

Solución al problema del despacho hidrotérmico mediante simulación de Monte Carlo y punto interior

Solution for the hydrothermal dispatch problem using Monte Carlo simulation and interior point

*Alejandro Garcés Ruiz, Oscar Gómez Carmona**

Ingeniería y Tecnología Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, Apartado Aéreo 097, La Julita, Pereira, Colombia

(Recibido el 30 de octubre de 2007. Aceptado el 9 de mayo de 2008)

Resumen

El despacho hidrotérmico determina la relación adecuada entre la generación hidráulica y la generación térmica de tal forma que el costo operativo sea óptimo durante el período de planeamiento, cumpliendo con las restricciones de generación, transmisión y demanda; además, establece el uso racional y eficiente de los recursos energéticos de los sistemas eléctricos de potencia. En muchos casos el problema del despacho hidrotérmico es simplificado para encontrar una solución en un tiempo computacionalmente razonable. Entre las principales simplificaciones se encuentran: linealizar las funciones de costo de las plantas térmicas, eliminar las restricciones de la red de tal forma que el despacho se realice a nodo único y considerar la demanda y el caudal de forma determinística. En este artículo se presenta un método de solución al problema del despacho hidrotérmico mediante las técnicas de punto interior y simulación de Monte Carlo, el modelo propuesto considera las curvas de costo de las plantas térmicas, las restricciones de la red, la incertidumbre en el pronóstico de la demanda y la aleatoriedad en las afluencias lo cual permite obtener distribuciones de probabilidad en las variables de salida del problema (función de costos, potencias generadas, etc).

----- *Palabras clave:* Despacho hidrotérmico, simulación de Monte Carlo, método de punto interior, programación no lineal, optimización estocástica.

* Autor de correspondencia: teléfono: + 57 + 6 + 313 73 29 ext 117, fax: + 57 + 6 + 313 71 22 ext 116, correo electrónico: jr@utp.edu.co (O. Gómez).

Abstract

Hydrothermal dispatch establishes the suitable relation between hydraulic and thermal generation with optimal operative cost in a planning period, according to generation, transmission and load restrictions; moreover, it establishes the rational and efficient use of the energetic resources in the power electric systems. Normally the hydrothermal dispatch problem has been simplified to find a solution with a reasonable computational time. The principal simplifications have been: to fit lineally the thermal functions cost, to eliminate the network restrictions, to dispatch in a unique node and to consider the load and reservoir flow in a deterministic way. This paper presents a methodology which solves the hydrothermal dispatch problem using interior point method and Monte Carlo simulation, the proposed model considers the thermal cost curves, the network restrictions and the stochastic forecasting of load and reservoirs flow, allowing to obtain probability distributions of the output variables (cost function, output power, etc).

----- *Keywords:* Hydrothermal dispatch, Monte Carlo simulation, interior point method, nonlinear programming, stochastic optimization.

Introducción

Para un sistema eléctrico de potencia con generación térmica e hidráulica, el despacho hidrotérmico asigna a cada una de las centrales, la generación óptima en cada periodo de tiempo, minimizando el costo operativo total a lo largo del horizonte de planeamiento, considerando las restricciones de: operación (red de transmisión y capacidades de las centrales), disponibilidad (recurso hídrico) y abastecimiento total de la demanda. El problema del despacho hidrotérmico, se puede resolver a largo, mediano y corto plazo. A largo plazo, el horizonte varía entre uno y cinco años, con etapas anuales o trimestrales. A mediano plazo el horizonte de estudio es generalmente un año y tiene como objetivo, la programación mensual o semanal de la generación; la información con la que se cuenta es más detallada que para el caso de largo plazo y está compuesta por análisis de predicción de demanda y análisis de disponibilidad del recurso hídrico. Finalmente, el despacho hidrotérmico a corto plazo determina la programación horaria que cumple requerimientos de confiabilidad, seguridad y economía del sistema. La principal dificultad de este problema radica en el acople temporal (figura 1) de las centrales de generación hidráulica donde una decisión operativa presente afecta la operación futura (problema dinámico).

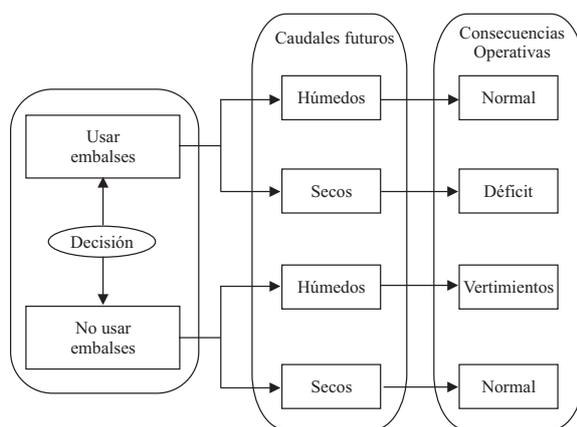


Figura 1 Acoplamiento en el tiempo para el problema del despacho hidrotérmico

Adicionalmente, la dependencia con la hidrología y la demanda hacen que el problema presente un carácter estocástico, sin embargo, es posible encontrar una predicción de estas variables (a mediano plazo), mediante el uso de técnicas probabilísticas [1, 2] o técnicas inteligentes [3, 4].

Este problema ha sido ampliamente documentado por la literatura internacional [5] y se han presentado soluciones mediante varios métodos, tales como, la programación dinámica (determinística y estocástica) [6, 7], programación lineal [8], relajación lagrangeana [9], algoritmos de optimización combinatorial [10-13], métodos lineales de punto interior para programación lineal [14] y métodos híbridos [15]. Algunos trabajos consideran la característica estocástica de la demanda y la hidrología mediante métodos estadísticos [16], funciones de membresía fuzzy [17], análisis de escenarios [18] pero no se han utilizado técnicas de simulación probabilística para determinar el comportamiento aleatorio del despacho.

En este trabajo, se presenta el método de simulación de Monte Carlo y su aplicación al problema del despacho hidrotérmico. Se incluye el modelo matemático del problema, el modelamiento estocástico de las variables y la solución mediante la técnica de punto interior. Finalmente, se presenta un caso de prueba característico de la literatura internacional con las respectivas modificaciones para la aplicación de la metodología propuesta.

Simulación de Monte Carlo

La simulación de Monte Carlo es una técnica que permite obtener el comportamiento de un escenario real, a través de experimentos con el modelo matemático que lo representa [19]. Permite obtener información cuantificable, sobre diferentes escenarios que pueden ocurrir, facilitando la toma de decisiones. Su ventaja radica en el hecho de que considera la probabilidad de ocurrencia de los eventos y observa el efecto en el sistema. Esta técnica, se utiliza cuando:

1. Es imposible observar un proceso en la vida real.

2. Los problemas o procesos dependen de variables estocásticas.
3. La complejidad del problema es tan alta que no se obtienen soluciones analíticas directas para predecir el comportamiento real del sistema.
4. No es posible construir un modelo matemático del proceso o sistema.

Dado que la simulación es un proceso matemático requiere:

1. Definición y descripción del problema.
2. Formulación del modelo matemático del problema para un escenario particular.
3. Modelamiento de las variables aleatorias del problema.
4. Solución del modelo matemático

Despacho hidrotérmico mediante simulación de Monte Carlo

En el planeamiento de sistemas de potencia, es necesario determinar el despacho hidrotérmico para un escenario futuro definido por el comportamiento de las afluencias y la demanda. Aunque no es práctico examinar todos los escenarios posibles, se puede realizar un muestreo aleatorio que revele un comportamiento típico. La simulación de Monte Carlo es una metodología que permite determinar qué tan robusta es la solución encontrada frente a las variaciones de la afluencia y la demanda, permitiendo realizar un estudio probabilístico de la solución. En concordancia con los pasos expuestos anteriormente, la simulación de Monte Carlo consiste en:

Definición y descripción del problema

El problema abordado es la programación del despacho hidrotérmico a mediano plazo (horizonte de un año discretizado en intervalos mensuales) considerando la aleatoriedad en el recurso hídrico y en la demanda.

Formulación del modelo matemático del problema para un escenario particular

Se utiliza el modelo matemático presentado en [20] y que se muestra en las ecuaciones 1 a 10.

$$\text{Min } \Psi = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{N_T} \Psi_{(i,t)} \quad (1)$$

s.a.

$$\Psi_{(i,t)} = \frac{c_{(i,t)}}{2} \cdot P_{(i,t)}^2 + e_{(i,t)} \cdot P_{(i,t)} \quad (2)$$

$$V_{(j,t+1)} = V_{(j,t)} + \tau \cdot (A_{(j,t)} - Q_{(j,t)} - S_{(j,t)}) \quad (3)$$

$$P_{(j,t)} = \rho_{(j)} \cdot Q_{(j,t)} \quad (4)$$

$$P_{(i,t)} \Big|_{\text{nodo}(i)=k} + P_{(j,t)} \Big|_{\text{nodo}(j)=k} - D_{(k,t)} = \sum_{m=1}^N B_{km} \cdot \theta_m \quad (5)$$

$$-f_{km} \leq \frac{\theta_k - \theta_m}{x_{km}} \leq f_{km} \quad (6)$$

$$P_{\min(i,t)} \leq P_{(i,t)} \leq P_{\max(i,t)} \quad (7)$$

$$Q_{\min(j,t)} \leq Q_{(j,t)} \leq Q_{\max(j,t)} \quad (8)$$

$$V_{\min(j,t)} \leq V_{(j,t)} \leq V_{\max(j,t)} \quad (9)$$

$$0 \leq S_{(j,t)} \leq S_{\max(j,t)} \quad (10)$$

donde:

- i : índice de las plantas térmicas.
- j : índice de las plantas hidráulicas.
- T : cantidad de períodos.
- t : índice del período de tiempo.
- N_T : número de plantas térmicas
- k, m : índices de los nodos del sistema.
- P : potencia activa generada por cada unidad.
- D : potencia activa demanda en cada nodo por periodo.

- ψ : función de costo de las plantas térmicas.
- Ψ : costo total de operación.
- V : volumen de un embalse por periodo.
- Q : caudal turbinado en un embalse por periodo.
- S : vertimientos en un embalse por periodo.
- A : afluencia
- f : flujo de potencia máximo por cada línea.
- B : matriz de flujo DC.
- X : reactancia por línea.
- ρ : factor de turbinamiento.
- θ : ángulos nodales.
- $C(i,t), e_{(i,t)}$: coeficientes de costo de las plantas térmicas en cada periodo de tiempo
- τ factor de conversión de caudal en volumen

Modelamiento de las variables aleatorias del problema

El problema del despacho hidrotérmico tiene dos variables estocásticas que generan infinidad de escenarios: el recurso hídrico (afluencias) y el comportamiento de la demanda.

Recurso hídrico

Diferentes trabajos sobre despacho hidrotérmico, asumen que existe total certidumbre sobre el suministro de los recursos hidráulicos de generación o que es 100% confiable. Realmente, en el caso de plantas hidráulicas con embalses de poca regulación, la capacidad de generación disponible en un momento dado, es una variable que depende de la hidrología, la cual esta controlada por fenómenos climatológicos que son de naturaleza aleatoria. Dado que se está realizando un despacho hidrotérmico a mediano plazo, se modelarán

las afluencias mediante funciones de probabilidad mensual, es decir, cada mes tendrá su propio modelo de probabilidad de tal forma que se conserve la dependencia hidrológica con el tiempo (meses lluviosos y secos).

Demanda del sistema

La demanda futura del sistema de potencia, es un fenómeno aleatorio que depende de variables económicas, demográficas, políticas y sociales y no es posible predecir en forma exacta cuál será su valor futuro. Con el fin de determinar esta demanda y su comportamiento, se realizan dos tipos de estudios: estudios de pronóstico de la demanda (load forecasting), en los cuales se predice para un año futuro el valor de la demanda máxima dentro de un rango probable de ocurrencia (incertidumbre) y estudios de modelamiento de la demanda (load modeling), en los que se pretende capturar el patrón de comportamiento. Para modelar la demanda, se utilizarán curvas de demanda de potencia mensual para cada uno de los nodos de carga de tal forma que coincida con el modelamiento a mediano plazo y se conserven los comportamientos típicos de demanda en cada uno de los nodos del sistema, además, se considerará un nivel de incertidumbre en el pronóstico de la demanda (figura 2).

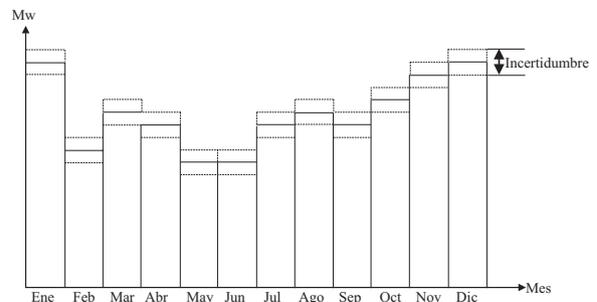


Figura 2 Perfil mensual de demanda

Solución del modelo matemático

El modelo matemático es solucionado mediante la técnica de punto interior. Su principio básico es la transformación del problema original en una se-

cuencia de sistemas no lineales que se aproximan de forma sucesiva a las condiciones de karush-kunth taker. Para ello se utiliza el método de barrera logarítmica presentado en [21]. El método asegura que las soluciones se encuentren en el interior de las restricciones de desigualdad siguiendo una dirección combinada entre centralidad y gradiente. Existen múltiples métodos de punto interior entre los que se destacan los métodos de punto interior de alta orden: Método primal dual, Método predictor corrector y Método predictor corrector con múltiples pasos de corrección. Esta última como se demostró en [22] presenta un menor tiempo de cálculo para este tipo de problemas, lo cual es especialmente importante para metodologías de simulación como la propuesta en este trabajo.

Para un escenario de afluencia y demanda determinado, el modelo descrito (ecuaciones 1-10) puede ser representado como un problema de programación no lineal (PNL) de la forma:

$$\min f(x) \tag{11}$$

s.a.

$$g(x) = 0 \tag{12}$$

$$h^l \leq h(x) \leq h^u \tag{13}$$

$$x_l \leq I'x \leq x_u \tag{14}$$

En este caso: $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, Ix , h^u , h^l , x_u , x_l son la función de costos, el conjunto de restricciones de igualdad, el conjunto de restricciones de desigualdad, el conjunto de variables canalizadas, los límites superior e inferior de $h(x)$, y los límites superior e inferior de Ix respectivamente. Así mismo, se definen las cantidades nx , ndx , ndg , ndh como el número de variables del problema, el número de variables canalizadas, el número de restricciones de igualdad y el número de restricciones de desigualdad respectivamente. Usando las variables de holgura ($s_{1j}, s_{2j}, s_{3j}, s_{4j} > 0$) para transformar las restricciones de desigualdad en restricciones de igualdad e introduciendo las condiciones de no negatividad en la función objetivo como términos de barrera logarítmica, el sistema es transformado en:

$$\min f(x) - \mu^k \sum_{j=1}^{ndh} (\ln s_{1j} + \ln s_{2j}) - \mu^k \sum_{j=1}^{ndx} (\ln s_{3j} + \ln s_{4j}) \tag{15}$$

s.a.

$$g(x) = 0 \tag{16}$$

$$-s_1 - s_2 - h^l + h^u = 0 \tag{17}$$

$$-h(x) - s_2 + h^u = 0 \tag{18}$$

$$-s_3 - s_4 - x^l + x^u = 0 \tag{19}$$

$$-I'x - s_4 + x^u = 0 \tag{20}$$

donde μ^k es un parámetro de barrera que decrece en forma monótona a cero en el proceso iterativo. A medida que el parámetro de barrera tiende a cero, el óptimo de la función de barrera logarítmica tiende al óptimo de la función original. Para dar solución a este problema se plantea la función Lagrangeana:

$$L_\mu = f(x) - \mu^k \sum_{j=1}^{ndh} (\ln s_{1j} + \ln s_{2j}) - \mu^k \sum_{j=1}^{ndx} (\ln s_{3j} + \ln s_{4j}) - y^T g(x) - z_1^T (-s_1 - s_2 - h^l + h^u) - z_2^T (-h(x) - s_2 + h^u) - z_3^T (-s_3 - s_4 - x^l + x^u) - z_4^T (-I'x - s_4 + x^u) \tag{21}$$

Derivando la función L_μ respecto a las variables w se obtiene una función $F(w) = 0$ que corresponde con las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden:

$$F(w) = \begin{bmatrix} -\mu^k e + S_1 z_1 \\ -\mu^k e + S_2 (z_1 + z_2) \\ -\mu^k e + S_3 z_3 \\ -\mu^k e + S_4 (z_3 + z_4) \\ s_3 + s_4 + x^l - x^u \\ I'x + s_4 - x^u \\ s_1 + s_2 + h^l - h^u \\ h(x) + s_2 - h^u \\ \nabla f(x) - J_g(x)^T y + J_h(x)^T z_2 + I'^T z_4 \\ -g(x) \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_1 \\ z_2 \\ x \\ y \end{bmatrix} \tag{22}$$

donde e corresponde a un vector cuyos elementos son iguales a 1.

En el caso del modelo de despacho propuesto, las matrices Jacobianas (J_F) de las restricciones pre-

sentan valores constantes, hecho que simplifica la metodología. No obstante, el sistema de ecuaciones resultante es no lineal y de gran tamaño por lo que puede ser resuelto iterativamente por el método de Newton, así:

$$\Delta w^k = -[J_F(w^k)]^{-1} F(w^k) \quad (22)$$

La eficiencia computacional en la solución de este sistema es particularmente importante en este

caso ya que la subrutina de punto interior debe ser ejecutada un alto número de veces para asegurar la convergencia de la simulación de Monte Carlo, para esto es necesario recurrir a técnicas de almacenamiento y operación de matrices dispersas haciendo uso de esta característica implícita en el modelo.

La matriz $J_F(w^k)$ se obtienen con las derivadas parciales de segundo orden de $F(w^k)$:

$$\begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 + Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_2 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & S_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_3 + Z_4 & S_4 & S_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I' & 0 \\ I & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I'^T & 0 & J_h^T & \nabla_{x^l}^2 I_u & -J_g^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_g & 0 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} \Delta s_1^k \\ \Delta s_2^k \\ \Delta s_3^k \\ \Delta s_4^k \\ \Delta z_3^k \\ \Delta z_4^k \\ \Delta z_1^k \\ \Delta z_2^k \\ \Delta x^k \\ \Delta y^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^k e - S_1 z_1 \\ \mu^k e - S_2 (z_1 + z_2) \\ \mu^k e - S_3 z_3 \\ \mu^k e - S_4 (z_3 + z_4) \\ -s_3 - s_4 - x^l - x^u \\ -I' x - s_4 + x^u \\ -s_1 - s_2 - h^l + h^u \\ -h(x) - s_2 + h^u \\ -\nabla f(x) + J_g(x)^T y - J_h(x)^T z_2 - I'^T z_4 \\ g(x) \end{bmatrix} \quad (24)$$

donde Z_i son matrices diagonales con las componentes z_i .

$$\nabla_{x^l}^2 I_\mu = H_f(x^k) - \sum_{j=1}^{ndg} y_j^k H_{g_j}(x^k) + \sum_{j=1}^{ndh} z_j^k H_{h_j}(x^k) \quad (25)$$

El cálculo de $\nabla_{x^l}^2 I_\mu$ necesita de la Hessiana de la función objetivo $H_f(x^k)$, la Hessiana de las restricciones de igualdad $H_{g_j}(x^k)$ y la Hessiana de las restricciones de desigualdad $H_{h_j}(x^k)$, en cada iteración k . Para el problema tratado:

$$\nabla_{x^l}^2 I_\mu = 2C. \quad (26)$$

donde C es una matriz diagonal que contiene los términos cuadráticos de las funciones de costo de las plantas térmicas y por tanto es constante.

Inicialización de variables y sus características

El punto inicial debe satisfacer las restricciones de desigualdad (punto interior en el espacio de soluciones):

$$s_1^0, s_2^0, s_3^0, s_4^0, z_1^0, (z_1^0 + z_2^0), z_3^0, (z_3^0 + z_4^0) > 0 \quad (27)$$

Como el proceso de convergencia es sensible al punto inicial, una manera de inicializar las variables primales consiste en tomar el punto medio entre los límites superior e inferior de aquellas variables canalizadas y ceros para las variables libres [21]. Las variables y_i son cero al inicio del proceso y para las variables de holgura primal se tiene:

$$s_{1i}^0 = \min\{\max\{\tau h_i^\Delta, h_i(x^0) - h_i^l\}, (1-\tau)h_i^\Delta\} \quad (28)$$

$$s_{2i}^0 = h_i^\Delta - s_{1i}^0 \quad (29)$$

$$s_{3j}^0 = \min\{\max\{\tau x_j^\Delta, I' x_j - x_j^l\}, (1-\tau)x_j^\Delta\} \quad (30)$$

$$s_{4i}^0 = x_j^\Delta - x_{3j}^0 \quad (31)$$

donde $h^\Delta = h^u - h^l$, $y x_j^\Delta = x^u - x^l$, típicamente $\tau = 0,25$.

Finalmente, las variables de holgura dual son inicializadas de la siguiente manera:

$$z_1^0 = \mu^0 (S_1^0)^{-1} e \quad (32)$$

$$z_2^0 = \mu^0 (S_2^0)^{-1} e - z_1^0 \quad (33)$$

$$z_3^0 = \mu^0 (S_3^0)^{-1} e \quad (34)$$

$$z_4^0 = \mu^0 (S_4^0)^{-1} e - z_3^0 \quad (35)$$

Actualización de las variables

Después de obtener las direcciones Δw^k , los nuevos valores de las variables para la iteración $k+1$ son obtenidos de la siguiente forma:

$$x^{k+1} = x^k + \gamma \alpha_p^k \Delta x^k \quad (36)$$

$$s_i^{k+1} = s_i^k + \gamma \alpha_p^k \Delta s_i^k; i = 1,2,3,4 \quad (37)$$

$$y^{k+1} = y^k + \gamma \alpha_d^k \Delta y^k \quad (38)$$

$$z_i^{k+1} = z_i^k + \gamma \alpha_d^k \Delta z_i^k; i = 1,2,3,4 \quad (39)$$

El valor de γ se encuentra entre 0 y 1, y es un parámetro de seguridad para garantizar que el próximo punto satisfaga las condiciones de no negatividad. Un valor típico es $\gamma=0,99995$. Los escalares α_p^k y $\alpha_d^k \in (0, 1]$, son las longitudes de paso primal y dual, respectivamente para la iteración k . Estos valores son calculados de tal forma que el nuevo punto continúe en el interior del espacio de soluciones.

$$\alpha_p^k = \min_{ij} \left\{ 1, \min_{\Delta s_{1i}^k < 0} \left(\frac{-s_{1i}^k}{\Delta s_{1i}^k} \right), \min_{\Delta s_{2i}^k < 0} \left(\frac{-s_{2i}^k}{\Delta s_{2i}^k} \right) \right\} \quad (40)$$

$$\min_{\Delta s_{3j}^k < 0} \left(\frac{-s_{3j}^k}{\Delta s_{3j}^k} \right), \min_{\Delta s_{4j}^k < 0} \left(\frac{-s_{4j}^k}{\Delta s_{4j}^k} \right) \left\} \right.$$

$$\alpha_d^k = \min_{ij} \left\{ 1, \min_{\Delta z_{1i}^k < 0} \left(\frac{-z_{1i}^k}{\Delta z_{1i}^k} \right), \min_{\Delta z_{3j}^k < 0} \left(\frac{-z_{3j}^k}{\Delta z_{3j}^k} \right), \min_{\Delta z_{1i}^k + \Delta z_{2i}^k < 0} \left(\frac{-(z_{1i}^k + z_{2i}^k)}{\Delta z_{1i}^k + \Delta z_{2i}^k} \right), \min_{\Delta z_{3j}^k + \Delta z_{4j}^k < 0} \left(\frac{-(z_{3j}^k + z_{4j}^k)}{\Delta z_{3j}^k + \Delta z_{4j}^k} \right) \right\} \quad (41)$$

Reducción del parámetro de barrera

Como se mostró anteriormente, la reducción del parámetro de barrera permite un acercamiento monótono al óptimo del problema original. No obstante, existen diferentes secuencias de reducción de este parámetro las cuales afectan el tiempo de cálculo. Un esquema de reducción propuesto en [21] utiliza el valor residual de la condición de complementariedad llamado gap de complementariedad, y es calculado en cada iteración k por:

$$\rho^k = (z_1^k)^T s_1^k + (z_1^k + z_2^k)^T s_2^k + (z_3^k)^T s_3^k + (z_3^k + z_4^k)^T s_4^k \quad (42)$$

La secuencia $\{\rho^k\}_{k=1}^{\infty}$ debe tender a cero, y la relación entre ρ^k y μ^k , es reducida en cada iteración k en función a la disminución del gap de complementariedad, según la expresión:

$$\mu^{k+1} = \beta^k \frac{\rho^k}{2(ndx + ndl\eta)} \quad (43)$$

Donde β es un parámetro de centralización.

Para compensar los objetivos de reducir μ^k y mejorar la dirección central, β^k se escoge dinámicamente como $\beta^{k+1} = \max\{0,95\beta^k; 0,1\}$, con valor inicial $\beta^0=0,2$.

Criterios de convergencia

Es necesario definir en qué punto se acepta una solución como óptima dentro del proceso iterativo, para ello se debe garantizar cada uno de los siguientes criterios de convergencia:

Factibilidad Primal:

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \|g(x^k)\|_\infty, \max \{x^l - x^k\}, \max \{x^k - x^u\}, \right. \\ & \left. \max \{h^l - h(x^k)\}, \max \{h(x^k) - h^u\} \right\} \leq \epsilon_f \end{aligned} \quad (44)$$

Factibilidad Dual:

$$\max \frac{\|\nabla f(x^k) - J_g(x^k)^T y^k + J_h(x^k)^T z_2^k + I^T z_4^k\|_\infty}{1 + \|x^k\|_2} \leq \epsilon_f \quad (45)$$

Condición de Optimalidad:

$$\frac{\rho^k}{1 + \|x^k\|_2} \leq \epsilon_0 \quad (46)$$

Método de punto interior de alto orden

En general los métodos de alto orden, predicen una dirección de búsqueda, affine-scaling, que es corregida posteriormente para mejorar el método y agilizar el proceso de búsqueda de la solución óptima, se presentan los siguientes métodos de alto orden: Método Predictor Corrector (MPC) y Método Predictor con Múltiples Pasos de Corrección (MPMC). Este último es el implementado para la solución del despacho hidrotérmico.

Método predictor – corrector (MPC)

Este método es una modificación del Método Primal – Dual, mejorando el cálculo de las direcciones de búsqueda para acelerar la convergencia. El MPC soluciona dos sistemas lineales en cada iteración, usando la misma matriz cuadrada de coeficientes de (24). La diferencia radica en los vectores $F(w^k)$ del lado derecho de este sistema. Esos dos sistemas definen los pasos predictor y corrector, respectivamente. Adicionando al sistema Newton los términos de segundo orden, se tiene:

$$J_F(w^k) \Delta w^k = -M(w^k) + \mu^k u - \Delta \quad (47)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Delta = & [\Delta S_1 \Delta Z_1, \Delta S_2 (\Delta Z_1 + \Delta Z_2), \Delta S_3 \Delta Z_3, \\ & \Delta S_4 (\Delta Z_3 + \Delta Z_4), 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \end{aligned} \quad (48)$$

De (48) se obtienen tres componentes para la dirección de búsqueda. Estas direcciones son divididas en dos pasos: Predictor y Corrector para el MPC.

$$\Delta w^k = \underbrace{\Delta w_{af}^k}_{\text{Predictor}} + \underbrace{\Delta w_{ce}^k + \Delta w_{co}^k}_{\text{Corrector}} \quad (49)$$

Δw_{af}^k es la dirección predictor o dirección affine – scaling con $\mu^k=0$.

Δw_{ce}^k es la dirección central con un μ^k apropiado.

Δw_{co}^k es la dirección corrector sólo con el tercer vector del lado derecho de (47).

Paso predictor

La dirección affine-scaling es calculada solucionando (47), teniendo en cuenta solamente el primer vector del lado derecho. Esta dirección es usada para aproximar los términos no-lineales Δ de la parte derecha de (48) y para estimar un valor del parámetro de barrera μ^k , que serán usados en el paso corrector. El tamaño de paso primal y dual, en la dirección de affine-scaling, α_d^{af} y α_p^{af} son calculados usando (45) y (46) respectivamente y reemplazando k por af . Igualmente el gap de complementariedad del paso predictor es dado por:

$$\begin{aligned} \rho^{af} = & (z_1 + \gamma \alpha_d^{af} \Delta z_1^{af})^T (s_1 + \gamma \alpha_p^{af} \Delta s_1^{af}) + \\ & (z_1 + z_2 + \gamma \alpha_d^{af} (\Delta z_1^{af} + \Delta z_2^{af}))^T (s_2 + \gamma \alpha_p^{af} \Delta s_2^{af}) + \\ & (z_3 + \gamma \alpha_d^{af} \Delta z_3^{af})^T (s_3 + \gamma \alpha_p^{af} \Delta s_3^{af}) + \\ & (z_3 + z_4 + \gamma \alpha_d^{af} (\Delta z_3^{af} + \Delta z_4^{af}))^T (s_4 + \gamma \alpha_p^{af} \Delta s_4^{af}) \end{aligned} \quad (50)$$

Una estimación de μ^{af} es:

$$\mu^{af} = \min \left\{ \left(\frac{\rho^{af}}{\rho^k} \right), 0.2 \right\} \frac{\rho^{af}}{2(ndx + ndh)} \quad (51)$$

Paso corrector

Con los resultados del paso predictor se puede calcular la dirección Δw^k , resolviendo todo el sistema (48). El paso corrector calcula simultáneamente las direcciones Δw_{ce}^k y Δw_{co}^k . El esfuerzo adicional en el método predictor–corrector se presenta en el cálculo de Δw_{af}^k , μ^{af} , α_p^{af} y α_d^{af} , sin embargo, tiene como ventajas la reducción del número de iteraciones y el tiempo computacional.

Método predictor con múltiples pasos de corrección (MPMC)

Una vez calculada la dirección affine–scaling, es posible realizar m pasos de corrección, con el fin de mejorar la dirección de búsqueda, éstos se calculan según (52).

$$[J_F] \begin{bmatrix} \Delta s_1^{m+1} \\ \Delta s_2^{m+1} \\ \Delta s_3^{m+1} \\ \Delta s_4^{m+1} \\ \Delta z_3^{m+1} \\ \Delta z_4^{m+1} \\ \Delta z_1^{m+1} \\ \Delta z_2^{m+1} \\ \Delta x^{m+1} \\ \Delta y^{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_1 z_1 + \mu^{af} e - \Delta S_1^m \Delta z_1^m \\ -S_2 (z_1 + z_2) + \mu^{af} e - \Delta S_2^m (\Delta z_1^m + \Delta z_2^m) \\ -S_3 z_3 + \mu^{af} e - \Delta S_3^m \Delta z_3^m \\ -S_4 (z_3 + z_4) + \mu^{af} e - \Delta S_4^m (\Delta z_3^m + \Delta z_4^m) \\ -s_3 - s_4 - x^j + x^u \\ -I' x - s_4 + x^u \\ -s_1 - s_2 - h^j + h^u \\ -h(x) - s_2 + h^u \\ -\nabla f(x) + J_g(x)^T y - J_h(x)^T z_2 - I^T z_4 \\ g(x) \end{bmatrix} \quad (51)$$

Para el caso $m=0$, $\Delta w^0 = \Delta w^{af}$, y después de realizada la corrección $\Delta w^k = \Delta w^m$, el siguiente paso de corrección ($m+1$) es efectuado si: a) es posible obtener una disminución del gap de complementariedad ($\rho^m < \rho^{m-1}$) en la iteración m o b) m es menor que un número máximo de pasos de corrección M (típicamente igual a 5). Cuando el proceso es interrumpido la dirección de búsqueda es $\Delta w^k = \Delta w^{k-1}$.

Algoritmo de simulación de Monte Carlo aplicado al problema del despacho hidrotérmico

La simulación de Monte Carlo aplicada al problema del despacho hidrotérmico consiste en la ejecución de los siguientes pasos:

1. Se genera un valor de afluencia para cada mes y para cada planta hidráulica del sistema mediante un número aleatorio uniformemente distribuido y la distribución de probabilidad respectiva de afluencia.
 2. Se genera un valor de demanda en cada punto de carga y para cada mes mediante un número aleatorio uniformemente distribuido y el rango de incertidumbre en el valor esperado de demanda mensual.
 3. Se realiza el despacho hidrotérmico para las condiciones de afluencia y demanda generadas para el sistema, solucionando el problema de optimización planteado en las ecuaciones 1 a 10, mediante el método de punto interior MPMC.
 4. Se almacena el costo de generación, la generación hidráulica, la generación térmica y se verifica el criterio de parada.
 5. Si el criterio de parada no se cumple (máximo número de iteraciones alcanzadas, coeficiente de variación y estabilidad de la simulación [19]), ir al paso 1 de lo contrario, ir a 6.
- Coefficiente de variación:
- $$cv = \frac{\sigma_{FO}}{X_{FO} \sqrt{n}} \quad (52)$$
- donde:
- σ_{FO} : Es la desviación estándar de la función objetivo.
 - X_{FO} : Valor medio de la función objetivo.
 - n : La cantidad de iteraciones en la simulación (muestras).
6. Recoger las observaciones de costos, generación hidráulica y térmica obtenidas y construir las respectivas distribuciones de probabilidad que modelen el comportamiento.

Caso de estudio

La metodología propuesta es aplicada sobre el sistema presentado en [23] con algunas modificaciones y escala puramente teórica:

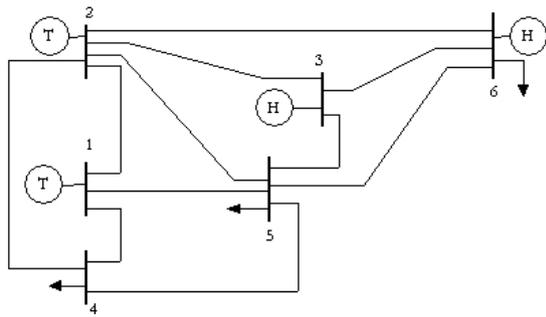


Figura 3 Sistema de prueba

Tabla 1 Datos del sistema

Nodo1	Nodo2	X [pu]	F_{max} [pu]
1	2	0,20	1
1	4	0,05	1
1	5	0,08	1
2	3	0,05	1
2	4	0,05	1
2	5	0,10	1
2	6	0,07	1
3	5	0,12	1
3	6	0,02	1
4	5	0,20	1
5	6	0,10	1

Tabla 2 Comportamiento de la demanda (p.u).

Nodo/Mes	4	5	6
Enero	0,8492	0,9189	0,8595
Febrero	0,9256	0,8870	0,9035
Marzo	0,9669	0,9065	0,9904
Abril	0,7209	0,8602	0,9124
Mayo	0,7616	0,7960	0,9124
Junio	0,7274	0,7695	0,9406
Julio	0,8488	0,8601	1,0000
Agosto	0,7262	0,8002	0,9152
Septiembre	0,8987	0,7592	0,8579
Octubre	1,0000	0,7957	0,8826
Noviembre	0,9779	0,8272	0,8574
Diciembre	0,9747	1,0000	0,8779

Tabla 3 Plantas térmicas

Nodo	a / 2 [\$/pu²]	B [\$/pu]	Pmax [pu]	Pmin [pu]
1	108	1166,9	2	0
2	176	1033,3	2	0

Tabla 4 Plantas hidráulicas

Nodo	3	6
Factor Turb. [pu/(m ³ /s)]	1.1	1.2
Vinicial [m ³]	20	20
Vfinal [m ³]	2	2
Vmax [m ³]	25	25
Vmin [m ³]	2	2

Tabla 5 Demanda máxima del sistema en p.u.

Nodo	Demanda máxima
4	1,95 ± 10%
5	0,90 ± 10%
6	0,60 ± 10%

De la tabla 5, alpha y beta corresponden a los parámetros de escala y forma respectivamente y $E(X)$ es el valor esperado de la función. Los modelos anteriores se construyeron a partir de los datos reportados en [1] que consisten del registro de caudales promedios mensuales para un periodo de 35 años del río Otún en la ciudad de Pereira-Colombia. Estos datos fueron normalizados entre 0 y 1 para la correspondencia con los datos mostrados en la tabla 3, además, se asumió una afluencia en la planta 2 del 70% de la planta 1.

Tabla 6 Modelo probabilístico de las afluencias de los embalses en m³/s

Mes	Planta hidráulica 1				Planta hidráulica 2			
	Modelo	Alpha	Beta	E(X)	Modelo	Alpha	Beta	E(X)
1	Lognormal	-1,1638	0,3961	0,3378	Lognormal	-1,5205	0,3961	0,2364
2	Lognormal	-1,2476	0,4983	0,3252	Lognormal	-1,6042	0,4983	0,2276
3	Lognormal	-1,1483	0,4488	0,3508	Lognormal	-1,5050	0,4488	0,2455
4	Lognormal	-0,8821	0,3445	0,4392	Lognormal	-1,2387	0,3445	0,3075
5	Normal	0,4549	0,1270	0,4549	Normal	0,3184	0,0889	0,3184
6	Normal	0,3246	0,0985	0,3246	Normal	0,2272	0,0690	0,2272
7	Lognormal	-1,5093	0,4078	0,2402	Lognormal	-1,8659	0,4078	0,1682
8	Normal	0,2098	0,0833	0,2098	Normal	0,1468	0,0583	0,1468
9	Normal	0,2616	0,1131	0,2616	Normal	0,1831	0,0791	0,1831
10	Normal	0,4441	0,1443	0,4441	Normal	0,3109	0,1010	0,3109
11	Normal	0,5540	0,1715	0,5540	Normal	0,3878	0,1200	0,3878
12	Normal	0,4642	0,1967	0,4642	Normal	0,3249	0,1377	0,3249

Resultados y Discusión

Se realizaron 1080 iteraciones en la Simulación de Monte Carlo obteniendo la estabilidad mostrada en la figura 4 y un coeficiente de variación de 0,0020 (0,20%).

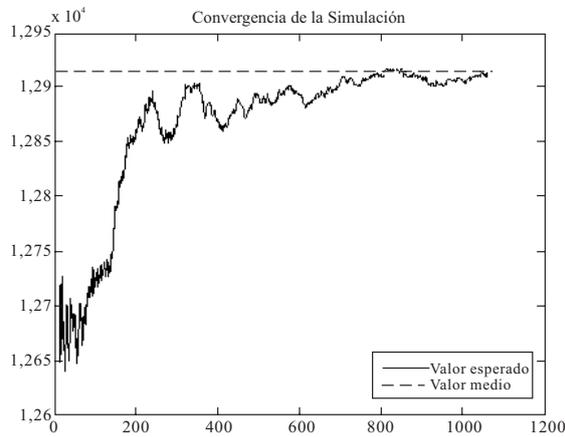


Figura 4 Estabilidad de la simulación (Valor esperado y medio respecto a la cantidad de datos)

La función de costo arroja un valor medio de 12.914,0312 unidades de costo y mediante técnicas de inferencia estadística se obtuvo el histograma de frecuencias y la distribución de probabilidad mostrada en la figura 5.

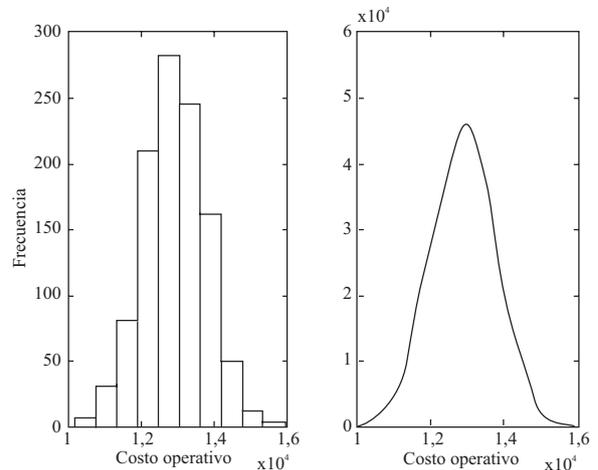


Figura 5 Histograma de frecuencias y distribución de probabilidad

La función de distribución encontrada es Normal con parámetros 12.914,0312 y 859,9429. Además del comportamiento de la función de costo del despacho, la metodología propuesta permite obtener las funciones de probabilidad de la generación térmica e hidráulica, los volúmenes y vertimientos mensuales en cada embalse y los racionamientos en los puntos de carga. Para el

sistema propuesto, el racionamiento y vertimiento encontrado fue siempre cero ya que se penalizaba en la función objetivo y para cada escenario se encontró una solución óptima. Respecto a la generación hidráulica, el volumen en las plantas hidráulicas y la generación térmica en cada periodo, en la tablas 7, 8 y 9 se muestran las distribuciones de probabilidad obtenidas.

Tabla 7 Modelo probabilístico mensual de la generación hidráulica

Mes	Planta hidráulica 1				Planta hidráulica 2			
	Modelo	Alpha	Beta	E(X)	Modelo	Alpha	Beta	E(X)
1	Exponencial	10,205	-	10,205	Normal	10,747	0,79253	10,747
2	Normal	0,092506	0,13993	0,092506	Normal	19,609	0,12643	19,609
3	Normal	0,092096	0,077773	0,092096	Lognormal	0,68884	0,012397	1,9916
4	Lognormal	0,68877	0,013134	1,9914	Normal	0,10074	0,083012	0,10074
5	Normal	19,888	0,063794	19,888	Normal	0,092539	0,097955	0,092539
6	Normal	19,756	0,044285	19,756	Normal	0,066682	0,071803	0,066682
7	Exponencial	12,093	-	12,093	Exponencial	0,93729	-	0,93729
8	Lognormal	0,68268	0,020185	1,9796	Normal	0,071211	0,075637	0,071211
9	Exponencial	0,5197	-	0,5197	Normal	14,459	0,48896	14,459
10	Lognormal	-9,704	82,266	1,9796	Normal	17,459	0,24818	17,459
11	Normal	0,63809	0,49669	0,63809	Lognormal	0,18149	0,43726	1,3193
12	Lognormal	-0,39943	0,65953	0,8337	Normal	12,617	0,43229	12,617

Tabla 8 Modelo probabilístico mensual de los volúmenes en las plantas hidráulicas

Mes	Volúmenes en la planta hidráulica 1				Volúmenes en la planta hidráulica 2			
	Modelo	Alpha	Beta	E(X)	Modelo	Alpha	Beta	E(X)
1	Uniforme	15,5206	22,023	18,7720	Uniforme	15,873	21,667	18,770
2	Normal	19,103	18,839	19,103	Normal	14,673	17,356	14,673
3	Normal	19,789	18,905	19,789	Normal	11,012	17,522	11,012
4	Normal	16,22	18,998	16,22	Uniforme	8,2582	15,289	11,774
5	Normal	12,715	19,062	12,715	Normal	12,206	17,591	12,206
6	Normal	8,9054	1,9122	8,9054	Normal	12,646	17,517	12,646
7	Lognormal	1,8865	0,1460	6,6669	Normal	11,059	11,919	11,059
8	Normal	2,5463	1,0869	2,5463	Normal	11,291	1,2000	11,291
9	Normal	2,009	0,08302	2,009	Normal	8,6457	0,76054	8,6457
10	Normal	2,7173	0,6081	2,7173	Normal	5,6817	0,8328	5,6817
11	Normal	2,6588	0,92896	2,6588	Normal	3,8605	0,95592	3,8605
12	Lognormal	0,69315	2,64E-08	2	Normal	2	4,88E-08	2

Tabla 9 Modelo probabilístico mensual de la generación térmica

<i>Mes</i>	<i>Hidráulica 1</i>	<i>Vol.</i>	<i>Hidráulica 2</i>	<i>Vol.</i>	<i>Térmica 1</i>	<i>Térmica 2</i>
1	0,497401	19,7035	1,599743	17,1573	0,343179	0,558327
2	0,047642	20,4342	1,999999	13,4272	0,568334	0,529343
3	0,076978	21,1621	1,999999	9,74358	0,707084	0,511482
4	1,999999	17,5877	0,092559	10,3407	1,3511x10 ⁻¹⁰	0,634816
5	1,999999	14,0541	0,104433	10,9404	0,044307	0,600219
6	1,999999	10,1827	0,040523	11,4418	1,3511x10 ⁻¹⁰	0,634816
7	1,967618	6,16892	0,160127	11,5319	0,343177	0,558327
8	1,999999	2,00000	0,050573	11,8031	1,3511x10 ⁻¹⁰	0,634816
9	0,287760	2,00000	1,677106	8,65519	0,441003	0,544615
10	4,1604x10 ⁻⁸	3,15111	1,926234	5,30038	0,771110	0,498345
11	1,097909	2,00000	0,835157	4,50162	0,728430	0,504327
12	0,510620	2,00000	1,548036	2,00000	0,770288	0,498460

Adicionalmente se resolvió el problema desde un punto de vista determinístico, utilizando los valores esperados, según las distribuciones de probabilidad de los datos de entrada. La función

de costo encontrada bajo este enfoque fue de 12.928,8499 unidades de costo y la generación hidráulica, sus volúmenes y las generación térmica se muestra en la tabla 10.

Tabla 10 Potencia generada mensual en las plantas generadoras

<i>Mes</i>	<i>Hidráulica 1</i>	<i>Vol.</i>	<i>Hidráulica 2</i>	<i>Vol.</i>	<i>Térmica 1</i>	<i>Térmica 2</i>
1	0,497401	19,7035	1,599743	17,1573	0,343179	0,558327
2	0,047642	20,4342	1,999999	13,4272	0,568334	0,529343
3	0,076978	21,1621	1,999999	9,74358	0,707084	0,511482
4	1,999999	17,5877	0,092559	10,3407	1,3511x10 ⁻¹⁰	0,634816
5	1,999999	14,0541	0,104433	10,9404	0,044307	0,600219
6	1,999999	10,1827	0,040523	11,4418	1,3511x10 ⁻¹⁰	0,634816
7	1,967618	6,16892	0,160127	11,5319	0,343177	0,558327
8	1,999999	2,00000	0,050573	11,8031	1,3511x10 ⁻¹⁰	0,634816
9	0,287760	2,00000	1,677106	8,65519	0,441003	0,544615
10	4,16x10 ⁻⁸	3,15111	1,926234	5,30038	0,771110	0,498345
11	1,097909	2,00000	0,835157	4,50162	0,728430	0,504327
12	0,510620	2,00000	1,548036	2,00000	0,770288	0,498460

Comparando las respuestas obtenidas en la tabla 10 con los valores esperados de las distribuciones de probabilidad mostradas en las tablas 7, 8 y 9 se observa que la simulación converge ya que las diferencias encontradas no superan el 10 %. El único inconveniente presentado fue en el ajuste de los resultados obtenidos para la planta térmica 1 en los meses abril, junio y agosto donde normalmente permanece apagada, esto se puede observar en la generación térmica mostrada en la tabla 9.

Conclusiones

A diferencia del enfoque determinístico, el enfoque propuesto permite obtener distribuciones de probabilidad de las diferentes variables asociadas al despacho facilitando la toma de decisiones y la aplicación de otras herramientas de análisis como la evaluación del riesgo. Lo anterior es especialmente importante en el planeamiento energético, donde normalmente hay incertidumbre en el comportamiento de las variables futuras. El modelamiento utilizado para el despacho presenta variantes frente a los modelos convencionales ya que considera la red de transmisión, los costos cuadráticos de las plantas térmicas y la incertidumbre en la demanda futura.

Dado que la simulación de Monte Carlo requiere la evaluación de muchos escenarios, el método de punto interior de alto orden es una herramienta rápida y eficiente para la solución del despacho (problema no lineal) frente a otras metodologías convencionales como las estrategias evolutivas.

La metodología propuesta permite considerar incertidumbre en otras variables del problema como los costos de las plantas térmicas, así mismo, se podría considerar las probabilidades de falla de los elementos del sistema (líneas y generadores) permitiendo realizar un análisis de confiabilidad. La red de transmisión afecta de forma significativa el despacho, ya que introduce restricciones de operación adicionales que normalmente no son consideradas, igualmente, la metodología permite analizar variables del sistema de transmisión como la cargabilidad de los elementos o el racionamiento en los puntos de carga.

Referencias

1. C. Romero, M. Vahos. "Modelamiento del caudal de un río para estudios de confiabilidad de largo plazo de sistemas eléctricos". *Scientia et Technica* Vol. 34. 2007. pp. 97-101.
2. C. Zapata., J. López, R. Ericsson. "Efecto del modelamiento de la demanda en estudios de confiabilidad de largo plazo de sistemas eléctricos". *Scientia et Técnica*. Vol. 32. 2006. pp. 43-48.
3. D. Velásquez, C. Zapata. *Pronóstico del caudal medio mensual, con una ventana de 12 meses, usando sistemas difusos*. Proyecto de Investigación. Universidad Nacional De Colombia – Medellín. 2004.
4. N. Obregón, F. Fragala, L. F. Prada. "Redes neuronales artificiales en hidroinformática". *Seminario Internacional: La Hidroinformática en la Gestión Integrada de los Recursos Hídricos*. Cartagena, Colombia. 2003. pp. 1- 5.
5. N. Prasad "Unit Commitment—A Bibliographical Survey", *IEEE Transactions on power systems*, Vol. 19. 2004. pp 1196-1205.
6. L. Martínez, S. Soares. "Primal and dual stochastic dynamic programming in long term hydrothermal scheduling". *Power Systems Conference and Exposition, IEEE PES* 2004. Vol. 3. pp. 1283-1288.
7. J. Bedoya, M. Barrera. "Programación dinámica estocástica aplicada al problema del despacho hidrotérmico" *Scientia et Technica* Vol. 28. 2005. pp. 53-58
8. H. Habibollahzadeh, G.X. Luo, A. Semlyen. "Hydrothermal optimal power flow based on a combined linear and nonlinear programming methodology". *IEEE Transactions on Power Systems*. Vol. 4. 1989. pp. 530-537.
9. A. L. Diniz, C. Sagastizábal, M. E. P. Maceira. "Assessment of Lagrangian Relaxation with Variable Splitting for Hydrothermal Scheduling". *Power Engineering Society General Meeting*. 2007. IEEE. 2007. pp. 1-8.
10. C. Zoumas, A. Bakirtzis, J. Theocharis, V. Petridis. "A genetic algorithm solution approach to the hydrothermal coordination problem". *IEEE Transactions on Power Systems*. Vol. 19. 2004. pp.1356-1364.
11. T. Cau, R. Kaye. "Evolutionary optimization method for multistorage hydrothermal scheduling". *Generation, Transm. and Distrib. IEE Proceedings*. Vol. 149. 2002. pp. 152-156.

12. L. Lakshminarasimman, S. Subramanian. "Short-term scheduling of hydrothermal power system with cascaded reservoirs by using modified differential evolution". *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings*. Vol. 153. 2006. pp. 693-700
13. C. Nallasivan, D. S. Suman, H. Joseph, S. Ravichandran. "A novel approach for short-term hydrothermal scheduling using hybrid technique". *IEEE Power India Conference*, 2006. pp.5-12.
14. J. C. Medina, V. H. Quintana, A. J. Conejo, F. PCrez Thoden. "A comparison of interior-point codes for medium-term hydro-thermal coordination" *IEEE Transactions on Power Systems*. Vol. 13. 1998. pp. 836-843
15. Z. Daoyuan, L. Peter, Z. Yuanhui. "A bundle method for hydrothermal scheduling". *IEEE Trans. On Power Systems*. Vol. 14. 1999. pp. 1355-1361
16. S. Tong, S. Shahidehpour. "Hydrothermal unit commitment with probabilistic constraints using segmentation method". *IEEE Transactions on Power Systems*. Vol. 5. 1990. pp. 276-282.
17. J. Dhillon, S. Parti, D. Kothari. "Fuzzy decision-making in stochastic multiobjective short-term hydrothermal scheduling". *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings*. Vol. 149. 2002. pp. 191-200
18. B. Gorenstin, N. Campodónico, J. Costa, M. Pereira. "Stochastic optimization of a hydrothermal system including network constraints". *IEEE on PAS*. Vol.7. 1992. pp. 791-797
19. R. Billinton, R. Allan. *Reliability evaluation of engineering systems. Concepts and Techniques*. 2ª ed. Plenum Press. 1992. pp. 405-409
20. A. Garcés, J. C. Galvis, O. Gómez. "Algoritmo Evolutivo Diferencial Aplicado al Problema de Despacho Hidrotérmico". *Scientia et Technica*. Vol. 32. 2006. pp. 187-192
21. J. M. Rider. "Método de punto interior aplicado a la optimización en sistemas eléctricos". *Seminario de optimización en sistemas de potencia*. Pereira. 2004.
22. C. Correa, A. R. Bolaños, A. Garcés Ruiz. "Métodos no lineales de Punto interior aplicados al problema del despacho hidrotérmico". *Scientia et Técnica*. Vol. 34. 2005. pp. 91-96
23. A. Word, B. Wollenberg. *Power generation, operation and control*. John Wiley & Sons. New York. 1984. pp. 251.