ : \ x < y \leq 1\},\\
S_2^u &= \{(x,y) \in \hat{S} \ : \ x < 1 < y\}, & S_3^u &= \{(x,y) \in \hat{S} \ : \ y > x \geq 1\},\\
S_1^l &= \{(x,y) \in \hat{S} \ : \ y < x \leq 1\}, & S_2^l &= \{(x,y) \in \hat{S} \ : \ y < 1 < x\},\\
S_3^l &= \{(x,y) \in \hat{S} \ : \ x > y \geq 1\}, & S_d &= \{(x,y) \in S \ : \ x = y\}.
\end{aligned}$$

Se observa que la familia de conjuntos $\{S_d, S_1^u, S_2^u, S_3^u, S_1^l, S_2^l, S_3^l\}$ es una partición de S. Además, se considera la función $G : S \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x, y) = \cos(x^y) + \cos(y^x) - \cos(x^x) - \cos(y^y). \tag{4}$$

Entonces, para probar la desigualdad (3), demostraremos $G(x, y) \geq 0$ en cada conjunto de la partición.

Caso $(x,y)\in S_d$. La desigualdad (3) se satisface en S_d, dado que (3) en S_d es equivalente a la identidad: $\cos(x^x)+\cos(x^x)=\cos(x^x)+\cos(x^x)$.

Caso $(x,y)\in S_1^u$. En este caso se sigue un procedimiento análogo a la demostración del Teorema 2.3 en [15]. Seleccionamos arbitrariamente $y\in(0,1]$ y se define la función $g:[0,y]\to\mathbb{R}$ mediante la relación $g(t)=G(t,y)$ siendo G la función dada en (4). Note que $x<y\leq 1$ implica que $0\leq t\leq y\leq 1$, es decir $[0,y]\subset[0,1]$. Así la función g es definida explicitamente por

$$g(t)=\cos(t^y)+\cos(y^t)-\cos(t^t)-\cos(y^y),\quad t\in[0,y]\subset[0,1], \tag{5}$$

la cual se estudiará en lo que sigue. Más precisamente, se demostrará que la función g, es decreciente sobre su intervalo de definición $[0,y]$. Para ello se observa que la derivada de g se puede escribir como $g'(t)=g_1'(t)+g_2'(t)$ con las funciones g_1' y g_2' dadas por las reglas de correspondencia

$$\begin{aligned} g_1'(t) &= \operatorname{sen}(t^t)t^t\ln t-\operatorname{sen}(y^t)y^t\ln y, && (6)\\ g_2'(t) &= \operatorname{sen}(t^t)t^t-\operatorname{sen}(t^y)yt^{y-1} && (7)\end{aligned}$$

y se analiza el signo de cada una de estas funciones sobre $[0,y]$, demostrando que ambas son negativas sobre $[0,y]$.

Para estudiar el signo de g_1' nos apoyamos en la función $\phi(s)=s^t\operatorname{sen}(s^t)\ln s$ definida para $s\in[t,y]$, cuya derivada sobre $[t,y]$ es expresada de la siguiente manera

$$\phi'(s)=s^{t-1}(\varphi_1(s)+\varphi_2(s)),\quad \varphi_1(s)=\operatorname{sen}(s^t)(t\ln s+1),\quad \varphi_2(s)=ts^t\cos(s^t)\ln(s).$$

Observando que las siguientes desigualdades se cumplen

$$1+t\ln s\geq 1+t\ln t>(e-1)/e>0,\ \ \operatorname{sen}(s^t)>0,\ \ \cos(s^t)>0,\ \ s\in[t,y]\subset[0,1], \tag{8}$$

deducimos que $\varphi_1'(s)=ts^{t-1}\cos(s^t)(t\ln s+1)+s^{-1}t\operatorname{sen}(s^t)>0$ y en consecuencia la función φ_1 es creciente sobre $[t,y]$. En el caso de la función φ_2 se tiene

$$\varphi_2'(s)=ts^{t-1}\Big[\cos(s^t)(t\ln(s)+1)-ts^t\operatorname{sen}(s^t)\ln(s)\Big]>0,$$

debido a que el primer término es positivo por la primera desigualdad dada en (8) y el segundo término por el hecho que $\ln(s)\leq 0$ para $s\leq 1$. Así, tenemos que la función φ_2 es creciente sobre $[t,y]$. Equivalentemente, se tiene que la función $-\varphi_2$ es decreciente sobre $[t,y]$.

El crecimiento de φ_1 y el decrecimiento de $-\varphi_2$ implican que las siguientes desigualdades

$$\varphi_1(t)\leq\varphi_1(s)\leq\varphi_1(y),\ \ -\varphi_2(y)\leq-\varphi_2(s)\leq-\varphi_2(t),\quad s\in[t,y]\subset[0,1], \tag{9}$$

sean válidas para $t\leq s\leq y$. Además, es posible demostrar que $\varphi_1(t)>-\varphi_2(t)$ para $t\in[0,1]$. Observemos que para $t\in[0,1]$ el recorrido de la función t^t es $[(1/e)^{1/e},1]$, es decir $t^t\in[(1/e)^{1/e},1]$, lo cual conduce a la validez de las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}&\operatorname{sen}((1/e)^{1/e})\leq\operatorname{sen}(t^t)\leq\operatorname{sen}(1),\quad t\in[0,1],\\ &\cos(1)\leq\cos(t^t)\leq\cos((1/e)^{1/e}),\quad t\in[0,1],\\ &-e^{-1}=\ln((1/e)^{1/e})\leq\ln(t^t)\leq\ln(1)=0,\quad t\in[0,1],\end{aligned}$$

por aplicación directa de las propiedades de crecimiento o decrecimiento de las funciones seno, coseno y logaritmo natural sobre el intervalo $[1/e, 1] \subset [0, 1] \subset [0, \pi/2]$. Luego, es posible deducir las siguientes cotas inferiores

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \operatorname{sen}(t^t)(t\ln(t)+1) \geq \operatorname{sen}((1/e)^{1/e})(t\ln(t)+1) \geq \operatorname{sen}((1/e)^{1/e})\left(\frac{e-1}{e}\right),\\
\varphi_2(t) &= t^{t+1}\cos(t^t)\ln(t)\\
&= t^t\cos(t^t)\ln(t^t) \geq (1)\cos((1/e)^{1/e})\ln(t^t) \geq -\frac{\cos((1/e)^{1/e})}{e},
\end{aligned}$$

para $t \in [0, 1]$. Así, tenemos que

$$\varphi_1(t)+\varphi_2(t) \quad \geq \quad \operatorname{sen}((1/e)^{1/e})\left(\frac{e-1}{e}\right) - \frac{\cos((1/e)^{1/e})}{e} \approx 0{,}1202 \geq 0, \quad t \in [0,1],$$

es decir,

$$\varphi_1(t) \geq -\varphi_2(t), \quad t \in [0,1]. \tag{10}$$

Luego, de (9) y (10) deducimos la cadena de desigualdades $\varphi_1(s) \geq \varphi_1(t) > 0 \geq -\varphi_2(t) \geq -\varphi_2(s)$, lo cual demuestra que $\varphi_1(s)+\varphi_2(s) > 0$ para $s \in [t, y] \subseteq [0, 1]$. En consecuencia $\phi'(s) > 0$ sobre $[t, y]$, implicando que ϕ es creciente sobre $[t, y]$. De esta manera $t \leq s \leq y$ implica $\phi(t) \leq \phi(s) \leq \phi(y)$ o equivalentemente tenemos que la función $g_1'(t) = \phi(t)-\phi(y)$ es negativa sobre $[0, y]$.

Para analizar el signo de la función g_2', se observa que g_2' se puede reescribir como

$$g_2'(t) \quad = \quad \operatorname{sen}(t^t)t^t - \operatorname{sen}(t^y)t^y + \operatorname{sen}(t^y)t^{y-1}(t-y), \quad t \in [0,y] \subset [0,1]. \tag{11}$$

Para $s \in [t, y] \subset [0, 1]$ definimos la función $\varphi_3(s) = \operatorname{sen}(t^s)t^s$. Observamos que la derivada de φ_3 es tal que $\varphi_3'(s) = st^{s-1}\Big(t^s\cos(t^s)+\operatorname{sen}(t^s)\Big) > 0$ y así φ_3 es creciente sobre $[t, y]$. Luego, $t \leq s \leq y$ implica que $\varphi_3(t) \leq \varphi_3(s) \leq \varphi_3(y)$, es decir,

$$\varphi_3(t)-\varphi_3(y) = \operatorname{sen}(t^t)t^t - \operatorname{sen}(t^y)t^y \leq 0, \quad s \in [t,y] \subset [0,1].$$

Ahora, utilizando esta última desigualdad y el hecho que $\operatorname{sen}(t^y)yt^{y-1}(t-y)$ para $t \leq y$, por la relación (11) deducimos que la función $g_2'(t)$ es negativa sobre $[0, y]$.

Habiendo demostrado que tanto $g_1'(t)$ como $g_2'(t)$ son negativas sobre $[0, y]$, deducimos $g'(t) = g_1'(t) + g_2'(t) \leq 0$ y claramente $g(t)$ es decreciente sobre $[0, y]$. Ahora, el decrecimiento de g y el hecho que $g(y) = 0$ implican que $g(0) \geq g(t) \geq g(y) = 0$ para $0 \leq t \leq y$. Demostrando así que la desigualdad $g(t) = G(t, y) \geq 0$ se satisface para cada $t \in [0, y]$, es decir, $G(x, y) \geq 0$ sobre S_1^u.

Caso $(x, y) \in S_2^u$. Fijando $y \in (1, \pi/2]$, se define la función $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mediante la relación $h(t) = G(t, y)$ con G dado en (4). Aplicando las identidades trigonométricas de suma-producto se tiene

$$h(t) = -2\left[\sin\left(\frac{t^y+t^t}{2}\right)\sin\left(\frac{t^y-t^t}{2}\right) - \sin\left(\frac{y^y+y^t}{2}\right)\sin\left(\frac{y^y-y^t}{2}\right)\right]. \tag{12}$$

Se observa que

$$0 < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} \leq \frac{t^y + t^t}{2} \leq 1 < \pi, \tag{13}$$

$$0 < 1 \leq \frac{y^y + t^y}{2} \leq \frac{\pi/2 + (\pi/2)^{\pi/2}}{2} < \pi, \tag{14}$$

$$-\pi < \frac{t^y - t^t}{2} \leq 0, \tag{15}$$

$$0 \leq \frac{y^y - y^t}{2} < \pi. \tag{16}$$

Las estimaciones en (13) son consecuencia de los siguientes hechos: la función definida de $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$ por $t \to t^y$ es creciente, y la función definida de $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$ por $t \to t^t$ tiene un mínimo global en $t = 1/e$. En efecto, de cada uno de estos comportamientos se deduce que $0 \leq t < 1$ implica $0^y \leq t^y < 1^y$ y que $(1/e)^{1/e} \leq t^t \leq 1$, respectivamente. En consecuencia de las desigualdades $0 \leq t^y < 1$ y $(1/e)^{1/e} \leq t^t \leq 1$ se deduce (13). Ahora, (14) se deduce del hecho que la función definida de $[1, \pi/2]$ a $\mathbb{R}$ por $y \to (y^t + y^y)/2$ es creciente y así la restricción para y dada por $1 < y \leq \pi/2$ implica

$$1 = \frac{1^t + 1^1}{2} < \frac{y^t + y^y}{2} \leq \frac{(\pi/2)^t + (\pi/2)^{\pi/2}}{2} \leq \frac{\pi/2 + (\pi/2)^{\pi/2}}{2} < \pi. \tag{17}$$

En la penúltima desigualdad de (17) se utilizó el hecho que $t \to (\pi/2)^t$ es creciente y $t \in [0, 1]$. Para demostrar (15) se observa que la función definida de $[1, \pi/2]$ a $\mathbb{R}$ por $y \to (t^y - t^t)/2$ es decreciente y por lo tanto del hecho que $1 < y \leq \pi/2$ se deduce

$$\frac{t^1 - t^t}{2} > \frac{t^y - t^t}{2} \geq \frac{t^{\pi/2} - t^t}{2}. \tag{18}$$

Ahora, hay que obtener una cota superior para $(t - t^t)/2$ y una cota inferior para $(t^{\pi/2} - t^t)/2$ y para ello utilizamos la función $m : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $m(t) = (t - t^t)/2$. La primera y segunda derivadas de la función m son dadas por

$$m'(t) = \frac{1}{2}\Big(1 - t^t(\ln t + 1)\Big) \quad \text{y}$$

$$m''(t) = \frac{-t^{t-1}n(t)}{2} \quad \text{con} \quad n(t) = \Big(t(\ln t)^2 + 2t \ln t + t + 1)\Big).$$

Se tiene que $m''(t) < 0$ sobre $[0, 1]$ debido a la positividad de n la cual se deduce como sigue: $n(t) \to 1$ cuando $t \to 0^+$, $n(1) = 2$, $n(1/e) = 1$, $n(1/e^3) = (16 + e^3)/e^3$, n tiene un máximo en $t = 1/e^3$ y un mínimo en $t = 1/e^3$ lo cual implica que $n(t) \in [1, 2]$ para cada $t \in [0, 1]$. Luego, $m'(t)$ es decreciente sobre $[0, 1]$ y así $m'(t) \geq m'(1) = 0$, es decir m es creciente sobre $[0, 1]$. En consecuencia la cota superior para m sobre $[0, 1]$ es $m(1) = 0$ o equivalentemente

$$\frac{t - t^t}{2} < 0, \quad t \in [0, 1]. \tag{19}$$

Ahora de la desigualdad $t^{\pi/2} + 1 > 1 > t^t$, la cual se cumple para $t \in [0, 1]$, se deduce que

$$\frac{t^{\pi/2} - t^t}{2} > -\frac{1}{2}, \quad t \in [0, 1]. \tag{20}$$

Luego, de (18), (19) y (20), obtenemos (15). Las estimaciones en (16) son consecuencia de que la función definida de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ por $t \to (y^y - y^t)/2$ es decreciente, y así se tiene que $(y^y - y^0)/2 > (y^y - y^t)/2 > (y^y - y^1)/2$ sobre $[0,1]$. Ahora para $y \in (0, \pi/2]$ se tiene que $y^y \leq (\pi/2)^{\pi/2}$ lo cual implica la desigualdad $(y^y - y^0)/2 \leq ((\pi/2)^{\pi/2} - 1)/2 < \pi$ y además dado que y es la tangente en $y = 1$ de la función estrictamente convexa y^y se deduce que $y^y > y$ y en consecuencia $(y^y - y^1)/2 > 0$. Luego, resumiendo las desigualdades obtenidas se tiene la siguiente cadena

$$0 < \frac{y^y - y^1}{2} \leq \frac{y^y - y^t}{2} \leq \frac{y^y - y^0}{2} \leq \frac{(\pi/2)^{\pi/2} - 1}{2} < \pi,$$

de donde claramente se deduce (16).

Ahora, mediante la aplicación de las propiedades de la función seno sobre $[-\pi, \pi]$, se tiene que las desigualdades en (13)-(16) implican

$$\sin\left(\frac{t^y + t^t}{2}\right) \geq 0, \quad \sin\left(\frac{t^y - t^t}{2}\right) \leq 0, \quad \sin\left(\frac{y^t + y^y}{2}\right) \geq 0, \quad \sin\left(\frac{y^y - y^t}{2}\right) \geq 0. \quad (21)$$

Al utilizar los signos de (21) en (12) se deduce que $h(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,1]$ y cada $y \in (0, \pi/2]$, concluyendo la prueba de la desigualdad (3) para $(x,y) \in S_2^u$.

Caso $(x,y) \in S_3^u$. En este caso se fija arbitrariamente $y \in (1, \pi/2]$ y se define la función $w : (1, y] \to \mathbb{R}$ mediante la relación $w(t) = G(t,y)$ con G definida en (4), es decir

$$w(t) = \cos(t^y) + \cos(y^t) - \cos(t^t) - \cos(y^y).$$

Se observa que w es decreciente sobre $]1, y]$ dado que $t^y, y^t, t^t \in [0, (\pi/2)^{\pi/2}] \subset [0, \pi)$ implican

$$w'(t) = -yt^{y-1}\sin(t^y) - y^t \ln y \sin(y^t) - t^t(\ln t + 1)\sin(t^t) > 0.$$

Luego $w(t) \geq w(y) = 0$ para todo $t \in (1, y]$ y similarmente a los casos anteriores se concluye que la desigualdad (3) es satisfecha sobre S_3^u.

Caso $(x,y) \in S_1^l \cup S_2^l \cup S_3^l$. Para probar la desigualdad (3) sobre S_i^l para $i = 1, 2, 3$, se observa que $(x,y) \in S_i^l$ si, y solo si, $(y,x) \in S_i^u$, entonces intercambiando (x,y) por (y,x) en la prueba para $(x,y) \in S_i^u$ se concluye que la desigualdad (3) es tambien válida sobre S_i^l.

Agradecimientos: Los autores agradecen al Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad del Bío-Bío de Chile. Además agradecen las observaciones muy importantes hechas por el revisor anónimo.

Referencias

[1] Cîrtoaje V., "Proofs of three open inequalities with power-exponential functions", *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 4 (2011), No. 2, 130–137. doi: 10.22436/jnsa.004.02.05.

[2] Cîrtoaje V., "On some inequalities with power-exponential functions", *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 10 (2009), No. 1, 1–6.

[3] Coronel A. and Huancas F., "The proof of three power-exponential inequalities", *J. Inequal. Appl.*, 509 (2014), No. 1, 1–10. doi: 10.1186/1029-242X-2014-509.

[4] Coronel A., Kórus P., Lozada E., and Irazoqui E., "On the Generalization for Some Power-Exponential-Trigonometric Inequalities", *Mathematics.*, 7 (2019), No. 10, 1–6. doi: 10.3390/math7100988.

[5] Laub M. and Ilani I., "A subtle inequality", *Amer. Math. Monthly.*, 97 (1990), 65–67.

[6] Laub M., "Elementary Problems: E3111-E3116", *Amer. Math. Monthly.*, 92 (1985), 666. doi: 10.2307/2323718.

[7] Matejíčka L., "Solution of one conjecture on inequalities with power-exponential functions", *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 10 (2009), No. 3, 1–5.

[8] Matejíčka L.,"Some remarks on Cîrtoaje's conjecture", *J. Inequal. Appl.*, 269 (2016), No. 1, 1–11. doi: 10.1186/s13660-016-1211-0.

[9] Matejíčka L., "On the Cîrtoaje's conjecture", *J. Inequal. Appl.*, 152 (2016), No. 1, 1–6. doi: 10.1186/s13660-016-1092-2.

[10] Matejíčka L., "Next generalization of Cîrtoaje's inequality", *J. Inequal. Appl.*, 159 (2017), No. 1, 1–10. doi: 10.1186/s13660-017-1436-6.

[11] Matejíčka L., "Proof of one open inequality of Laub-Ilani type", *Journal of Mathematical Inequalities.*, 14 (2020), No. 1, 83–98. doi: 10.7153/jmi-2020-14-07.

[12] Miyagi M. and Nishizawa Y., "A short proof of an open inequality with power-exponential functions", *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, 11 (2014), No. 1, 1–6.

[13] Miyagi M. and Nishizawa Y., "Extension of an inequality with power exponential functions", *Tamkang J. Math.*, 46 (2015), No. 4, 427–433. doi: 10.5556/j.tkjm.46.2015.1831.

[14] Miyagi M. and Nishizawa Y., "A stronger inequality of Cîrtoaje's one with power exponential functions", *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 8 (2015), No. 3, 224–230. doi: 10.22436/jnsa.008.03.06.

[15] Özban A., "New algebraic-trigonometric inequalities of Laub-Ilani type", *Bull. Aust. Math. Soc.*, 96 (2017), No. 1, 87–97. doi: 10.1017/S0004972717000156.

[16] Qi F. and Debnath L., "Inequalities of power-exponential functions", *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 1 (2000), No. 2, 1–5.

[17] Zeikii A., Cirtoaje V. and Berndt W., Mathlinks. Forum,
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=118722. [cited 11 November 2006].