

## Metodología para el cálculo de la distribución de temperatura transitoria en un regenerador térmico de lecho poroso empacado

### Characterization of the temperature distribution in a packed bed thermal regenerator

Jorge Humberto Motato Ladino, Héctor Fabio Arias Vanegas,  
Francisco Javier Cadavid Sierra\*

Grupo de Ciencia y Tecnología del Gas y Uso Racional de la Energía —GASURE—,  
Facultad de Ingeniería, Universidad de Antioquia. A.A. 1226, Medellín, Colombia.

(Recibido el 27 de octubre de 2006. Aceptado el 12 de abril de 2007)

#### Resumen

En el presente artículo se propone una función para la distribución de temperatura unidimensional en estado transitorio en un regenerador térmico de lecho poroso empacado, durante la etapa de calentamiento de los elementos empacados considerando que los elementos del lecho se comportan como cuerpos con resistencia térmica interna despreciable. La función propuesta es de la forma:

$$T(x, t) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty})e^{m_2 x} + \left[ T_i - \left[ T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty})e^{m_2 x} \right] \right] e^{-\frac{h_{fs}}{\rho_s c_s D_p} t}$$

----- *Palabras clave:* regenerador térmico, lecho poroso empacado, transferencia de calor, convección forzada, estado transitorio, estado estable, coeficientes de convección.

---

\* Autor de correspondencia: teléfono: +57 +4 + 210 55 29, fax: +57 +4 + 211 05 07, correo electrónico: fcadavid@udea.edu.co.

### Abstract

An unsteady state one-dimensional temperature distribution function for a packed bed thermal regenerator during the heat storage stage of packed elements is proposed, assuming negligible internal resistance behavior of packed elements.

The function has the following form:

$$T(x,t) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty})e^{m_2 x} + \left[ T_i - \left[ T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty})e^{m_2 x} \right] \right] e^{-\frac{h_{fs}}{\rho_s c_s D_p} t}$$

----- *Key words:* thermal regenerator, packed bed, heat transfer, forced convection, transient state, unsteady state, steady state, convection coefficient.

## Introducción

La preocupación actual por el uso adecuado de los recursos naturales y energéticos, los cuales determinan en gran medida la viabilidad económica, ambiental y social de cualquier actividad productiva ha llevado, en las últimas décadas, a estudios tendientes al desarrollo de nuevas formas de energía y la implementación de nuevos procesos que la aprovechen de la forma más eficiente. En este contexto, los regeneradores térmicos se han convertido en una alternativa para alcanzar tales propósitos.

Algunas PYMES colombianas utilizan procesos de combustión en su tren productivo y generan gases a altas temperaturas que no se recuperan debido a la operación con tecnologías obsoletas e incluso artesanales. Los sistemas de regeneración térmica son una alternativa para estas empresas dada la simplicidad de su fabricación y la posibilidad de utilizar materiales de bajo costo o aun de desecho en la configuración del lecho empacado. La energía recuperada puede utilizarse básicamente en cuatro procesos: precalentamiento de la carga en hornos continuos, producción de vapor, agua sobrecalentada o aire caliente, calentamiento del combustible o precalentamiento del aire para la combustión. En cualquiera de los casos anteriores la disminución de las pérdidas se evidencia en una reducción de los costos de operación, lo que motiva la implementación de algún tipo de recuperador de calor [1].

En los regeneradores térmicos, la masa sólida constituida por los elementos empacados provee una gran turbulencia y un área de contacto fluido-sólido mucho más grande que el área de transferencia de calor de un fluido en un conducto continuo, lo que trae como consecuencia que la transferencia de calor sea más elevada. Estas dos características asociadas con las propiedades de las piezas, generalmente de baja resistencia térmica, permiten disipar rápidamente el calor [2].

En un trabajo previo, Mejía [3] mostró que cuando los elementos que conforman el lecho se comportan como cuerpos con resistencia interna

despreciable, todo el lecho puede modelarse utilizando la misma aproximación. De acuerdo con esto, la temperatura en un punto específico dentro del lecho poroso se acomoda a una función de la forma presentada en la ecuación (1):

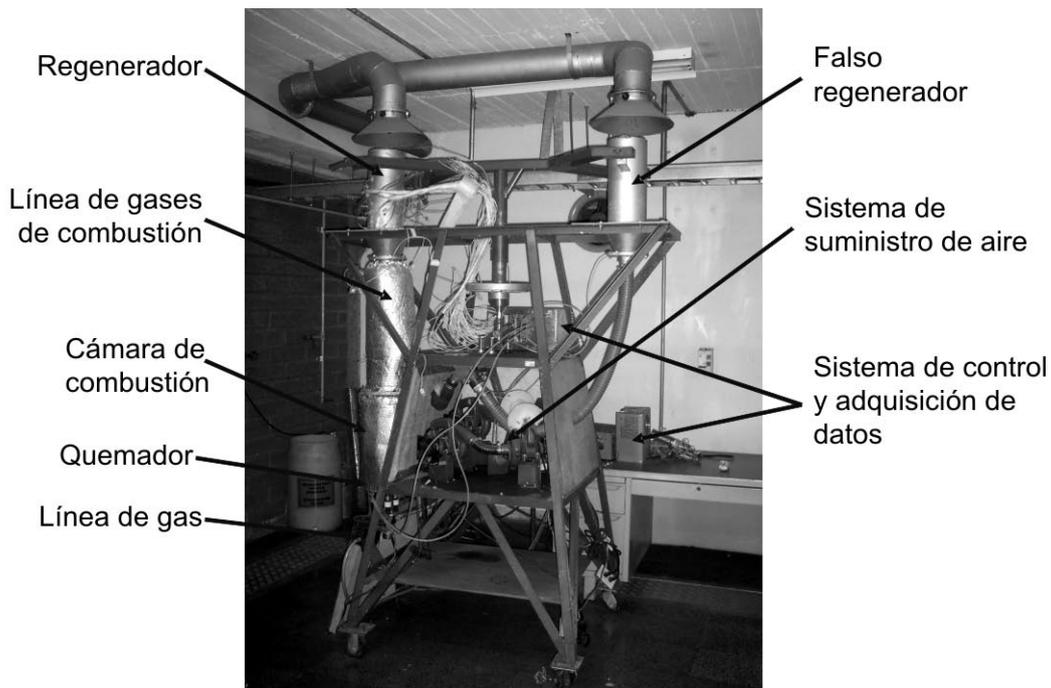
$$T(t) = A + Be^{-Ct} \quad (1)$$

En dicho trabajo tal aproximación se hizo utilizando un solo caudal de gases a través del lecho, una geometría única (cilindros huecos) y un solo tamaño de elementos empacados en el lecho. En el trabajo que aquí se expone, se emplean dos caudales de gases a la entrada del lecho, dos geometrías (esferas y cilindros sólidos) y dos tamaños de elementos empacados. Esto con el fin de poder determinar relaciones entre propiedades físicas y geométricas del lecho poroso empacado y los parámetros A, B y C de la ecuación (1).

La metodología seguida para determinar las funciones de distribución de temperatura consistió en obtener primero los perfiles transitorios experimentales de temperatura, luego los datos obtenidos se ajustaron por medio de regresiones a un modelo de la forma de la ecuación (1). Seguidamente, se analizó el significado de las constantes A, B y C en estos perfiles y finalmente se hallaron expresiones generales en función de propiedades físicas y geométricas del lecho que permitieron obtener una función general para la distribución de temperatura unidimensional en estado transitorio en un regenerador térmico de lecho poroso empacado.

## Equipo experimental

En la figura 1 se muestra el banco de pruebas para regeneradores térmicos de lecho poroso empacado utilizado durante la experimentación. El sistema está compuesto por una cámara de combustión, un regenerador o sección de pruebas, un falso regenerador, un sistema de suministro de aire, un sistema de control y adquisición de datos y, un quemador de gas natural para generar los gases calientes que pasan a través del lecho regenerador.



**Figura 1** Banco de pruebas para regeneradores térmicos de lecho poroso empacado [4]

Inicialmente, uno de los lechos, denominado falso regenerador, recibe los gases calientes mientras se logra estabilizar el flujo y alcanzar la temperatura de entrada requerida. Cuando esto se logra se hace el intercambio por el regenerador que contiene los elementos a analizar. La sección de pruebas consiste en un ducto de 0,082 m de diámetro interno y 0,1524 m de diámetro exterior y una longitud total de 0,4 m, la pared refractaria es de concreto y está envuelta por un tubo de acero al carbón. Dentro de este ducto se empacan los elementos que conforman el lecho empacado.

### Sistema de medición y adquisición de datos

La medición de flujos de gas combustible y aire se realizó utilizando tubos venturi, las mediciones de temperatura a la entrada, a la salida y al interior del lecho se realizaron utilizando termopares tipo K. Para fijar el caudal y la temperatura a la entrada del lecho se empleó un sistema de control, el-

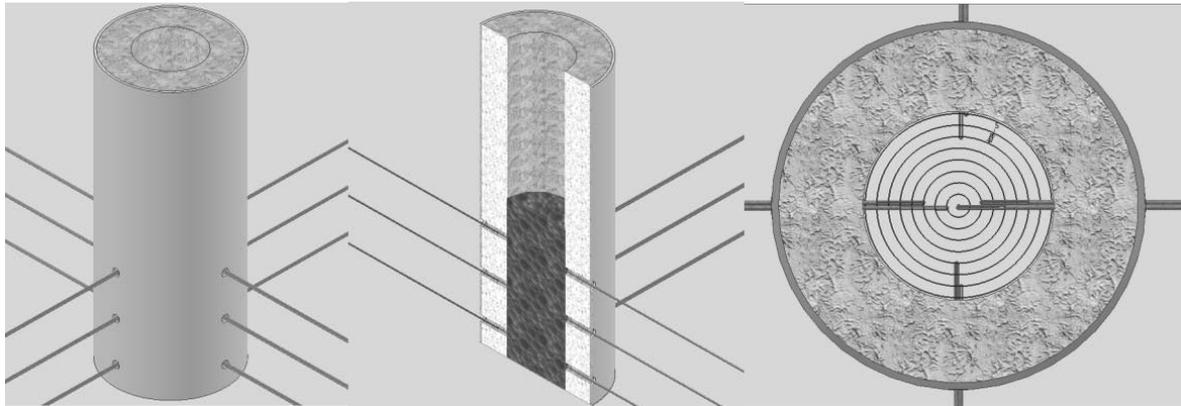
borado para tal fin. Los datos adquiridos fueron leídos y almacenados por medio de un programa de adquisición de datos elaborado en lenguaje Visual Basic y denominado DRAGON.

### Condiciones experimentales

Los caudales a la entrada del lecho durante las pruebas fueron:  $C1 = 0,008747 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $C2 = 0,009956 \text{ m}^3/\text{s}$ . Los flujos máxicos utilizados durante la experimentación, fueron  $0,005957$  y  $0,006781 \text{ kg/s}$ , las velocidades correspondientes fueron  $1,66$  y  $1,88 \text{ m/s}$ . Como elementos empacados se utilizaron esferas y cilindros sólidos de acero al carbón AISI 1010 y de diámetros  $3/8''$  ( $0,009525 \text{ m}$ ) y  $1/2''$  ( $0,0127 \text{ m}$ ). Para los cilindros, la relación altura/diámetro se mantuvo igual a 1, esto para facilitar las comparaciones. La temperatura de los gases de combustión a la entrada del lecho se mantuvo constante e igual a  $227^\circ\text{C}$  ( $500 \text{ K}$ ). En cada prueba se realizaron mediciones de temperatura en tres niveles o alturas a

lo largo del lecho, 0,03, 0,09 y 0,15 m. En cada uno de ellos se colocaron nueve termopares dispuestos en sentido radial ubicados a una distancia de 5 mm

uno del otro. La sección empacada del lecho fue de 0,2 m. Esto se muestra esquemáticamente en la figura 2.



**Figura 2** Distribución de termopares en el lecho poroso empacado

En los cálculos se consideró que las propiedades de los gases eran las del aire, dado que bajo las condiciones experimentales empleadas la composición de los gases que atraviesan el lecho se asemejan a las de éste. La porosidad o fracción de vacío promedio para el lecho,  $\epsilon = \text{volumen vacío/volumen total}$ , para las diferentes configuraciones se muestran en la tabla 1.

**Tabla 1** Valores de porosidad promedio en el lecho para esferas y cilindros

	<i>Esferas</i>		<i>Cilindros</i>	
	3/8"	1/2"	3/8"	1/2"
$\epsilon$	0,3424	0,3582	0,2996	0,3648

### Perfiles experimentales de temperatura

Las figuras 3 y 4 muestran las curvas experimentales de temperatura en función del tiempo, obtenidas durante la experimentación para cada una de las configuraciones de lecho y caudales empleados. Las curvas mostradas corresponden

a la temperatura promedio en cada una de las tres posiciones axiales medidas.

Se observó que existe un retardo en el inicio del proceso de calentamiento a medida que aumenta la distancia, tal como se evidencia principalmente en el nivel  $x = 0,15$  m en las gráficas. Hay también una ligera distorsión en la respuesta de temperatura al inicio del proceso de calentamiento en esta misma posición, donde la temperatura tras un pequeño incremento no sufre mayor variación estancándose momentáneamente para luego continuar incrementándose con la misma tendencia que las demás secciones. Este fenómeno se repite para las demás configuraciones con mayor o menor intensidad, lo que también se refleja aunque con un impacto menor en la posición  $x = 0,09$  m.

Por lo anterior, en estas posiciones, los datos para la regresión no se tomaron desde el inicio ( $t = 0$ ) sino que se tomaron desde la zona en que se observó que estaban libres de distorsiones y presentaban un comportamiento más acorde con el tipo de función al que se pretendía ajustar los

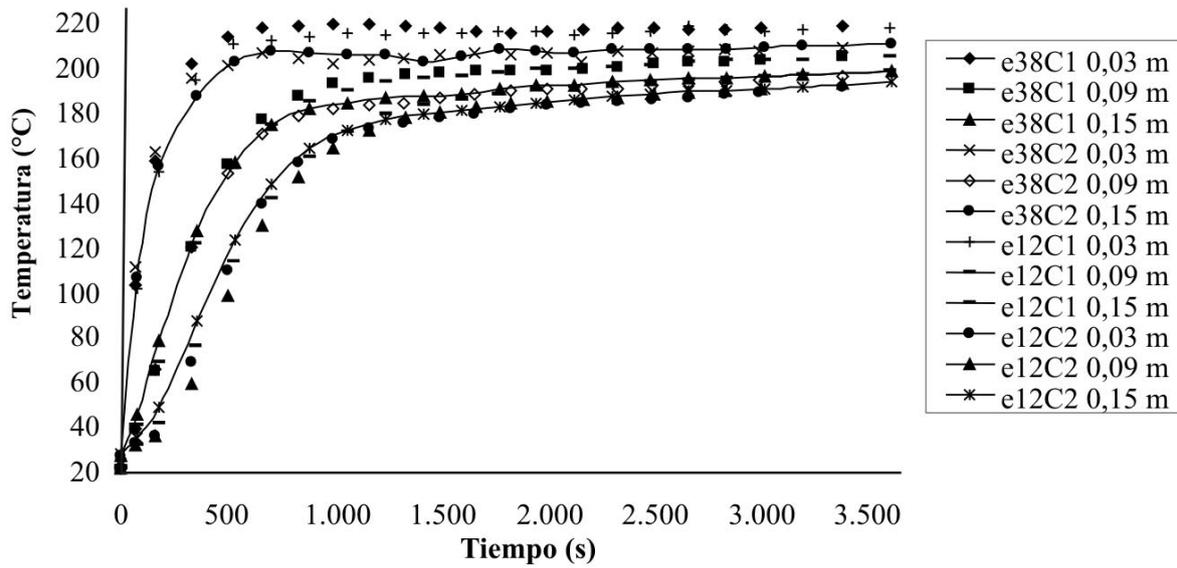


Figura 3 Curvas experimentales de calentamiento para esferas

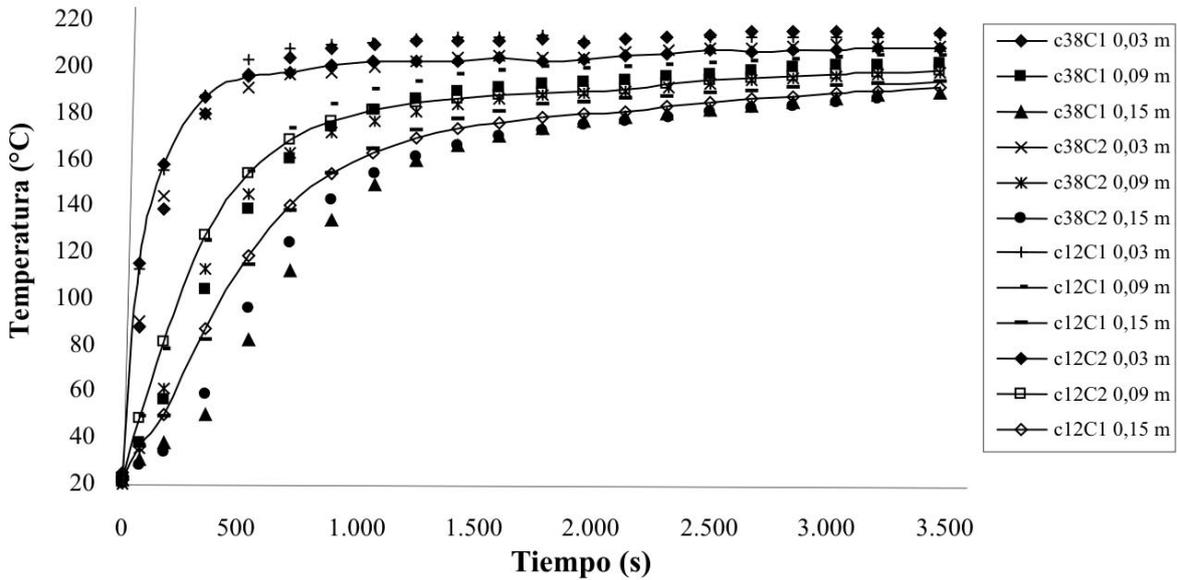


Figura 4 Curvas experimentales de calentamiento para cilindros

datos. Como se muestra más adelante, este hecho evidencia que las distribuciones de temperatura se ajustan al modelo propuesto, pero a partir de cierta distancia en el lecho la temperatura cumple con dicho modelo después de un tiempo y una temperatura determinados. El tiempo mencionado oscila entre los 50 y los 300 s cuando la temperatura supera los 40 °C.

### Ajuste por regresión de los perfiles experimentales de temperatura

El modelo para la variación de la temperatura en función del tiempo en un cuerpo considerado como de resistencia interna despreciable a la conducción de calor está dado por la ecuación (2) [5]:

$$T(t) = T_{\infty} + (T_i - T_{\infty})e^{\frac{-h}{\rho_e c_e D_p} t} \quad (2)$$

T(t): temperatura del cuerpo en el tiempo t [°C].

$T_{\infty}$ : temperatura del ambiente que rodea el cuerpo [°C].

$T_i$ : temperatura inicial del cuerpo en el tiempo  $t = 0$  [°C].

$\rho_e$ : densidad del cuerpo [kg/m<sup>3</sup>].

$c_e$ : calor específico del cuerpo [J/kg.K].

$h$ : coeficiente de transferencia de calor por convección [W/m<sup>2</sup>.K].

$D_p$ : dimensión característica del cuerpo [m].

En forma general este modelo se puede resumir de la forma como se expresa en la ecuación (1). En el análisis llevado a cabo en este trabajo, los datos experimentales obtenidos en cada una de las posiciones medidas, se ajustaron a una función de este tipo con ayuda del programa SPSS versión 14 para Windows. Los resultados se muestran en la tabla 2.

**Tabla 2** Coeficientes A, B y C obtenidos por regresión para cada configuración del lecho

Altura	Parámetro	Esferas 3/8"		Esferas 1/2"		Cilindros 3/8"		Cilindros 1/2"	
		C1	C2	C1	C2	C1	C2	C1	C2
0,03 m	A	218,0960	206,1290	216,1930	207,6520	212,8470	205,7660	212,4100	204,5540
	B	-191,3430	-166,6310	-179,3980	-181,9980	-176,2520	-169,7140	-154,6480	-145,0850
	C	0,0072	0,0074	0,0067	0,0068	0,00465	0,0053	0,0056	0,0062
0,09 m	A	202,2630	191,9710	201,6780	194,3470	198,5670	193,2350	202,6660	193,7690
	B	-232,5050	-216,2760	-205,5560	-193,9040	-217,8920	-201,5550	-192,3040	-176,5470
	C	0,00320	0,0033	0,0030	0,0030	0,0024	0,0025	0,0026	0,0027
0,15 m	A	190,9110	187,0270	195,8640	190,0580	186,6480	184,2170	191,6510	187,0902
	B	-279,0230	-271,9200	-244,1920	-219,7640	-263,3440	-240,3850	-209,7030	-196,0740
	C	0,0022	0,0025	0,0020	0,0022	0,0018	0,0019	0,0019	0,0019

De esta tabla se puede deducir que tanto A, B y C dependen de la altura o distancia x y por lo tanto, la función de distribución de

temperatura dentro del regenerador térmico de lecho poroso empacado se representa por la ecuación (3):

$$T(x, t) = A(x) + B(x)e^{-C(x)t} \quad (3)$$

Donde  $T(x, t)$  es la temperatura de los elementos dentro del lecho en una posición  $x$  y tiempo  $t$  dados.

### Método semi-empírico para la obtención de $A(x)$ , $B(x)$ y $C(x)$

En analogía con el modelo para la transferencia de calor en cuerpos con resistencia interna despreciable, se puede decir que  $A(x)$  es la temperatura ambiente que rodea los elementos dentro del lecho cuando se alcanza el estado estable, esto indica que cuando  $t$  tiende a infinito,  $T(x, t)$  tiende a  $A(x)$ .  $B(x)$  por su parte, puede considerarse como la diferencia entre la temperatura inicial en el lecho  $T_i$  y la temperatura de estado estable  $A(x)$ . Esto es,  $B(x) = T_i - A(x)$ . Hay que tener en cuenta que para las posiciones 0,09 y 0,15 m,  $T_i$  corresponde a la temperatura a partir de la cual los elementos ubicados allí han vencido la inercia térmica.

En cuanto a  $C(x)$  se tiene la ecuación (4):

$$C(x) = \frac{h_{fs}(x)}{\rho_s c_s D_p} \quad (4)$$

Donde  $h_{fs}$  es el coeficiente de convección fluido-sólido. Debido a que  $\rho_s$ ,  $c_s$ ,  $D_p$  son constantes,  $C(x)$  sólo depende de  $h_{fs}(x)$ .

Con esto en mente se procede a intentar hallar expresiones que expliquen la variación de cada uno de estos términos. La expresión para  $A(x)$  se dedujo a partir de las ecuaciones de balance de energía propuestas en la literatura para lechos porosos empacados. En el caso de  $h_{fs}(x)$  se halló una relación experimental en función del número de Reynolds de partícula,  $Re_p$ , el número de Prandtl,  $Pr$ , la relación diámetro de partícula a diámetro de lecho,  $D_p/D_T$ , y la posición axial en el lecho.

### Cálculo del coeficiente de convección fluido-sólido, $h_{fs}$

Para obtener los valores de temperatura en cualquier posición axial y en cualquier instante, es necesario determinar el coeficiente de convección entre el fluido y los elementos del lecho,  $h_{fs}$ . Los valores de  $h_{fs}$ , se derivan a partir de la ecuación (4) de los valores de  $C$  obtenidos mediante las regresiones realizadas. En la figura 5 se muestra la variación de  $h_{fs}$  con la distancia. La figura 6 muestra la variación del coeficiente de convección fluido-sólido con el número de Reynolds para dos configuraciones distintas.

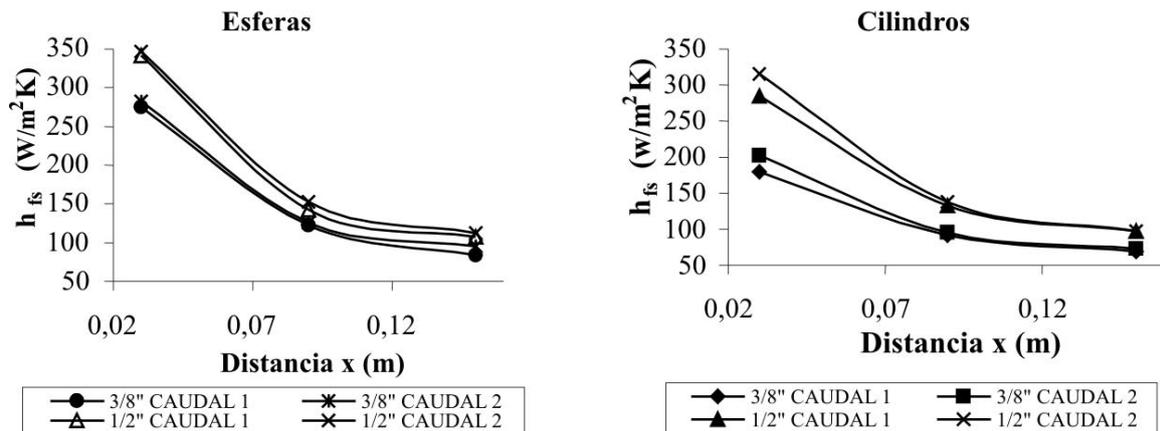


Figura 5 Coeficientes de convección fluido-sólido en función de la distancia  $x$  para esferas y cilindros

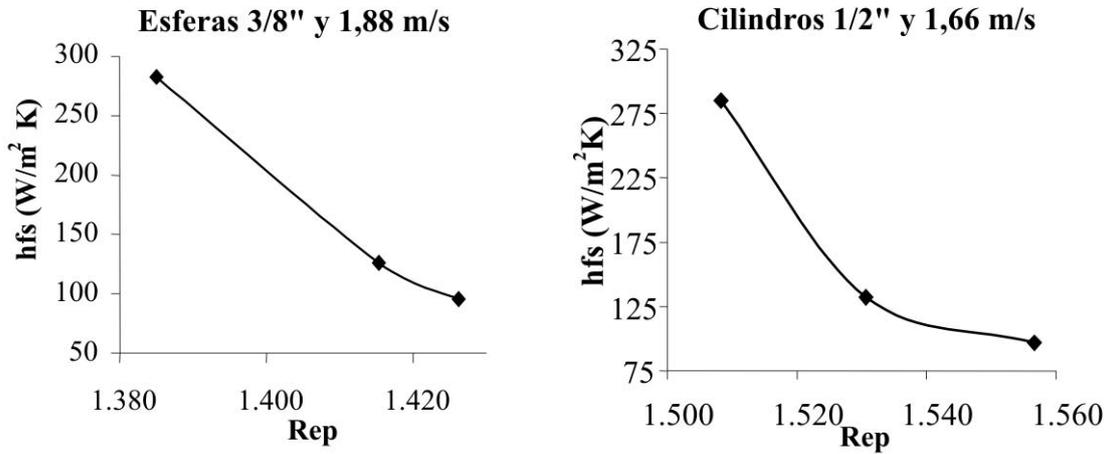


Figura 6 Variación del coeficiente de  $h_{fs}$  con  $Re_p$  para dos configuraciones de lecho

Como se sabe el coeficiente de convección depende tanto de las propiedades del fluido como de las condiciones de flujo y la geometría de los cuerpos con los cuales el fluido intercambia energía. En situaciones de flujo complejas como es el caso de la convección forzada transitoria en un lecho poroso, el método más práctico de obtener estos coeficientes es mediante relaciones empíricas. En el análisis experimental de la transferencia de calor por convección, se ha encontrado que el coeficiente de convección, para una geometría establecida, es una función de la longitud característica, los números de Reynolds y de Prandtl. Tomando este hecho como guía se dedujo una correlación para el coeficiente de convección interfacial para un regenerador térmico de lecho poroso empacado. Como se muestra a continuación dicho coeficiente en nuestro caso se ajusta bien a una función de este tipo donde además la distancia a través del lecho es una variable de gran importancia.

Cabe aclarar aquí que el número de Reynolds que se empleó,  $Re_p = \rho_f u D_p / \mu$  está dado en términos del diámetro de partícula de los elementos y la velocidad intrínseca o velocidad de flujo

dentro del lecho en la dirección  $x$ ,  $u$ , calculada con base en el área de flujo:

$$u = \frac{4\dot{m}_f}{\rho_f \epsilon \pi D_T^2} \quad (5)$$

Donde  $\dot{m}_f$  es el flujo másico de gases a través del lecho y  $\rho_f$ , densidad de los gases que fluyen por el lecho. El número de Prandtl se puede tomar como constante para el intervalo de condiciones bajo las cuales se llevó a cabo la experimentación con un valor promedio de 0,683. En el trabajo previo realizado por Mejía [3], se encontró que una relación de la forma de la ecuación (6) presentaba un buen ajuste a los datos experimentales:

$$h(x) = a + b e^{-cx} \quad (6)$$

Lo anterior se comprobó en este trabajo donde además de la distancia,  $x$ , el número de Reynolds de partícula,  $Re_p$ , el número de Prandtl,  $Pr$  y la relación diámetro de partícula a diámetro de lecho,  $D_p/D_T$ , se incluyeron en esta expresión, dando como resultado las expresiones (7) y (8):

Para esferas:

$$h_{fs} = 0,084 \text{Re}_p \text{Pr} + 1907,451 \left( \frac{D_p}{D_T} \right)^{0,676} e^{-5,174x^*} \quad (7)$$

$$R^2 = 0,998$$

Para cilindros:

$$h_{fs} = 0,062 \text{Re}_p \text{Pr} + 23003,594 \left( \frac{D_p}{D_T} \right)^{2,121} e^{-4,2592x^*} \quad (8)$$

$$R^2 = 0,991$$

Donde  $x^*$  es la distancia adimensional  $x/L$ ,  $L$  es la longitud empacada del lecho.

### Distribución de temperatura en condiciones de estado estable

La figura 7 muestra el comportamiento de  $A(x)$  (la distribución de temperatura en el lecho en condiciones de estado estable) para los diferentes casos analizados.

Para el análisis de la transferencia de calor en lechos porosos empacados se empleó el modelo LTE (Local Thermal Equilibrium) entre la fase sólida y la fase fluida [6, 7]. Este modelo asume que en un punto específico del lecho, la temperatura de los elementos empacados (fase sólida,  $s$ ), es igual a la temperatura de los gases que pasan a través del lecho (fase fluida,  $f$ ).  $T_s = T_f = T$ . El sólido alcanza instantáneamente la temperatura de los gases que fluyen a través del lecho. En el

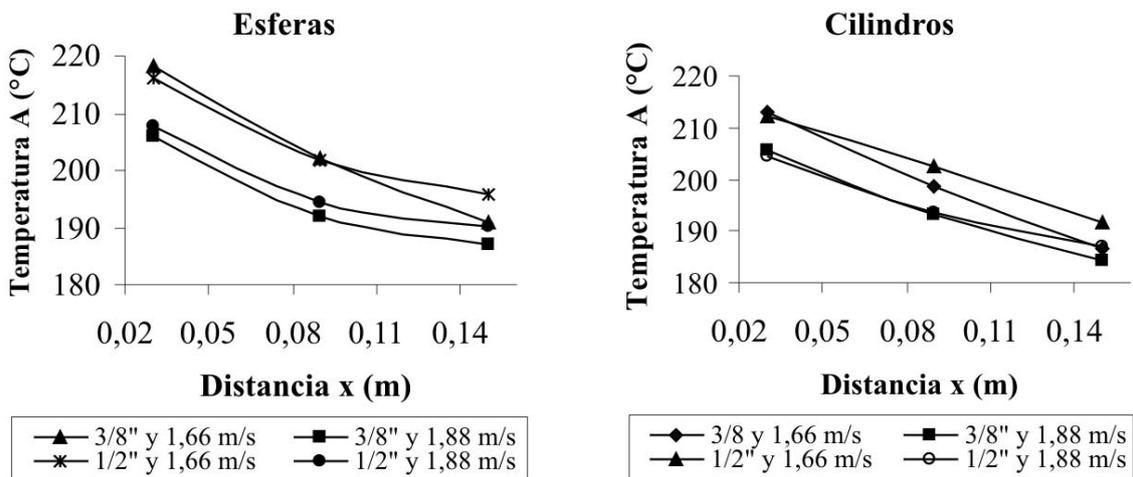


Figura 7 Distribución de temperatura axial en estado estable para esferas y cilindros

análisis que se presenta, se consideró un medio isotrópico en el que los efectos de la radiación, la disipación viscosa y el trabajo debido a cambios

de presión son despreciables. Cuando se emplea el modelo LTE, la ecuación de conservación de energía (9) para un lecho poroso es [6]:

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_f \bar{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k_m \nabla T) + \dot{q}_m \quad (9)$$

Donde:

$$(\rho c)_m = (1 - \varepsilon)(\rho c)_s + \varepsilon(\rho c)_f \text{ y}$$

$\dot{q}_m = (1 - \varepsilon)\dot{q}_s + \varepsilon\dot{q}_f$ . Por su parte  $k_m$  es la conductividad térmica efectiva del medio poroso. La conductividad térmica efectiva no es una conductividad tal como se entiende normalmente. Esta depende, además de las conductividades de las fases sólida y fluida, de otros efectos que no están asociados con el fenómeno de la conducción de calor pero que interactúan con esta, tales como la radiación, la convección en dirección radial, la dispersión térmica, entre otros [8]. La conductividad térmica efectiva del medio puede verse reducida por efectos de contacto entre los elementos sólidos y de estos con las paredes del lecho que los contiene, la discontinuidad del medio, el estancamiento del flujo y en general diferentes fenómenos que incrementan la resistencia al flujo de calor dentro del medio poroso. La conductividad térmica efectiva del medio también puede incrementarse por efecto de la dispersión térmica la cual ocasiona una dispersión del flujo

por los obstáculos que encuentra el fluido al paso por el medio regenerativo lo que incrementan la turbulencia [7].

Es posible hacer algunas simplificaciones a la ecuación (9) con el fin de obtener un perfil de temperatura dentro del lecho en condiciones de estado estable. La más importante de ellas, para los fines de este estudio, es suponer que en tal condición ya no existe transferencia de calor entre las fases fluida y sólida. Es decir, se ha alcanzado el equilibrio térmico entre las dos fases y cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces:  $T(x, t = \infty) = T_s(x) = T_f(x) = T(x) = A(x)$ .

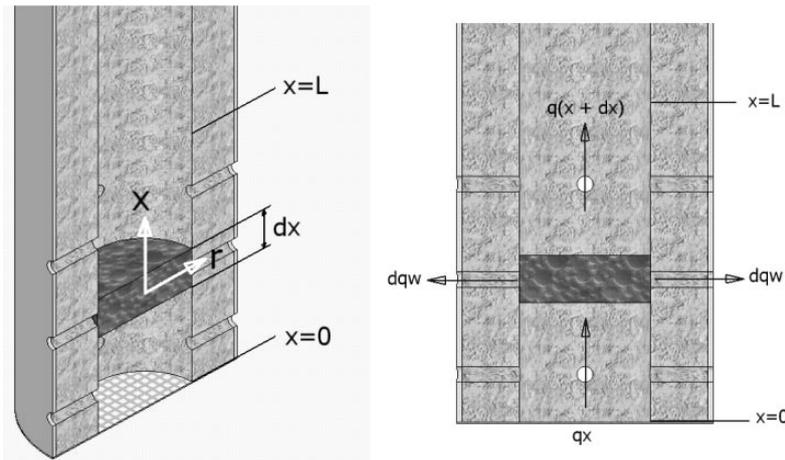
Para el caso particular que se está analizando sólo se considera la variación de temperatura en la dirección axial  $x$ . El valor de la temperatura en cada sección se toma como el promedio para toda la sección. De esta manera, aplicando el análisis anterior a un volumen de control como el mostrado en la figura 8, donde además no hay ninguna generación de calor dentro del sistema, se obtiene:

$$\varepsilon(\rho c_p)_f (A_T dx) u \frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx} \left( k_m A_T \frac{dT}{dx} \right) dx - dq_w \quad (10)$$

Donde  $dq_w$  representa el flujo de calor desde el interior del lecho hacia el exterior o pérdidas de energía a través de la pared refractaria;  $A_T$ , es el área transversal interna del lecho y  $u$  es la velocidad de flujo dentro del lecho en la dirección  $x$ , según la ecuación (5).

$dq_w$  puede obtenerse a partir de una expresión de la forma:

$$dq_w = \frac{T - T_\infty}{R_{total}} = U(\pi D_T dx)(T - T_\infty) \quad (11)$$



**Figura 8** Representación esquemática del lecho poroso empacado

Introduciendo (11) en (10) y simplificando, obtenemos (12):

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\varepsilon(\rho c_p)_f u}{k_m} \frac{dT}{dx} - \frac{4U}{k_m D_T} (T - T_\infty) = 0 \quad (12)$$

Haciendo  $\theta = T - T_\infty$ , la ecuación (12) queda según se muestra en la ecuación (13):

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - b \frac{d\theta}{dx} - c\theta = 0 \quad (13)$$

Donde:

$$T_\infty = T_{\text{aire}} = T_{\text{ambiente}} = \text{constante por lo que: } \frac{d\theta}{dx} = \frac{dT}{dx}$$

$$b = \frac{\varepsilon(\rho c_p)_f u}{k_m} \text{ y } c = \frac{4U}{k_m D_T}$$

La ecuación (13) es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden cuya solución general es de la forma:

$$\theta(x) = K_1 e^{m_1 x} + K_2 e^{m_2 x} \quad (14)$$

En la cual  $m_1$  y  $m_2$  son las raíces del polinomio  $m^2 - bm - c = 0$ , esto es:

$$m_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2} \text{ y } m_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$$

Las condiciones de frontera para la ecuación (14) son:

$$\text{En } x = 0, T = T_0 \Rightarrow$$

$$\theta(0) = \theta_0 = T_0 - T_\infty = K_1 + K_2$$

$$\text{En } x = L, T = T_L \Rightarrow$$

$$\theta(L) = \theta_L = T_L - T_\infty = K_1 e^{m_1 L} + K_2 e^{m_2 L}$$

$T_0$  y  $T_L$ , son las temperaturas a la entrada y salida del lecho regenerador en estado estable, respectivamente. Al resolver para las dos condiciones anteriores obtenemos:

$$K_1 = \theta_0 - \frac{\theta_0 e^{m_1 L} - \theta_L}{e^{m_1 L} - e^{m_2 L}} \text{ y } K_2 = \frac{\theta_0 e^{m_1 L} - \theta_L}{e^{m_1 L} - e^{m_2 L}}$$

Haciendo los reemplazos correspondientes se llega a la expresión (15) para la distribución de temperatura en el regenerador en condiciones de estado estable:

$$\theta_{L,\infty}(x) = \left[ \theta_0 - \frac{\theta_0 e^{m_1 L} - \theta_L}{e^{m_1 L} - e^{m_2 L}} \right] e^{m_1 x} + \left[ \frac{\theta_0 e^{m_1 L} - \theta_L}{e^{m_1 L} - e^{m_2 L}} \right] e^{m_2 x} \quad (15)$$

### Comparación con resultados experimentales de temperatura en estado estable

Para poder comparar los resultados que arroja esta ecuación con los valores experimentales de temperatura en estado estable es necesario calcular la conductividad térmica efectiva,  $k_m$  y el coeficiente global de transferencia de calor  $U$ . El cálculo de estos parámetros es uno de los principales problemas que se encuentra cuando se analiza la transferencia de calor en un lecho empacado. Para encontrar estos parámetros normalmente se emplean correlaciones empíricas obtenidas a través de métodos iterativos de cálculo, en los cuales se miden los perfiles experimentales de temperatura, luego se propone una solución a las ecuaciones de balance de energía para el lecho y se procede a encontrar los valores de los parámetros que produzcan el mejor ajuste a los datos experimentales. Estos datos se obtienen para diferentes condiciones de flujo, geometrías, tamaños y materiales de elementos con lo cual se obtienen correlaciones relacionando los valores de los parámetros obtenidos con las variables modificadas durante la experimentación [8-11]. En este trabajo se empleó la expresión (16) para el cálculo de la conductividad térmica efectiva en la dirección axial [9]:

$$\frac{k_m}{k_f} = \frac{k_e^0}{k_f} + 0,5 \text{Re}_D \text{Pr} \quad (16)$$

Donde:

$k_e^0$ : conductividad térmica efectiva estática cuando  $\text{Re}_D = 0$

$\text{Re}_V = \frac{\rho V D_p}{\mu}$  número de Reynolds definido en

términos del diámetro de las esferas que componen el lecho,  $D_p$  y la velocidad,  $V$ , que existiría en el ducto vacío si no existiera el material empacado. El número de Prandtl,  $\text{Pr}$ , se define como  $\text{Pr} = c_p \mu / k_f$ , donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica. Para encontrar  $k_e^0$  se puede hacer uso de la expresión (17) [9]:

$$\frac{k_e^0}{k_f} = \left( \frac{k_s}{k_f} \right)^n \quad (17)$$

Donde

$$n = 0,28 - 0,757 \log \varepsilon - 0,057 \log(k_s / k_f)$$

El coeficiente global de transferencia de calor  $U$  con respecto al área superficial interna,  $A_s$ , está dado por la ecuación (18):

$$U = \frac{1}{\left( \frac{1}{h_i} \right) + \frac{D_T}{2k_w} \text{Ln} \left( \frac{D_w}{D_T} \right) + \frac{D_T}{2k_a} \text{Ln} \left( \frac{D_a}{D_w} \right) + \frac{D_T}{D_a} \left( \frac{1}{h_{aire}} \right)} \quad (18)$$

Donde:

$h_i$ : coeficiente global de transferencia de calor por convección dentro del lecho [ $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$ ].

$k_w$ : conductividad térmica del concreto que conforma la pared refractaria [ $\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$ ].

$D_w$ : diámetro externo de la pared refractaria [m].

$k_a$ : conductividad de la lámina de acero que envuelve la pared refractaria [ $\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$ ].

$D_a$ : diámetro de la lámina de acero que envuelve la pared refractaria [m].

$h_{aire}$ : coeficiente de transferencia de calor por convección libre del ambiente externo al lecho [ $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$ ].

El coeficiente global de transferencia de calor por convección dentro del lecho,  $h_i$ , se puede calcular empleando la correlación (19) que se recomienda

para el flujo de gas en un lecho poroso empacado con esferas [5]:

$$\epsilon \bar{j}_H = \epsilon \bar{j}_m = 2,06 Re_V^{-0,575} \text{ si } Pr \approx 0,7 \text{ y } 90 \geq Re_V \leq 4.000 \quad (19)$$

Donde:

$\bar{j}_H$  : es el factor j de Colburn para transferencia de calor.

es igual a 1, se aplica un factor de corrección de 0,79 al lado derecho de la anterior expresión obteniéndose la ecuación (20):

Para el caso en que el lecho se encuentra empacado con cilindros cuya razón diámetro-longitud

$$\epsilon \bar{j}_H = \epsilon \bar{j}_m = 0,79 * (2,06 Re_V^{-0,575}) = 1,6274 Re_V^{-0,575} \quad (20)$$

Teniendo en cuenta que  $j_H = St Pr^{2/3}$ , donde  $St = \frac{h}{\rho V C_p}$ , se obtienen las ecuaciones (21)

$$h_i = \left( \frac{\rho C_p V}{\epsilon Pr^{2/3}} \right) (1,6274 Re_V^{-0,575}), \quad (22)$$

y (22):

para cilindros

$$h_i = \left( \frac{\rho C_p V}{\epsilon Pr^{2/3}} \right) (2,06 Re_V^{-0,575}), \quad (21)$$

La tabla 3 muestra los valores para  $Re_V$ ,  $h_i$ ,  $k_m$  y  $U$  calculados, además de los valores de  $T_L$ .

para esferas

**Tabla 3** Valores de los parámetros de transferencia de calor

	<b>Esferas 3/8"</b>		<b>Esferas 1/2"</b>		<b>Cilindros 3/8"</b>		<b>Cilindros 1/2"</b>	
	<b>C1</b>	<b>C2</b>	<b>C1</b>	<b>C2</b>	<b>C1</b>	<b>C2</b>	<b>C1</b>	<b>C2</b>
$Re_V$	433,000	503,000	576,000	666,000	439,000	504,000	580,000	671,000
$h_i$	285,400	300,600	231,200	243,600	257,600	271,500	179,300	188,900
$k_m$	6,250	7,040	8,000	9,090	6,330	7,320	8,300	9,390
$U$	9,553	9,018	8,830	8,878	8,762	8,813	8,586	8,644
$T_L$	176,000	180,000	178,000	178,000	175,000	181,000	170,000	175,000

Los datos presentados en la tabla 3 se calcularon considerando que:

$$k_w = 0,77 \text{ W/m.K}, \quad k_a = 51,9 \text{ W/m.K}, \\ D_w = 0,176 \text{ m}, \quad D_a = 0,181 \text{ m}, \quad h_{\text{aire}} = 7,5 \text{ W/m}^2\text{.K}, \\ k_s = 55 \text{ W/m.K}, \quad k_f = 0,0388 \text{ W/m.K}, \quad T_0 = 227 \text{ }^\circ\text{C} \\ = 500 \text{ K}, \quad T_\infty = 25 \text{ }^\circ\text{C} = 298 \text{ K}.$$

En general, se encuentra que al solucionar la ecuación (15) los resultados obtenidos no concuerdan con los experimentales aunque siguen la misma tendencia. Esto indica que la distribución de temperatura dentro del lecho es de la forma planteada pero que es necesario buscar factores de ajuste a dicha ecuación. Se encontró que era necesario ajustar el término  $c$  en la ecuación (12) de la siguiente manera:

$$c = \frac{16U}{k_m D_r}, \text{ para esferas y } c = \frac{20U}{k_m D_r} \text{ para cilindros.}$$

Este ajuste es necesario, pues para el cálculo del coeficiente de convección interno del lecho se asumió que los efectos de pared eran despreciables, así mismo se consideró que la porosidad en el lecho era constante, pero esta en realidad es variable, especialmente cerca de la pared. Estos efectos hacen que las condiciones de flujo en las paredes sean diferentes a las del resto del lecho y se presenten diferencias cuando no se toman en cuenta [8, 9].

La tabla 4 registra los valores obtenidos para las constantes  $b, c, K_1, K_2$  y las raíces  $m_1$  y  $m_2$ , y para los dos tamaños de esferas y las dos condiciones de caudal utilizadas.

**Tabla 4** Valores para las constantes  $b$  y  $c$ , las raíces  $m_1$  y  $m_2$  y las constantes  $K_1$  y  $K_2$

	Esferas 3/8"		Esferas 1/2"		Cilindros 3/8"		Cilindros 1/2"	
	C-1	C-2	C-1	C-2	C1	C-2	C1	C2
b	185,00	186,77	144,51	144,59	221,11	223,34	141,86	141,95
c	296,59	249,45	213,41	190,40	341,85	304,88	262,20	231,70
$m_1$	186,59	188,10	145,97	145,89	222,65	224,70	143,69	143,56
$m_2$	-1,59	-1,33	-1,46	-1,31	-1,54	-1,36	-1,82	-1,61
$K_1$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$K_2$	202,00	202,00	202,00	202,00	202,00	202,00	202,00	202,00

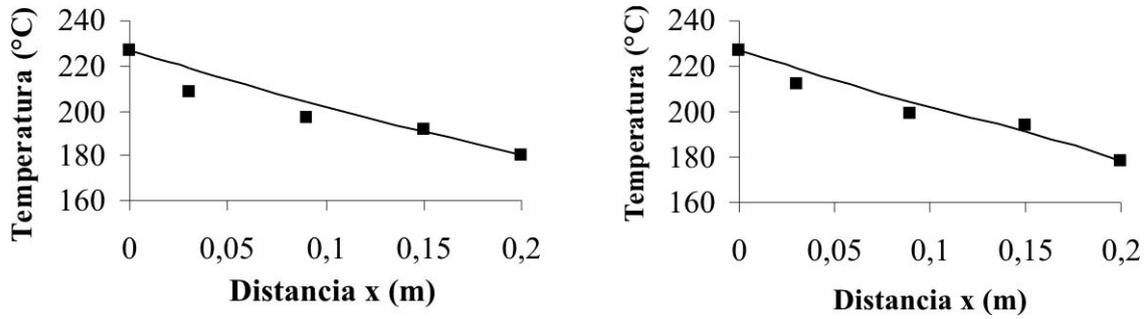
Como se observa,  $K_1$  es cero para todos los casos, mientras que  $K_2$  se reduce a la diferencia entre la temperatura de los gases a la entrada del lecho y la temperatura del ambiente externo. Por lo tanto, la temperatura dentro del lecho en condiciones de estado estable se puede expresar más fácilmente según la expresión (23):

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{m_2 x} \quad (23)$$

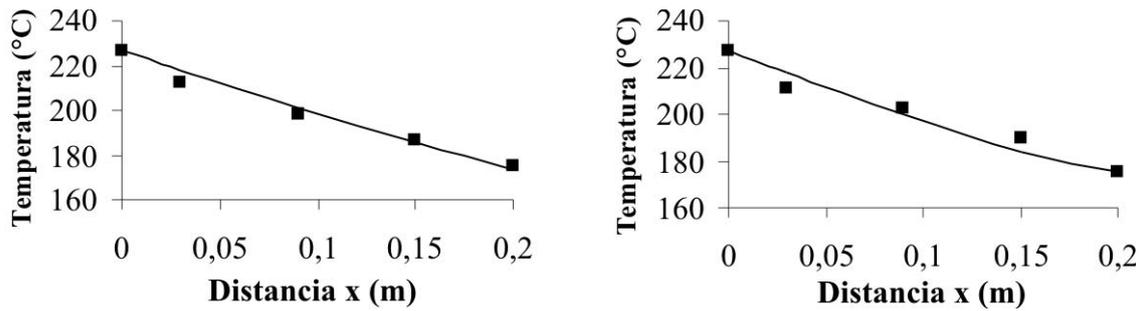
Las figuras 9 y 10 muestran los resultados obtenidos mediante la ecuación (23) y se comparan con los datos experimentales para cuatro de los casos estudiados.

El error máximo encontrado fue de 5,33%. Este error se calculó como:

$$\% \text{ error} = \frac{|(T_{cal} - T_\infty) - (T_{exp} - T_\infty)|}{T_{exp} - T_\infty} * 100 = \frac{|T_{cal} - T_{exp}|}{T_{exp} - T_\infty} * 100$$



**Figura 9** Comparación de las temperaturas de estado estable calculadas con las experimentales para esferas de 3/8" a caudal C2 (izquierda) y esferas de 1/2" a caudal C2 (derecha)



**Figura 10** Comparación de las temperaturas de estado estable calculadas con las experimentales para cilindros de 3/8" a caudal C1 (izquierda) y cilindros de 3/8" a caudal C2 (derecha)

Luego la distribución de temperatura en la dirección del flujo en estado transitorio en un

lecho poroso empacado es de la forma dada por la ecuación (24):

$$T(x, t) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty})e^{m_2 x} + \left[ T_i - \left[ T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty})e^{m_2 x} \right] \right] e^{-\frac{h_{fs}}{\rho_s c_s D_p} t} \tag{24}$$

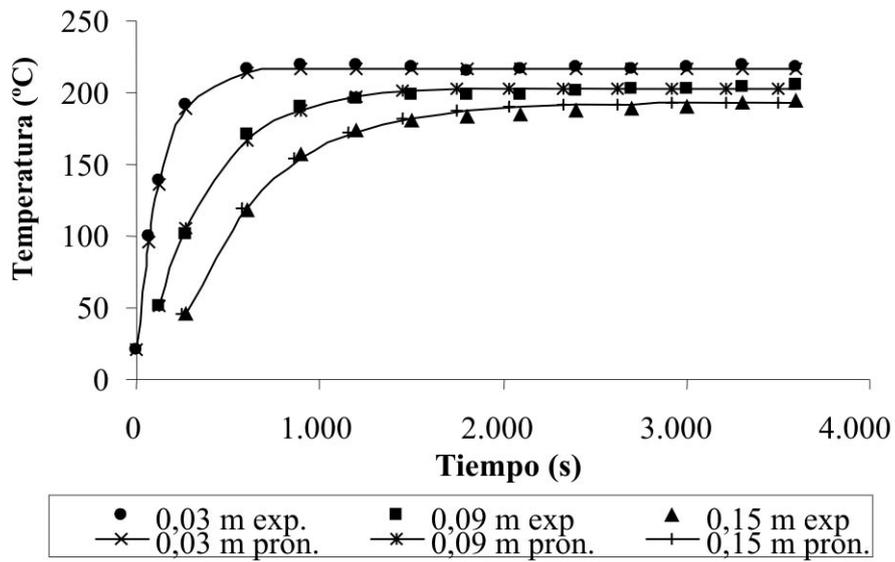
**Comparaciones entre el modelo y los datos experimentales**

En las figura 11 y 12 se muestra la comparación entre la distribución de temperatura pronosticada mediante la ecuación (24) y valores experimentales para dos de los casos analizados. Como puede observarse existe buena concordancia entre los

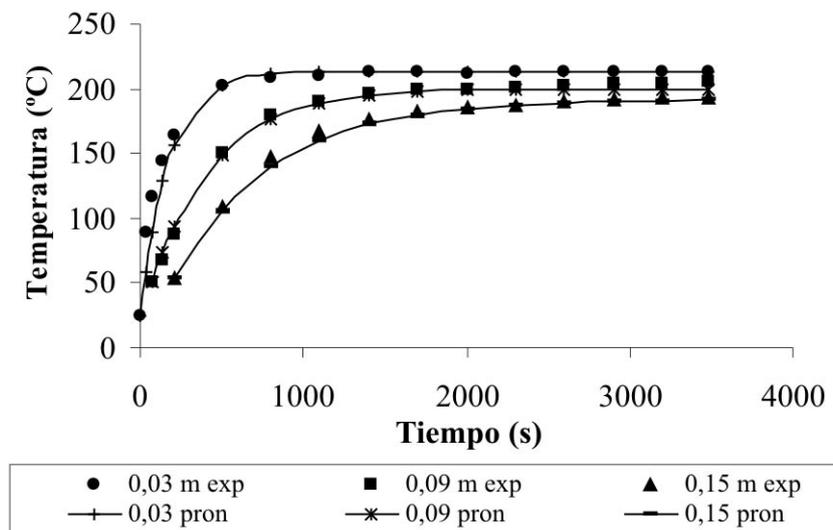
resultados que arrojan la función propuesta y los datos experimentales.

**Conclusiones**

Se halló una expresión semiempírica que permite estimar la temperatura en un regenerador térmico de lecho poroso empacado en función del tiempo



**Figura 11** Comparación entre los valores obtenidos mediante la función de distribución de temperatura propuesta y los datos experimentales para esferas de 3/8" y caudal C1; exp: mediciones experimentales, pron: predicciones del modelo



**Figura 12** Comparación entre los valores obtenidos mediante la función de distribución de temperatura propuesta y los datos experimentales para cilindros de 1/2" y caudal C1; exp: mediciones experimentales, pron: predicciones del modelo

y la posición axial para el caso en que los elementos que componen el lecho se comportan como cuerpos con resistencia interna despreciable. Con base en el análisis realizado, se resalta la necesidad de tener estimaciones precisas de los parámetros de transferencia de calor tales como la conductividad térmica efectiva y los coeficientes de transferencia de calor por convección entre los gases que atraviesan el lecho, los elementos empacados y las paredes del lecho.

Con el fin de obtener modelos más completos, en trabajos futuros es necesario considerar otros aspectos de la fenomenología física de los lechos empacados que no se han tenido en cuenta en este trabajo como: la distribución radial de temperatura y las variaciones de las condiciones de flujo en las paredes.

### Referencias

1. J. Agudelo, L. Villa, R. Mejía, C. Nieto. "Montaje experimental para recuperadores de calor". *I Congreso Internacional sobre uso Racional y Eficiente de la Energía*. Santiago de Cali. 2004.
2. G. P. Peterson, C. S. Chang. "Two-Phase Heat Dissipation utilizing porous-Channels of High-Conductivity Material". *Journal of heat transfer*. Vol. 120. 1998. pp. 243-252.
3. R. Mejía. *Planteamiento de un modelo teórico de cálculo para regeneradores térmicos*. Tesis de Grado (Ingeniero mecánico). Universidad Nacional de Colombia. Medellín. 2000. pp. 228-229.
4. L. Villa. *Diseño, construcción y puesta a punto de un banco de pruebas para regeneradores térmicos de lecho poroso empacado*. Trabajo de grado – (Pregrado en Ingeniería Mecánica), Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. 2003. pp. 127-128.
5. F. Incropera, D. DeWitt. *Fundamentos de transferencia de calor*. México. 4.ª ed. Prentice Hall. 1999. pp. 886-887.
6. D. Nield, A. Bejan. *Convection in Porous Media*. New York. 2.ª ed. Springer-Verlag. 1999 pp. 23-31.
7. G. Lauriat, R. Ghafir. Forced Convective Heat Transfer in Porous Media. En: K. Vafai (Editor). *Handbook of Porous Media*. Marcel Dekker Inc. New York. 2000. pp. 201-267.
8. A. P. De Wash, F. Froment. "Heat transfer in packed beds". *Chemical Engineering Science*. Vol. 27. 1972. pp. 567-576.
9. D. Wen, Y. Ding. "Heat transfer of gas flow through a packed bed". *Chemical Engineering Science*. Vol. 61. 2006. pp. 3532-3452.
10. N. Wakao, S. Kaguei, T. Funazkri. "Effect of fluid dispersion coefficients on particle-to-fluid heat transfer coefficients in packed beds: Correlation of Nusselt number". *Chemical Engineering Science*. Vol. 34. 1979. pp. 325-336.
11. L. A. Patiño-Carrillo, H. J. Espinoza-Bejarano. "Convección de calor intersticial en el flujo de fluidos a través de medios porosos". *Ingeniería Hidráulica en México*. Vol. 19. 2004. pp. 37- 51.