

## **Aplicación de diseño óptimo dimensional a la síntesis de posición y velocidad en mecanismos de cuatro barras**

### **Application of sizing design optimization to position and velocity synthesis in four bar linkage**

*Carlos Humberto Galeano Urueña\**, *Carlos Alberto Duque Daza*, *Diego Alexander Garzón Alvarado*

Universidad Nacional de Colombia, Cra. 30 N.º 45-03, Edificio 453 Oficina 401, Bogotá, Colombia.

(Recibido el 8 de febrero de 2008. Aceptado el 6 de noviembre de 2008)

#### **Resumen**

El presente artículo plantea y soluciona el problema de síntesis de posición y velocidad de mecanismos de cuatro barras empleando diseño óptimo dimensional e implementando algoritmos de optimización no-lineal (Programación Cuadrática Secuencial-SQP). El problema de optimización se define acorde al tipo de síntesis necesaria: que puede ser generación de trayectoria, de función o de velocidad. Esta última con síntesis implícita o explícita de trayectoria. La exactitud del algoritmo es evaluada mediante el desarrollo de cuatro casos de estudio. El problema de optimización definido, junto con el algoritmo de búsqueda empleado permite alcanzar de forma simple y en pocas iteraciones la configuración más adecuada. El desarrollo de un problema de síntesis mixta de posición y velocidad, permitió validar la eficiencia del algoritmo.

----- *Palabras clave:* Mecanismo de cuatro barras, diseño óptimo, síntesis, programación cuadrática secuencial.

#### **Abstract**

In this work, we have developed and solved the synthesis of position and velocity for four bar mechanisms by means of dimensional and optimal algorithms of nonlinear optimization (sequential quadratic programming SQP). The optimization problem was defined according to the synthesis needed: it can be trajectory, function or velocity generation. The velocity can be defined with an explicit or implicit trajectory. The optimization problem and

---

\* Autor de correspondencia: teléfono: + 57 + 1 + 316 50 00 ext. 14062, fax: + 57 + 1 + 316 53 33, correo electrónico: chgaleanou@unal.edu.co (C. Galeano).

the search algorithm used in this work allow reaching the best configuration by way of a simple scheme and few iterations. Alternatively, the development of a mix synthesis of position and velocity allows us validate the algorithm efficiency.

----- *Keywords:* Four bar linkage, optimum design, synthesis, sequential quadratic programming.

## Introducción

Erdman y Sandor [1], clasifican la síntesis de posición de mecanismos de eslabonamientos en tres tipos: la generación de trayectoria, la generación de función y la generación de movimiento. En la generación de trayectoria se trata de determinar la configuración apta de un mecanismo que permita que un punto del mismo pase por una serie de coordenadas predefinidas llamadas puntos de precisión. En el segundo tipo de síntesis (generación de función) se especifica adicionalmente un momento en el que debe darse la coincidencia de los puntos requeridos y obtenidos. Por último, en la generación de movimiento, se busca hacer que uno de los miembros del mecanismo alcance ciertas posiciones requeridas, tanto en términos de la posición del centroide del mismo, como de la orientación con respecto a una referencia. El mecanismo de cuatro barras es uno de los mecanismos de más amplio uso, dada su gran flexibilidad en la generación de trayectorias, funciones o movimientos. Sin embargo, las técnicas gráficas o analíticas desarrolladas para la síntesis de posición no permiten explotar todo el potencial de esta flexibilidad, dado que limitan el número de puntos de precisión, así como el número de posiciones del acoplador como generador de movimiento [2]. Por otro lado, estos métodos no permiten garantizar la movilidad del mecanismo (es decir, la ausencia de puntos de agarrotamiento), dado que solo permiten asegurar que el mecanismo alcance las posiciones indicadas como posiciones independientes y no como configuraciones dentro de un movimiento continuo. Debido a lo anterior, se han desarrollado múltiples trabajos con el fin de desarrollar métodos computacionales para la síntesis de este tipo de mecanismos. Muchas de estas técnicas enfocan el problema

de la síntesis de posición como un problema de optimización, en donde se requiere la minimización de una función de error. El primer trabajo de síntesis de un mecanismo de eslabonamientos, enfocado como un problema de optimización, fue planteado por Fox y Willmert [3], en este trabajo se plantea como función objetivo la diferencia entre las áreas definidas por una curva de trayectoria deseada y otra obtenida. Posteriormente, se encuentran los trabajos de Cossalter [4], Bakthavachalam y Kimbrell [5] Youssef [6], a los cuales es importante hacer referencia. Este último plantea tres tipos de función objetivo: la suma de los cuadrados de las distancias entre el punto requerido y el obtenido, la suma de los valores absolutos de estas distancias y la diferencia de las áreas definidas por las trayectorias respectivas. Kramer y Sandor [7], aportan nuevos elementos al definir una zona de tolerancia en la coincidencia de los puntos. En este trabajo se plantea que no es requerida una coincidencia total de los puntos, pues de todas formas existen limitantes de manufactura que impedirán el cumplimiento estricto de dicho requerimiento. Este concepto fue retomado por Krishnamurthi [8], quien emplea lógica difusa para la solución del problema de optimización adjunto.

La síntesis óptima de mecanismos de cuatro barras reviste varios problemas asociados con la naturaleza misma de la solución numérica. El primero de ellos es la relación entre punto de partida escogido para la primera iteración, con el tipo de mínimo alcanzado (local o global). Un segundo problema se relaciona con el costo computacional de los procesos de búsqueda de los puntos estacionarios y la posibilidad de convergencia de los algoritmos. Diversas publicaciones presentan métodos no basados en gradiente los cuales bus-

can garantizar la localización de un mínimo global. Estos métodos contemplan, en muchos de los casos, el uso de algoritmos genéticos, tal como en [9, 10, 11, 12]; o de redes neuronales, como en [13, 14]. Por otro lado, diversos trabajos se orientan a la reducción del costo computacional del proceso, empleando técnicas como la reducción del espacio de diseño [15, 16], o la desviación controlada [17], entre otras. Así mismo, otros trabajos incorporan los aspectos relacionados con el aseguramiento de la convergencia del proceso, tal como en [18], empleando incluso análisis con variables estocásticas, en los cuales se busca minimizar la desviación estándar de un error [19]. Comparativamente, se encuentran muy pocos trabajos destinados a estudiar la síntesis dinámica en los mecanismos de cuatro barras como un problema de optimización, entre estos se pueden mencionar los presentados en [20, 21, 22, 23]. A este respecto, resulta importante mencionar el trabajo de Fox y Willmert [3], además de otros trabajos, en los cuales se emplean consideraciones dinámicas de carga con el fin de restringir las configuraciones geométricas que inducen posiciones de agarrotamiento.

En el presente trabajo se plantea la implementación del diseño óptimo dimensional para la síntesis de posición y velocidad en mecanismos de cuatro barras, empleando una técnica de optimización no lineal, tal como la programación cuadrática secuencial (*SQP* – *Sequential Quadratic Programming*). El algoritmo desarrollado permite reunir simultáneamente requerimientos de posición y velocidad para la síntesis de mecanismos de cuatro barras, en la generación de trayectorias o funciones. El mismo contempla consideraciones para evitar las configuraciones que no cumplen con la desigualdad de Grashof, lo cual garantiza la funcionalidad de la solución obtenida. En la primera parte del documento se expone brevemente la cinemática del mecanismo de cuatro barras, siguiendo el método de los lazos vectoriales presentado en [2]. Posteriormente se plantea el problema de optimización, de acuerdo al tipo de síntesis a realizar y el número de variables de diseño (o grados de libertad) implicadas en el problema. Por último se analizan diversos

casos de estudio, evaluando la precisión en los resultados y la eficiencia en el proceso. En la parte final del artículo se exponen las conclusiones del trabajo desarrollado.

### Cinemática del mecanismo de cuatro barras

En un mecanismo de eslabonamientos como el de cuatro barras, el análisis cinemático puede realizarse por medio de un esquema de lazos vectoriales, tal como se muestra en la figura 1. De acuerdo a esta técnica, cualquier posición del mecanismo mantiene la ecuación vectorial (1).

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_4 \quad (1)$$

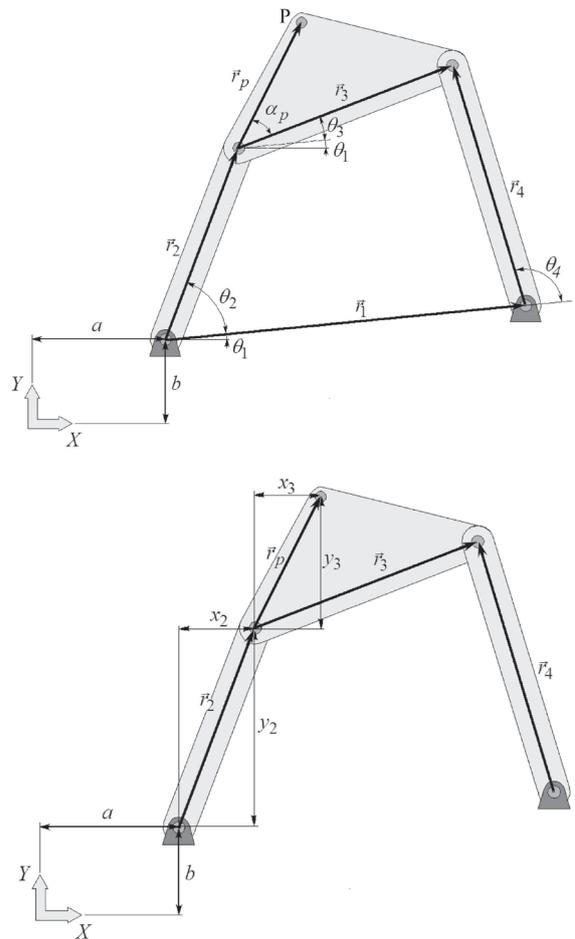


Figura 1 Esquema de lazos vectoriales para un mecanismo de cuatro barras

Esta expresión vectorial puede ser operada, de modo que se pueda conocer la posición angular ( $\theta$ ) de cada uno de los eslabones 3 y 4 (llamados normalmente acoplador y balancín), para una posición angular dada del eslabón 2 (normalmente llamado manivela). Las ecuaciones (2) y (3) definen la relación entre los ángulos  $\theta_3$  y  $\theta_4$  en términos de posición angular del eslabón 2 ( $\theta_2$ ), respectivamente [2].

$$\theta_3 = 2 \arctan\left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4DF}}{2D}\right) \quad (2)$$

$$\theta_4 = 2 \arctan\left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right) \quad (3)$$

Donde los parámetros  $A, B, C, D, F$  están definidos en las ecuaciones (4) a (8) [2]:

$$A = \cos\theta_2 - K_1 - K_2 \cos\theta_2 + K_3 \quad (4)$$

$$B = -2 \sin\theta_2 \quad (5)$$

$$C = K_1 - (K_2 + 1) \cos\theta_2 + K_3 \quad (6)$$

$$D = \cos\theta_2 - K_1 + K_4 \cos\theta_2 + K_5 \quad (7)$$

$$F = K_1 + (K_4 - 1) \cos\theta_2 + K_5 \quad (8)$$

Mientras que los parámetros adimensionales  $K$  se presentan en las expresiones (9) a (13) [2]:

$$K_1 = \frac{r_1}{r_2} \quad (9) \quad K_2 = \frac{r_1}{r_4} \quad (10)$$

$$K_3 = \frac{r_2^2 - r_3^2 + r_4^2 + r_1^2}{2r_2r_4} \quad (11)$$

$$K_4 = \frac{r_1}{r_3} \quad (12) \quad K_5 = \frac{r_4^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2}{2r_2r_3} \quad (13)$$

En estas últimas expresiones  $r_1, r_2, r_3$  y  $r_4$  son las longitudes de los eslabones del mecanismo, de

acuerdo con la convención mostrada en la figura 1. El signo  $\pm$  observado en las expresiones (2) y (3) indica la posibilidad de obtener una configuración abierta o cerrada en el mecanismo.

De esta forma, la posición de un punto  $P$  ubicado sobre el acoplador puede expresarse a partir de las coordenadas  $X_p$  y  $Y_p$ , descritas en las ecuaciones (14) y (15) y acotadas en la figura 1.

$$X_p = x_2 + x_3 + a \quad (14)$$

$$Y_p = y_2 + y_3 + b \quad (15)$$

Las dimensiones  $x_2, y_2, x_3, y_3$  pueden ser calculadas por medio de las expresiones (16) a (19), respectivamente [11].

$$x_2 = r_2 [\cos\theta_2 \cos\theta_1 - \text{sen}\theta_2 \text{sen}\theta_1] \quad (16)$$

$$y_2 = r_2 [\text{sen}\theta_2 \cos\theta_1 + \cos\theta_2 \text{sen}\theta_1] \quad (17)$$

$$x_3 = r_p [\cos\alpha_p \cos\theta_1 - \text{sen}\alpha_p \text{sen}\theta_1] \cos\theta_3 - (\text{sen}\alpha_p \cos\theta_1 + \cos\alpha_p \text{sen}\theta_1) \text{sen}\theta_3 \quad (18)$$

$$y_3 = r_p [\cos\alpha_p \cos\theta_1 - \text{sen}\alpha_p \text{sen}\theta_1] \text{sen}\theta_3 + (\text{sen}\alpha_p \cos\theta_1 + \cos\alpha_p \text{sen}\theta_1) \cos\theta_3 \quad (19)$$

donde  $r_p$  representa la distancia desde el punto  $P$  hasta la junta manivela-acoplador,  $\alpha_p$  denota la orientación relativa del vector  $\vec{r}_p$ , tal como se muestra en la figura 1; en tanto que  $a$  y  $b$  son las coordenadas del punto de giro de la manivela.

En cuanto a las expresiones de velocidad, un término para la velocidad angular del acoplador se puede obtener derivando la expresión vectorial (1), con lo que se llega a la expresión (20) [2].

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{r_2 [\text{sen}\theta_2 \cos\theta_4 - \cos\theta_2 \text{sen}\theta_4]}{r_3 [\text{sen}\theta_4 \cos\theta_3 - \cos\theta_4 \text{sen}\theta_3]} \quad (20)$$

De esta forma, el punto  $P$  ubicado sobre el acoplador tendrá una velocidad lineal definida, en sus componentes rectangulares, por la ecuación (21).

$$\vec{V}_P = -(\omega_2 y_2 + \omega_3 y_3)\hat{i} + (\omega_2 x_2 + \omega_3 x_3)\hat{j} \quad (21)$$

**Planteamiento de la síntesis de posición y velocidad como un problema de optimización dimensional**

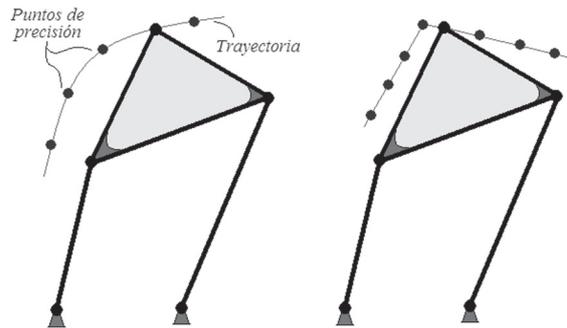
Un problema de optimización dimensional puede ser definido como la cuantificación un grupo de variables de diseño que permite alcanzar un desempeño crítico en un sistema. Dicho desempeño se expresa por medio de una función objetivo y cumple con ciertas restricciones o requerimientos de diseño. Dado que la definición del problema de optimización depende del tipo de síntesis requerida y del número de variables de diseño involucradas (grados de libertad del problema), se presentan a continuación diversos planteamientos para la función objetivo y las restricciones empleadas.

**Síntesis de posición para la generación de trayectoria**

Considerando un mecanismo de cuatro barras como un sistema generador de trayectoria (ver figura 2), el problema de síntesis de posición se limita a determinar las dimensiones adecuadas de las barras, que hacen que un punto  $P$  conocido se ubique en algún momento, durante un ciclo de la manivela, sobre cada uno de los puntos de precisión definidos. Bajo este enfoque, el problema de optimización contiene solamente cuatro variables de diseño ( $r_1, r_2, r_3$  y  $r_4$ ). No obstante, este tipo de planteamiento, restringido en grados de libertad, no permite la síntesis de mecanismos con trayectorias complejas, como por ejemplo el caso de los dos segmentos rectos de la figura 2. Así mismo, este limitado planteamiento no ofrece la posibilidad de imponer un orden en el seguimiento de los puntos de precisión durante el ciclo de la manivela (generación de función).

Con el fin de solucionar la primera de las limitantes mencionadas anteriormente, se pueden adicionar cinco variables de diseño o grados de libertad

a la síntesis. Dos de estas variables se relacionan con la posibilidad de dar un corrimiento (offset) del centro de giro de la manivela con respecto al origen del sistema coordenado global  $X-Y$  (ver parámetros  $a$  y  $b$  en la figura 1). Una tercera variable incorpora la posibilidad de introducir una inclinación al vector posición  $\vec{r}_1$  (ver parámetro  $\theta_1$  en la figura 1), en tanto que las últimas dos permiten parametrizar la posición del punto  $P$  respecto a la junta articulada de la manivela y el acoplador (ver variables  $r_p, \alpha_p$  en la figura 1). La incorporación de estos grados de libertad adicionales a la síntesis, agregará nuevas configuraciones del mecanismo al dominio de diseño, las cuales permiten alcanzar trayectorias complejas y diversas.



**Figura 2** Generación de trayectoria con múltiples puntos de precisión empleando un mecanismo de cuatro barras

Así, la síntesis de trayectoria puede ser expresada como un problema de optimización tal como se muestra en (22).

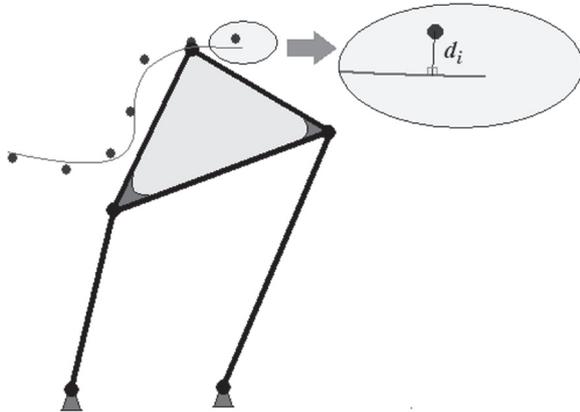
$$\min f(r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \alpha_p, \theta_1, a, b) \quad (22)$$

donde  $f$  describe cualquier función objetivo que defina una métrica de la cercanía de las coordenadas de los puntos requeridos con respecto a la trayectoria descrita por el punto  $P$  durante un ciclo de la manivela. Esta función normalmente tiene la forma de una función de error [6]. En primera instancia, se puede definir una función de error mediante la sumatoria de los cuadrados de las distancias mínimas entre cada uno de los puntos de precisión y la trayectoria generada por el punto  $P$ , tal como se plantea en la ecuación (23).

$$f(r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \alpha_p, \theta_1, a, b) = \sum_{i=1}^n d_i^2 \quad (23)$$

donde  $d_i$  es la mínima distancia entre el  $i$ -ésimo punto de precisión y la trayectoria generada por el mecanismo dimensionado (figura 3); en tanto que  $n$  es el número de puntos de precisión empleados para la síntesis.

Dado que este planteamiento puede llevar a mecanismos con posiciones intermedias de agarrotamiento, es decir, configuraciones en las que es imposible ir desde un punto de precisión al siguiente, se hace necesario introducir en el problema nuevas restricciones que limiten correctamente el espacio de solución. La primera restricción introducida, se trata de la ley de *Grashof*, la cual permite asegurar la rotación completa de por lo menos uno de los elementos del mecanismo. Esta condición se expresa por medio de la inecuación (24).



**Figura 3** Definición de la distancia mínima entre el punto de precisión requerido y la trayectoria trazada

$$l_1 + l_4 - l_2 - l_3 \leq 0 \quad (24)$$

donde  $l_1$  es la mayor de las longitudes de los eslabones,  $l_4$  es la menor de las longitudes de los eslabones, en tanto que  $l_2$  y  $l_3$  son las longitudes de los dos eslabones restantes.

De igual forma se necesita limitar el dominio de diseño de manera que se eliminen las longitudes

de eslabones negativas, así como las longitudes que excedan un valor máximo definido por el diseñador. Reuniendo lo anterior, además de otras consideraciones geométricas, el problema de optimización ahora se puede escribir tal como en la expresión (25).

$$\begin{aligned} & \min_{r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \alpha_p, \theta_1, a, b} \\ & f(r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \alpha_p, \theta_1, a, b) = \sum_{i=1}^n d_i^2 \\ \text{s.a.} \quad & 2 \max(r_1, r_2, r_3, r_4) + 2 \min(r_1, r_2, r_3, r_4) - \sum_{i=1}^4 r_i \leq 0 \quad (25) \\ & 0 < r_i \leq r_{\max} \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ & 0 \leq r_p \leq r_{p \max} \\ & a_{\min} \leq a \leq a_{\max} \\ & b_{\min} \leq b \leq b_{\max} \\ & 0 \leq \alpha_p \leq \pi \text{ rad} \end{aligned}$$

Donde  $r_{\max}$ ,  $r_{p \max}$ ,  $a_{\min}$ ,  $a_{\max}$ ,  $b_{\min}$  y  $b_{\max}$ , definen los valores límites superior e inferior de las variables de diseño correspondientes.

### Síntesis de posición para la generación de función

En este segundo tipo de síntesis de posición, tal y como se mencionó anteriormente, adicionalmente se desea definir el momento durante el ciclo de funcionamiento del mecanismo (normalmente definido por medio de la posición  $\theta_2$ ) en el que se debe dar la coincidencia entre un punto de precisión definido y la posición alcanzada por el punto  $P$ . Considerando lo anterior, ahora se pueden plantear como requerimientos iniciales del diseño: las coordenadas  $X - Y$  del punto de precisión y el ángulo  $\theta_2$  en el que debe pasar la trayectoria sobre este. Lo anterior implica un pequeño cambio en la función objetivo, la cual ahora puede escribirse como la sumatoria del cuadrado de la distancia entre dos puntos claramente definidos: el punto de precisión requerido y el punto  $P$  en el instante  $\theta_2$  declarado. Así, el problema de optimización se puede escribir ahora por medio de la ecuación (26).

$$\begin{aligned}
 & \min_{r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \alpha_p, \theta_1, a, b} \\
 f(r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \alpha_p, \theta_1, a, b) &= \sum_{i=1}^n (X_{Pi} - X_i)^2 + (Y_{Pi} - Y_i)^2 \\
 \text{s.a. } & 2 \max(r_1, r_2, r_3, r_4) + 2 \min(r_1, r_2, r_3, r_4) - \sum_{i=1}^4 r_i \leq 0 \\
 & 0 < r_i \leq r_{\max} \quad i = 1, 2, 3, 4 \\
 & 0 \leq r_p \leq r_{p \max} \\
 & a_{\min} \leq a \leq a_{\max} \\
 & b_{\min} \leq b \leq b_{\max} \\
 & 0 \leq \alpha_p \leq \pi \text{ rad}
 \end{aligned} \quad (26)$$

Donde  $X_i$  y  $Y_i$  son las coordenadas del  $i$ -ésimo punto de precisión, mientras que  $X_{Pi}$  y  $Y_{Pi}$  son las coordenadas del punto  $P$  en el instante requerido  $\theta_2$ .

### Síntesis de velocidad

El problema de síntesis de velocidad en un mecanismo de cuatro barras es enfocado aquí, como la determinación de un conjunto de parámetros geométricos y cinemáticos del mecanismo que permiten que un punto definido del acoplador  $P$  cumpla con una magnitud de velocidad requerida en un momento dado, éste último definido mediante la posición del segundo eslabón ( $\theta_2$ ), dentro de un ciclo completo de la manivela. Aunque geoméricamente se conservan algunas de las mismas variables de diseño empleadas en el caso de la síntesis de posición, se hace necesario ahora definir una variable adicional, la velocidad angular de la manivela ( $\omega_2$ ). Es de notar que aunque se puede asumir esta velocidad variable dentro de un ciclo de movimiento del segundo eslabón, resulta una condición más simple desde el punto de vista del control de movimiento del sistema, considerar el valor de esta velocidad constante.

Siguiendo estas nuevas consideraciones, la ecuación (27) define el problema de síntesis de velocidad en un mecanismo de cuatro barras como un problema de optimización.

$$\begin{aligned}
 & \min_{r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \alpha_p, \theta_1, \omega_2} \\
 f(r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \alpha_p, \theta_1, \omega_2) &= \sum_{i=1}^n (V_{Pxi} - V_{xi})^2 + (V_{Pyi} - V_{yi})^2 \\
 \text{s.a. } & 2 \max(r_1, r_2, r_3, r_4) + 2 \min(r_1, r_2, r_3, r_4) - \sum_{i=1}^4 r_i \leq 0 \\
 & 0 < r_i \leq r_{\max} \quad i = 1, 2, 3, 4 \\
 & 0 \leq r_p \leq r_{p \max} \\
 & 0 \leq \alpha_p \leq \pi \text{ rad} \\
 & \omega_{\min} \leq \omega_2 \leq \omega_{\max}
 \end{aligned} \quad (27)$$

Donde  $V_{Pxi}$  y  $V_{Pyi}$  son las componentes rectangulares de la velocidad del punto  $P$  en el instante  $\theta_2$ ,  $V_{xi}$  y  $V_{yi}$  son las componentes de velocidad buscadas en ese mismo instante, en tanto que  $\omega_{\min}$  y  $\omega_{\max}$  son los valores límites que puede adoptar la velocidad angular  $\omega_2$ . Obsérvese como se han excluido las variables de diseño  $a$  y  $b$ , dado que no influyen en el comportamiento de la magnitud de la velocidad del punto  $P$ . Resulta claro que esta función de error no solo busca la coincidencia de la magnitud de la velocidad, sino de cada una de las componentes por separado, es decir, también incorpora la dirección de la velocidad al problema de síntesis, lo cual se puede entender en últimas como una forma de restringir la trayectoria a través de sus direcciones tangentes en puntos específicos. Una forma más simple de función objetivo podría ser la enunciada en la ecuación (28).

$$\begin{aligned}
 & \min_{r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \alpha_p, \theta_1, \omega_2} \\
 f(r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \alpha_p, \theta_1, \omega_2) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{V_{Pxi}^2 + V_{Pyi}^2} - \sqrt{V_{xi}^2 + V_{yi}^2}
 \end{aligned} \quad (28)$$

### Síntesis mixta de posición y velocidad

Este problema de síntesis es poco estudiado dentro de los trabajos desarrollados alrededor de este tema. En este artículo se atacará este tópico como un problema de optimización multiobjetivo con ponderación complementaria sobre cada una de las funciones y el cual reunirá elementos de los dos problemas de síntesis previos. En este caso la síntesis se definirá como la búsqueda de un

conjunto de variables geométricas y cinemáticas del mecanismo que permitan que un punto  $P$ , ubicado en el acoplador, alcance la posición definida por  $n$  puntos de precisión, y que además en dichos instantes (definidos mediante la posición  $\theta_2$ ) este punto cumpla con ciertos requerimientos de velocidad. De esta forma, el problema de minimización en este caso se define mediante la expresión (29).

Donde  $\xi$  es el factor de ponderación que discrimina la importancia del ajuste de la velocidad con respecto al de la posición. Obsérvese como la diferencia entre las normas de las velocidades y de las distancias han sido normalizadas para evitar que el orden de magnitud de las variables ejerza influencia sobre el peso de alguno de los dos problemas incluidos dentro de la función objetivo.

$$\min_{r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \alpha_p, \theta_1, a, b, \omega_2} f(r_1, r_2, r_3, r_4, r_p, \alpha_p, \theta_1, a, b, \omega_2) = \sum_{i=1}^n \xi \left( \frac{\sqrt{V_{Pxi}^2 + V_{Pyi}^2} - \sqrt{V_{xi}^2 + V_{yi}^2}}{\sqrt{V_{xi}^2 + V_{yi}^2}} \right) + (1-\xi) \sqrt{\left( \frac{X_{Pi} - X_i}{X_i} \right)^2 + \left( \frac{Y_{Pi} - Y_i}{Y_i} \right)^2}$$

$$s.a \quad 2 \max(r_1, r_2, r_3, r_4) + 2 \min(r_1, r_2, r_3, r_4) - \sum_{i=1}^4 r_i \leq 0$$

$$0 \leq r_i \leq r_{\max} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$0 \leq r_p \leq r_{p \max}$$

$$a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$$

$$b_{\min} \leq b \leq b_{\max}$$

$$0 \leq \alpha_p \leq \pi \text{ rad}$$

$$\omega_{\min} \leq \omega_2 \leq \omega_{\max}$$
(29)

### Procedimiento numérico y resultados alcanzados

Como resulta claro del planteamiento de los tres problemas de síntesis enunciados anteriormente, el desarrollo de los mismos requiere procedimientos de optimización no lineal, para lo cual se seleccionó el método de la programación cuadrática secuencial (*SQP-Sequential Quadratic Programming*), dada su estabilidad y eficiencia en este tipo de problemas. El método de la *SQP* desarrolla los problemas no-lineales convirtiéndolos en sucesivos y simples problemas de optimización, en donde en cada uno de estos se hace una aproximación cuadrática de la función objetivo y una linealización de las restricciones implicadas. El lenguaje de programación empleado para el desarrollo del código fue Matlab, dada la facilidad para implementar los algoritmos requeridos, empleando los recursos ofrecidos por las herramientas de optimización con las que cuenta dicho paquete (*Optimization Toolbox 3.0*). A continuación se presentan cuatro casos de estudio desarrollados para la síntesis en mecanismos de cuatro barras.

### Caso 1: síntesis de posición con generación de trayectoria lineal

En este caso se plantea la determinación de los parámetros dimensionales de un mecanismo de cuatro barras, en el cual un punto buscado del acoplador debe pasar por los puntos de precisión definidos mediante las coordenadas presentadas en la tabla 1. Como se puede observar, estas coordenadas definen un segmento de recta vertical, lo que representa una trayectoria de mediana complejidad para ser alcanzada por este tipo de mecanismo.

**Tabla 1** Coordenadas de los puntos de precisión definidos para el caso de estudio 1

<b>X</b>	20	20	20	20	20	20
<b>Y</b>	20	25	30	35	40	45

El acotamiento completo del problema implica la definición de los valores superior e inferior para cada una de las variables de diseño. Los valores definidos para estas restricciones se muestran en la tabla 2.

**Tabla 2** Valores límites superior e inferior definidos para las variables de diseño

<b>Variable</b>	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_p$	$a$	$b$	$\theta_1 [^\circ]$	$\alpha_p [^\circ]$
<b>Valor inferior</b>	1	1	1	1	-60	-60	-60	0	0
<b>Valor superior</b>	60	60	60	60	60	60	60	180	180

El algoritmo empleado utiliza cuatro criterios de convergencia los cuales se definen a continuación:

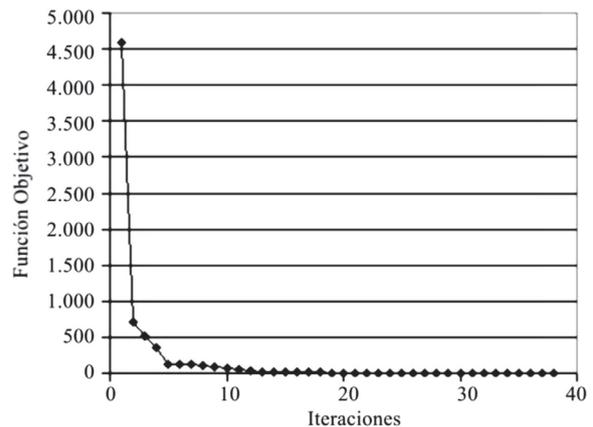
- *MaxFunEvals*: Define el máximo número de veces que el algoritmo puede evaluar la función objetivo. Un llamado adicional a la función objetivo implica la finalización de la búsqueda sin alcanzar una solución.
- *MaxIter*: Define el máximo número de iteraciones que puede realizar el algoritmo. Una iteración adicional implica la finalización de la búsqueda sin alcanzar una solución.
- *TolFun*: Esta cantidad define la tolerancia de convergencia asociada con la variación en el valor de la función objetivo. Una variación por debajo de esta cantidad lleva a una finalización exitosa de la búsqueda.
- *TolX*: Esta cantidad define la tolerancia de convergencia asociada con la variación en el valor de las variables de diseño. Una variación por debajo de esta cantidad lleva a una finalización exitosa de la búsqueda.

Los valores definidos para cada uno de estos criterios de parada del algoritmo de búsqueda, se definen para el caso de estudio 1 en la tabla 3.

**Tabla 3** Valores definidos para los criterios de convergencia en el caso de estudio 1

<b>Criterio</b>	<b>MaxFunEvals</b>	<b>MaxIter</b>	<b>TolFun</b>	<b>TolX</b>
<b>Valor</b>	1.500	700	0,001	0,001

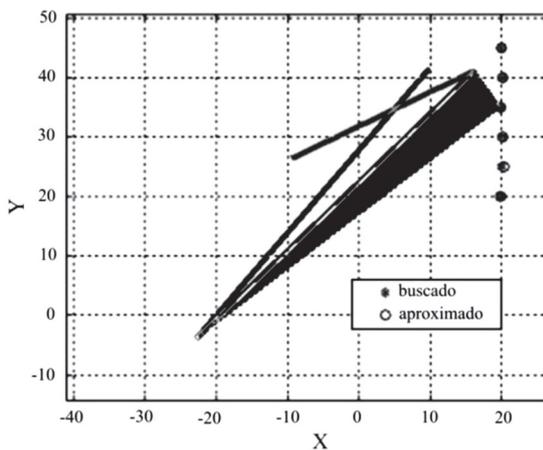
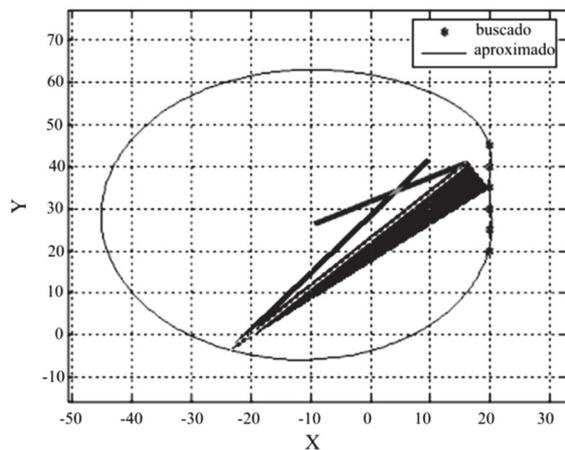
El empleo del método de la programación cuadrática secuencial permitió alcanzar la solución de este problema de síntesis empleando 38 iteraciones y 724 llamados a la función objetivo. Los valores finales para cada una de las variables de diseño se muestran en la tabla 4, en tanto que el gráfico del comportamiento de la función objetivo se muestra en la figura 4. En la figura 5 se muestra un gráfico con la posición de los puntos de precisión requeridos y las posiciones alcanzadas por el mecanismo encontrado. En la figura 6 se observa el error de posición (distancia entre puntos) generado para cada uno de los seis puntos de precisión requeridos en este caso.



**Figura 4** Comportamiento de la función objetivo durante la solución del caso de estudio 1

**Tabla 4** Valores finales de las variables de diseño para el caso de estudio 1

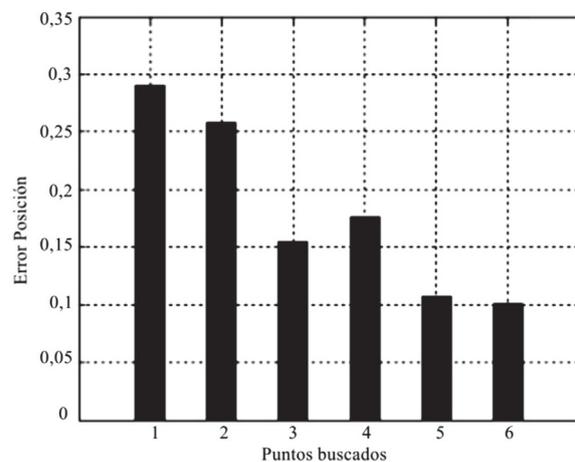
Variable	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_p$	$a$	$b$	$\theta_1 [^\circ]$	$\alpha_p [^\circ]$
Valor final	24,5	29,6	59,7	56,0	7,2	-9,4	26,4	38,3	70,9



**Figura 5** Resultados alcanzados para el caso de estudio 1: ubicación de los puntos de precisión y los puntos alcanzados

En este caso se expone un problema de síntesis de posición de mayor complejidad. Se trata de la síntesis de una trayectoria conformada por dos segmentos de recta no alineados. Las coordenadas de los puntos de precisión definidos para este caso se muestran en la tabla 5. La solución de este problema, mostrada en la tabla 6, requirió el aumento del parámetro  $MaxFunEvlas$  a 5.000

evaluaciones, en tanto que la misma se alcanzó después de 138 iteraciones y 3.242 llamados a la función objetivo. En la figura 7 se observa el comportamiento de la función objetivo durante el proceso de búsqueda, en la figura 8 se muestra la ubicación de los puntos de precisión requeridos y de los puntos alcanzados por el mecanismo encontrado, mientras que en la figura 9 se observa el error de posición discreto (distancia entre puntos) para los ocho puntos de precisión definidos.



**Figura 6** Valor discreto del error absoluto de posición encontrado para cada uno de los puntos de precisión en el caso de estudio 1

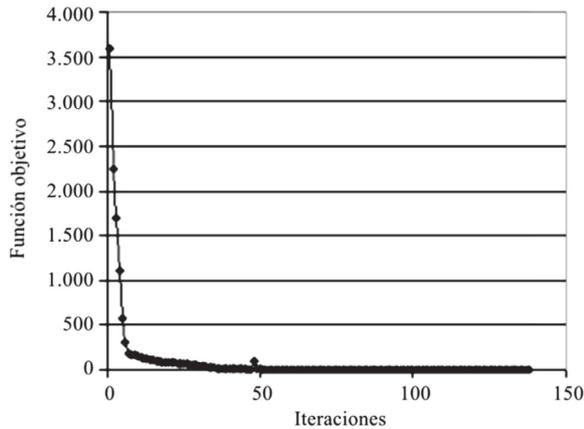
**Caso 2: síntesis de posición con generación de trayectoria para dos segmentos de recta**

**Tabla 5** Coordenadas de los puntos de precisión definidos para el caso de estudio 2

$X$	5	7,5	10	12,5	15	20	25	30
$Y$	5	7,5	10	12,5	15	13,5	12	10

**Tabla 6** Valores finales de las variables de diseño para el caso de estudio 2

<i>Variable</i>	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_p$	$a$	$b$	$\theta_1 [^\circ]$	$\alpha_p [^\circ]$
<b>Valor final</b>	46,7	48,2	58,2	56,7	38,9	-11,7	37,8	13,2	45,7



**Figura 7** Comportamiento de la función objetivo durante la solución del caso de estudio 2

**Caso 3: síntesis de velocidad, con síntesis implícita de trayectoria**

En este caso se plantea la síntesis de un mecanismo de cuatro barras, a partir de la definición de las componentes rectangulares de velocidad que debe alcanzar un punto del acoplador durante algún instante, dentro de un ciclo de movimiento de la manivela. En la Tabla 7 se presentan las componentes de velocidad requeridas para los seis puntos de precisión. Es de observar que la selec-

ción de la expresión (22) como función objetivo, implica el dimensionamiento del mecanismo con el fin de alcanzar cada una de las componentes de velocidad deseadas, y no simplemente una magnitud de velocidad resultante.

**Tabla 7** Valores de las componentes de velocidad definidas para el caso de estudio 3

$V_{xp}$	15,0	14,5	13,0	10,6	7,5	3,9
$V_{yp}$	5,0	6,5	8,4	11,0	14,2	18,5

Este tipo de síntesis de velocidad contiene de forma implícita un problema de síntesis de trayectoria, en el que se define de manera previa las pendientes que debe tomar la trayectoria, en algún punto del ciclo de movimiento del mecanismo. Dado que este problema involucra una variable de diseño más que en los dos casos anteriores ( $\omega_2$ ), se hace necesario plantear dos nuevas restricciones asociadas a esta variable, un valor máximo igual a  $60 \text{ rad/s}$  y un mínimo igual a  $-60 \text{ rad/s}$ . Las demás restricciones se mantienen en sus valores establecidos para los casos de estudio previo. En la Tabla 8 se definen los valores empleados como criterios de convergencia para este caso de estudio.

**Tabla 8** Valores definidos para los criterios de convergencia en el caso de estudio 3

<i>Criterio</i>	<i>MaxFunEvals</i>	<i>MaxIter</i>	<i>TolFun</i>	<i>TolX</i>
<b>Valor</b>	30.000	15.000	1E-06	1E-06

La convergencia de la solución a este problema es alcanzada después de 82 iteraciones y 1.397 llamadas a la función objetivo. La tabla 9 muestra los valores finales de las variables de diseño, mientras que en la figura 10 se muestra el com-

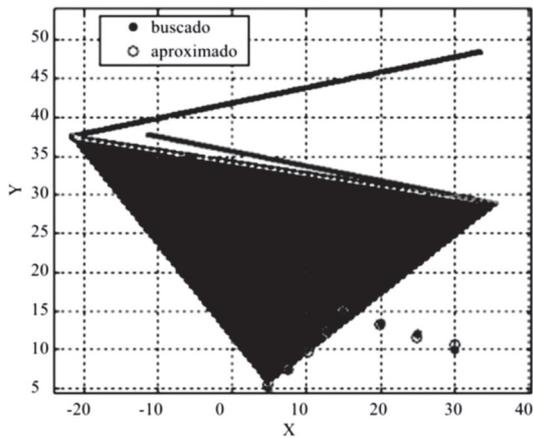
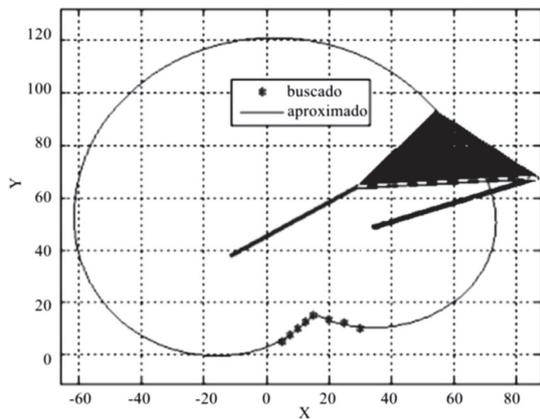
portamiento de la función objetivo a lo largo de todo el proceso de búsqueda. En la figura 11 se muestran los valores alcanzados para las componentes rectangulares de velocidad sobre cada uno de los puntos de precisión, en tanto que la

figura 12 muestra el error absoluto de velocidad (cuadrado de la función objetivo), calculado para cada uno de los seis puntos de precisión

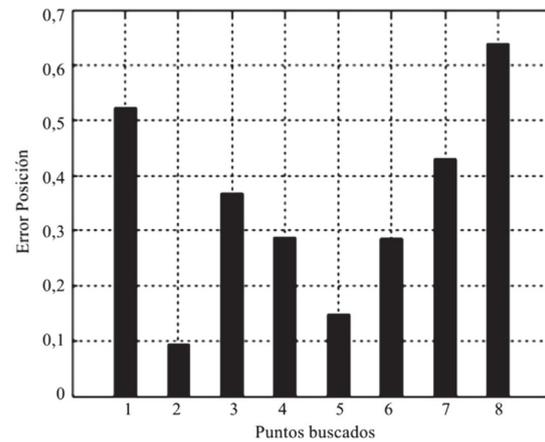
empleados. Por ultimo, en la figura 13 se muestra la trayectoria seguida por el punto del acoplador encontrado.

**Tabla 9** Valores finales de las variables de diseño para el caso de estudio 3, con  $\omega_2$  expresada en *rad* por unidad de tiempo

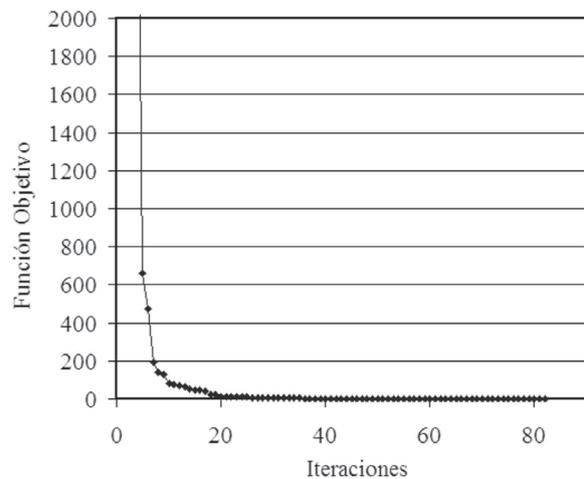
Variable	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_p$	$\theta_1$ [°]	$\alpha_p$ [°]	$\omega_2$
<b>Valor final</b>	15,0	18,6	19,6	16,1	29,6	14,5	105,3	-0,6



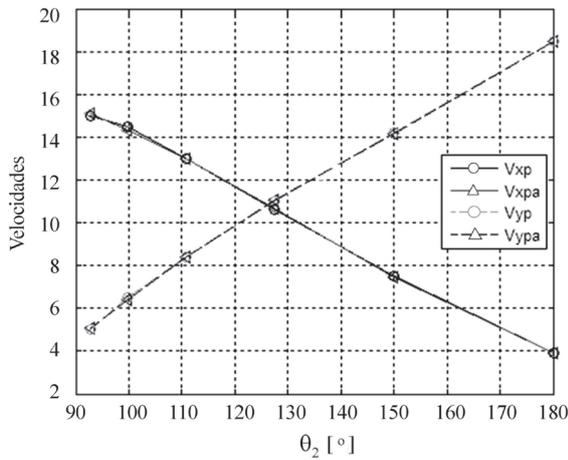
**Figura 8** Resultados alcanzados para el caso de estudio 2: ubicación de los puntos de precisión y los puntos alcanzados



**Figura 9** Valor discreto del error absoluto de posición encontrado para cada uno de los puntos de precisión en el caso de estudio 2



**Figura 10** Comportamiento de la función objetivo durante la solución del caso de estudio 3



**Figura 11** Resultados alcanzados para el caso de estudio 3: valores definidos y alcanzados para las componentes de velocidad ( $V_{xp} - V_{yp}$  son las componentes de velocidad requerida, en tanto que  $V_{xpa} - V_{ypa}$  son las componentes de velocidad alcanzadas)

**Caso 4: síntesis de velocidad, con síntesis explícita de trayectoria**

En este caso se definen de manera explícita y simultánea dos condiciones diferentes para la sín-

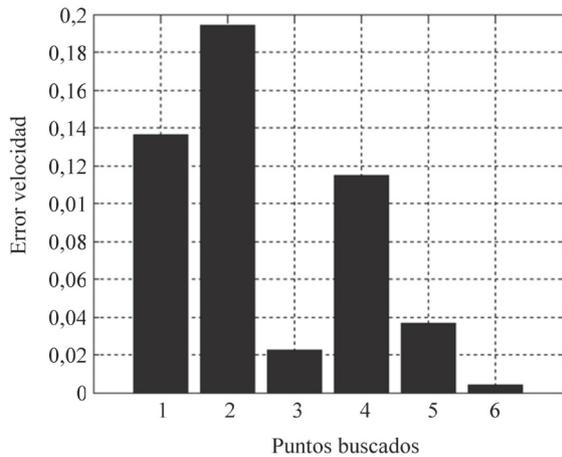
tesis del mecanismo, ambas con igual peso sobre la función objetivo total ( $\xi = 0,5$ ). La primera se refiere a una condición de velocidad en diferentes puntos, mientras que la segunda se relaciona con las coordenadas para los puntos de precisión asociados con dichas velocidades. Este caso se denominará síntesis de velocidad con síntesis explícita de posición. Los requerimientos de diseño para este problema se encuentran relacionados en la tabla 10. En este caso, la convergencia del proceso, alcanzada después de 262 iteraciones y 5.040 llamados a la función objetivo, permite encontrar los valores para las variables de diseño consignados en la tabla 11. El valor de la función objetivo para cada una de las iteraciones del proceso se grafica en la figura 14. Es de notar que para este caso los parámetros de convergencia se mantuvieron iguales a los empleados en el caso de estudio anterior. La ubicación de las coordenadas de los puntos alcanzados, así como las magnitudes de las componentes de velocidad en dichos puntos, se muestran en la figura 15. De la misma forma los valores para el error absoluto, tanto de posición como de velocidad, sobre cada uno de los puntos de precisión son mostrados en la figura 16.

**Tabla 10** Coordenadas de los puntos de precisión y valores de las componentes de velocidad definidas para el caso de estudio 4

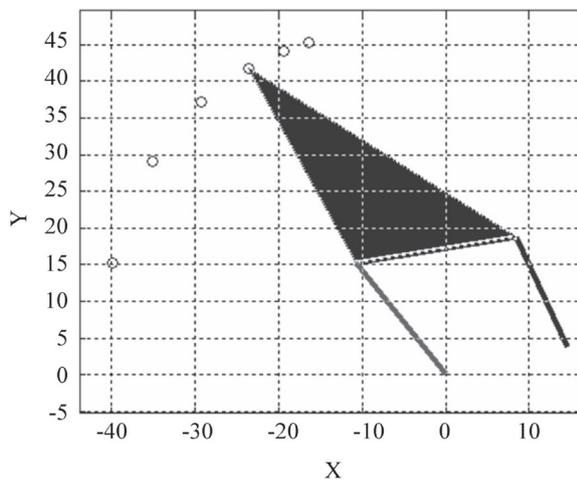
<b>X</b>	52,21	45,16	26,01	-0,14	-26,25
<b>Y</b>	-0,96	-26,29	-45,36	-52,30	-45,25
<b>V<sub>xp</sub></b>	-0,36	-12,84	-22,25	-25,70	-22,24
<b>V<sub>yp</sub></b>	-25,67	-22,25	-12,85	0,01	12,86

**Tabla 11** Valores finales de las variables de diseño para el caso de estudio 4, con  $\omega_2$  expresada en *rad* por unidad de tiempo

<b>Variable</b>	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_p$	<b>a</b>	<b>b</b>	$\theta_1$ [°]	$\alpha_p$ [°]	$\omega_2$
<b>Valor final</b>	39,3	55,7	43,5	59,6	3,4	-0,5	0,4	180	0,9	-0,5



**Figura 12** Valor discreto del error absoluto de velocidad encontrado para cada uno de los puntos de precisión en el caso de estudio 3

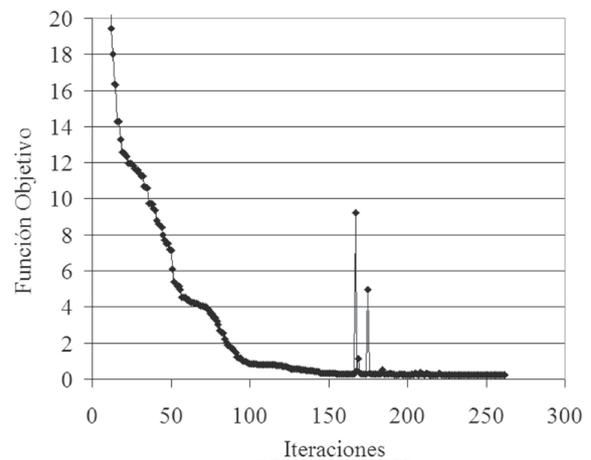
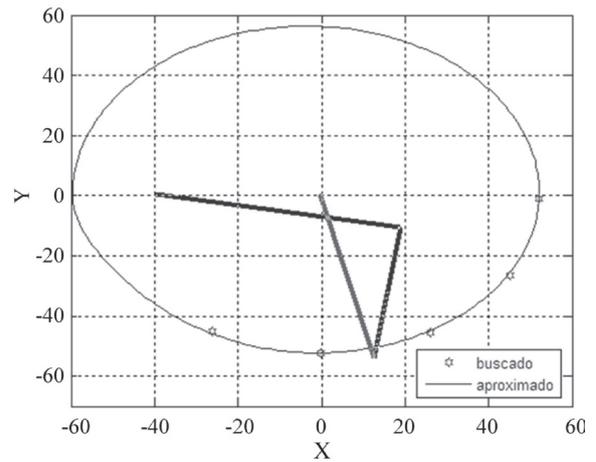


**Figura 13** Trayectoria descrita por el punto del acoplador encontrado para el caso de estudio 3

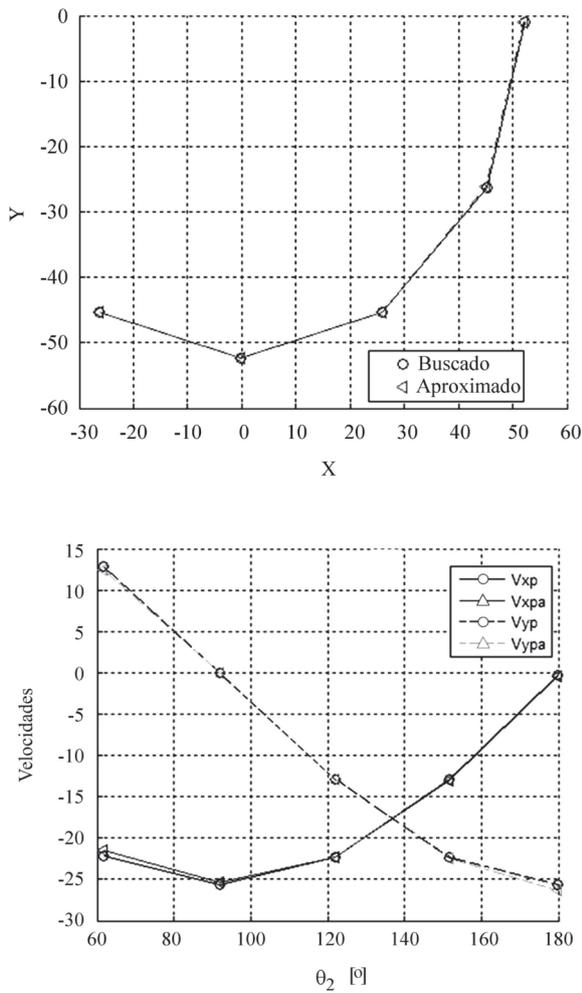
### Conclusiones

Se desarrolló un algoritmo para la solución del problema de síntesis de posición y velocidad para mecanismos de cuatro barras empleando una técnica de optimización no-lineal como la programación cuadrática secuencial (*SQP*). El empleo del *SQP* permitió la síntesis de posición para la generación de trayectorias complejas, como por

ejemplo las definidas por medio de uno y dos segmentos de recta con múltiples puntos de precisión. Así mismo, el planteamiento construido permite el desarrollo de problemas de síntesis de velocidad, los cuales incluyen implícita o explícitamente un problema de síntesis de trayectoria. Para todos los casos presentados, la convergencia del algoritmo se dio antes de 300 iteraciones, lo cual estima tiempos computacionales reducidos, inferiores a los 15 s empleando un procesador de 1.5GHz de velocidad. Adicionalmente, se observa como los problemas que implican algún tipo de síntesis de velocidad, exigen un mayor número de iteraciones para alcanzar la convergencia.



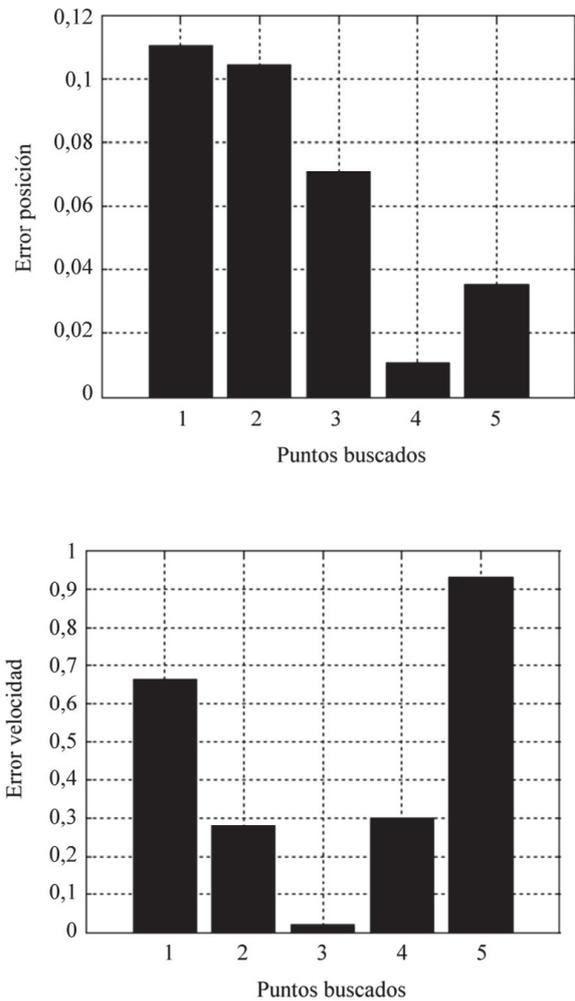
**Figura 14** Comportamiento de la función objetivo durante la solución del caso de estudio 4



**Figura 15** Resultados alcanzados para el caso de estudio 4: valores definidos y alcanzados para la síntesis de posición y velocidad ( $V_{xp} - V_{yp}$  son las componentes de velocidad requerida, en tanto que  $V_{xpa} - V_{ypa}$  son las componentes de velocidad alcanzadas)

En general, tal como resulta natural de cualquier método de optimización basado en gradiente, la solución al problema de síntesis empleando *SQP* resulta altamente sensible a la posición del punto inicial o valor semilla, encontrándose diferentes puntos estacionarios o mínimos locales para diferentes puntos de arrancada. Sin embargo, la solución implementada logra superar esta limitante calculando diferentes soluciones de forma conse-

cutiva, empleando diferentes puntos de arrancada, los cuales son seleccionados aleatoriamente dentro del dominio de diseño definido; de modo que la solución final es seleccionada empleando el criterio del menor valor en la función objetivo. Al respecto, resulta importante aclarar que tanto el número de iteraciones requerido para la convergencia, como los tiempos reportados anteriormente, obedecen únicamente a la solución final seleccionada y no al conjunto de soluciones requeridas para buscar el mínimo global.



**Figura 16** Valor discreto de la función objetivo y los errores absolutos de posición y velocidad encontrados para cada uno de los puntos de precisión en el caso de estudio 4

## Referencias

1. A. Erdman, G. Sandor. *Mechanism Design: analysis and synthesis*. Vol. 1. Ed. Prentice Hall. New York. 3<sup>ra</sup> ed. 1984. pp. 494-584.
2. L. N. Norton. *Diseño de maquinaria una introducción a la síntesis y al análisis de mecanismos y maquinas*. McGraw Hill. México. pp. 205-252.
3. R. Fox, K. Willmert. "Optimum design for curve-generating linkages with inequality constraints". *J. Eng. for Industry*. Vol. 89. 1967. pp.144-152.
4. V. Cossalter, M. D. Lio, A. Doria. "Optimum synthesis of spatial function generator mechanisms". *Meccanica: an international journal of theoretical and applied mechanics*. Vol. 28. 1993. pp. 263-268.
5. N. Bakthavachalam, J. Kimbrell. "Optimum synthesis of path-generating four-bar mechanisms". *Journal of engineering for industry*. Vol. 97. 1975. pp. 314-321.
6. A. Youssef. "Optimal kinematic synthesis for planar linkage mechanism". *Proceedings of the I MECH E*, 1975. pp. 393-398.
7. S. Kramer, G. Sandor. "Selective precision synthesis – a general method of optimization for planar mechanism". *Trans ASME J. Eng. for Industry*. Vol. 97B. 1975. pp. 689-701.
8. S. Krishnamurthi. "Fuzzy synthesis of mechanisms". *Proc. of 3<sup>rd</sup> applied mechanisms and robotics conference*. Cincinnati. 1993. pp. 94-101.
9. W. Fang. "Simultaneous type and dimensional synthesis of mechanisms by genetic algorithms". *Mechanisms synthesis and analysis*. Vol. 70. 1994. pp. 35-41.
10. D. Mundo, J. Liu, H. Yan. "Optimal synthesis of cam linkage mechanisms for precise path generation". *ASME Journal of mechanical design*. Vol. 128. 2006. pp. 1253-1260.
11. J. Cabrera, A. Simon, M. Prado. "Optimal synthesis of mechanisms with genetic algorithms". *Journal mechanism and machine theory*. Vol. 37. 2002. pp. 1165-1177.
12. H. Quintero, G. Calle, A. Díaz. "Síntesis de generación de trayectoria y de movimiento para múltiples posiciones en mecanismos, utilizando algoritmos genéticos". *Scientia et Technica*. Vol. 25. 2004. pp. 131-136.
13. A. Vasiliu, B. Yannou. "Dimensional synthesis of planar mechanisms using neural networks: application to path generator linkages". *Mechanism and machinet*. Vol. 36. 2001. pp. 299-310.
14. J. Hoskins, G. Kramer. "Synthesis of mechanical linkages using artificial neural networks and optimization". *IEEE International Conference on Neural Networks*. Vol. 2. 1993. pp. 822J - 822N .
15. C. Bageci, D. Burke. "Optimum synthesis of coupler curve and uniform rotary motion driven multiloop mechanisms generating complex output motions". *Journal of mechanical design*. Vol. 115. 1993. pp. 967-977.
16. T. Sánchez, A. Pérez. "Global optimization in path synthesis based on design space reduction". *Mechanism and machine theory*. Vol. 38. 2003. pp. 579-594.
17. R. Bulatovic, S. Djordjevic. "Optimal synthesis of a four-bar linkage by method of controlled deviation". *Theoretical and applied mechanics*. Vol. 31. 2004. pp. 265-280.
18. R. Sancibrian, F. Viadero, P. García, A. Fernández. "Gradient-based optimization of path synthesis problems in planar mechanisms". *Mechanism and machine theory*. Vol. 39. 2004. pp. 839-856.
19. A. Rao. "Optimum design of four-bar function generators with minimum variance criterion". *Journal of optimization theory and applications*. Vol. 29. 1979. pp. 147-153.
20. C. Chang. "Synthesis of adjustable four bar mechanisms generating circular arcs with specified tangential velocities". *Mechanism and machine theory*. Vol. 36. 2001. pp. 387-395.
21. H. Yan, R. Soong. "Kinematic and dynamic design of four-bar linkages by links counterweighing with variable input speed". *Mechanism and machine theory*. Vol. 36. 2001. pp. 1051-1071.
22. G. Guj, Z. Dong, M. Di Giacinto. "Dimensional synthesis of four bar linkage for function generation with velocity and acceleration". *Meccanica: an international journal of theoretical and applied mechanics*. Vol. 16. 1981. pp. 210-219.
23. F. Conte. "Optimum mechanism design combining kinematic and dynamic force considerations". *J. Eng. for industry*. Vol. 89. 1975. pp. 662-670.