

Un procedimiento geométrico para la reconstrucción de superficies mediante funciones de base radial de soporte compacto

A geometrical approach for surface reconstruction by means of radial basis functions with compact support

Germán Sánchez Torres^{1}, John William Branch²*

¹Grupo en Investigación y Desarrollo en Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación, Universidad del Magdalena. Carrera 32 N.º 22-08, Santa Marta, Colombia.

²Grupo en Investigación y Desarrollo en Inteligencia Artificial – GIDIA, Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín. Carrera 80 N.º 65 - 223, Medellín, Colombia.

(Recibido el 11 de abril de 2008. Aceptado el 12 de Marzo de 2009)

Resumen

Recientemente en la comunidad de visión por computador relacionada con los procesos de reconstrucción de superficies de objetos de forma libre se ha notado una tendencia creciente en el uso de técnicas de interpolación. En esta área los interpoladores de funciones de base radial han mostrado que producen modelos tridimensionales con altos niveles de precisión, gran flexibilidad en la reproducción de formas complejas y una alta tolerancia a los niveles de ruido. Las funciones de base radial necesitan la estimación de un conjunto de parámetros de los cuales depende la correcta reconstrucción de la superficie. En este trabajo se describe un procedimiento para la reconstrucción de superficies mediante interpolación usando funciones de base radial de soporte compacto realizando una estimación de centros y radios basado en las características geométricas de la superficie a reconstruir. Los resultados del método propuesto son descritos mediante la interpolación de datos de rango de objetos reales.

----- **Palabras clave:** Reconstrucción de superficies, funciones de base radial, datos de rango, estrategia evolutiva

* Autor de correspondencia: teléfono: + 57 +5 +430 12 92 ext 362, fax: + 57 +5 + 430 12 92, correo electrónico: gsanchez@unimagdalena.edu.co (G. Sánchez).

Abstract

Recently in the community of computer vision related with the surface reconstruction processes of free-form objects there has been a growing trend in the use of interpolation techniques. In this area the radial basis functions interpolator can produce three-dimensional models with high levels of precision, high flexibility to reproduce complex shapes and a high tolerance to noise level. The radial basis functions used for data interpolation need to estimate a set of parameters. This work shows a approach to estimation of those parameters based on the surface geometric characteristics, these are both centers and support ratio. The approach results are shown mean by interpolation of real objects range data.

----- **Keywords:** Surface reconstruction, radial basis functions, range data, evolutionary strategy

Introducción

El diseño geométrico y los sistemas de manufactura asistida por computador son usados en un amplio número de industrias para generar objetos físicos desde modelos creados digitalmente. Sin embargo, el problema inverso, en el cual se infiere un modelo digital desde un objeto físico, es de gran interés en la comunidad de la computación gráfica; este tipo de problema es conocido de manera general como ingeniería inversa.

Existen varias propiedades en los objetos 3D relevantes; estas incluyen, la forma, el color y las propiedades del material. El estudio de la forma es un campo que ha motivado diversos estudios en diferentes ramas del conocimiento desde hace algunas décadas. La reconstrucción de superficies es el proceso mediante el cual, objetos reales son reproducidos en la memoria de un computador, manteniendo sus características físicas como la dimensión, el volumen y la forma. La generación de estos modelos tiene diversos campos de aplicación, tales como el reconocimiento de objetos, la reconstrucción facial para la identificación, el intercambio de hallazgos arqueológicos, entre otros. Una forma del modelo digital es creada a partir de información geométrica adquirida directamente del objeto real y almacenado en imágenes de rango. Las imágenes de rango constituyen una manera no invasiva y de alta precisión de obtener información acerca de la geometría de

un objeto; son fotografías digitales del objeto, donde en lugar de capturar valores de intensidad de color o luminosidad, se forma un arreglo de distancias tomadas desde una posición conocida de un sensor hasta puntos sobre la superficie del objeto, el posterior tratamiento de la información adquirida consiste en un conjunto de etapas que permiten finalmente obtener la representación digital del objeto, a saber, adquisición, registro, integración y ajuste. El ajuste de superficies es la etapa mediante la cual se realiza una estimación matemática, a partir de un conjunto de puntos obtenidos en la etapa de adquisición y procesados en las etapas de registro e integración. La estimación matemática de la superficie es posible realizarse mediante diversas técnicas como ajuste por triángulos, aproximación mediante funciones Spline e interpolación de datos dispersos. Una de las técnicas disponibles para interpolación 3-D, la constituyen las funciones de base radial (RBF: *Radial Basis Functions*) debido a que resultan ser muy atractivas para una gran cantidad de aplicaciones debido a la capacidad de reproducir forma de alta calidad, aún en presencia de datos irregularmente muestreados y con altos niveles de ruido. La base del problema de ajuste de superficies mediante interpolación consiste en encontrar una superficie que interpole un número finito de N puntos $P = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ en R^3 . Existen diferentes variantes del problema, el más simple de los casos ocurre cuando los datos están pre-

escritos en una superficie en R^2 ; en estos casos se mantiene una función bivariada $F(x,y)$ la cual toma ciertos valores para cualquier pareja variante (x_i, y_i) , esto es, $F(x_i, y_i) = z_i$ para todo $i=1, \dots, N$. Este problema es conocido como el problema de encontrar una *función de reconstrucción*. El caso más general de la interpolación de datos dispersos, es conocido como el problema de *superficie a superficie* en el cual los datos están preescritos en alguna superficie en R^3 , en este caso, el problema es encontrar una superficie S que interpole un conjunto finito de datos y otra superficie W que interpole unos valores de función w_i estimados en cada punto de la superficie $(x_i, y_i, z_i) \in S$. Este problema puede ser visto como el problema de interpolar datos dispersos (x_i, y_i, z_i, w_i) en R^4 , donde (x_i, y_i, z_i) tiene la restricción de estar sobre la superficie en R^3 . Los casos más populares son aquellos en donde w_{ij} es un escalar y es generalmente una medida de distancia del punto a la superficie. La literatura en interpolación de datos dispersos es vasta, trabajos como el de Powell [1], Arge [2] y Buhmann [3, 4], describen métodos de interpolación con RBF.

Trabajos previos

Barrow *et al.* [5] y Blicher [6] son los primeros en introducir el problema de la reconstrucción de superficies en el área de la visión por computador. Ellos implementaron una solución basada en la interpolación de superficies curvadas uniformemente. La solución aplica un algoritmo que se desarrolla con el uso de un arreglo de procesos paralelos simples que realizan variaciones locales iterativamente. Esta técnica es muy simple y presenta varios problemas, como por ejemplo, el problema de las discontinuidades de la superficie. Grimson [7] presenta la teoría de interpolación de superficies visual en donde los datos de rango son obtenidos a partir de un par de imágenes estéreo. Esta teoría enfrenta el problema de encontrar el mejor ajuste a una superficie a partir de un conjunto de valores de profundidad obtenidos mediante el algoritmo de adquisición en estéreo presentado por Marr [8]. Boulton y Kender [9] presentan un procedimiento de reconstrucción visual

de superficies que está basado en la semi-reproducción de un kernel Spline de Duchon [10]. El proceso de semi-reproducción del kernel Spline está definido en términos de reproducir el kernel en un espacio de semi-Hilbert. El mayor costo computacional del método lo constituye la solución del denso sistema de ecuaciones lineales. Trabajos más recientes constituyen los acercamientos más completos e importantes al problema del ajuste de superficies; entre ellos existe una variedad muy amplia de técnicas utilizadas incluyendo también combinaciones de éstas. Los acercamientos mediante mallas triangulares y funciones Splines han sido tema de una amplia gama de trabajos realizados en el área recientemente. Esta tendencia es en gran medida incentivada debido a que soluciones como las basadas en interpolación suelen ser muy costosas computacionalmente. Estas limitaciones actualmente están siendo mitigadas con el desarrollo de las capacidades de cómputo de las arquitecturas modernas, el aumento significativo en la capacidad de los dispositivos de almacenamiento y el desarrollo de técnicas más rápidas para la solución de densos sistemas de ecuaciones. La interpolación mediante RBF desde el punto de vista teórico, ha sido ampliamente utilizado en diferentes trabajos: Baxter [11] en su trabajo "*The Interpolation Theory of Radial Basis Functions*", investigó la sensibilidad de la interpolación de las RBF a los cambios en los valores de la función, utilizando descripciones de trabajos previos, para estudiar las matrices generadas por un conjunto de puntos dispuestos en *grid* regulares; adicionalmente, se analizaron los resultados de la interpolación de una amplia gama de familias de RBF. Wendland [12] describe ampliamente los aspectos computacionales de la interpolación multivariada y la aproximación mediante RBF. Aunque describe algunas características y restricciones que los datos deben cumplir para evitar problemas de matrices no invertibles no relaciona los aspectos o características para la selección de centros de interpolación. En el campo de las aplicaciones realizadas para reconstrucción 3-D mediante la interpolación de RBF, se pueden encontrar trabajos muy recientes que se dirigen en diversos

enfoques. Floater *et al.* [13] presentan un esquema jerárquico para la interpolación con RBF de soporte compacto. La jerarquía está relacionada con un grupo de subconjuntos de los datos obtenidos mediante triangulaciones sucesivas de Delaunay. El problema de los enfoques de múltiples escalas, es la interpolación de más de un conjunto de puntos para un solo objeto. Carr [14] describe una aplicación con rango de suavidad restringido para reconstruir superficies; esta técnica consiste en reducir la energía de una función cuádrica sobre todas las funciones de un espacio de Hilbert, satisfaciendo un conjunto dado de restricciones tomados de la topología de la superficie, que es inferida de los puntos. Posteriormente, Carr *et al.* [15], mostraron que puntos desordenados podían ser interpolados mediante RBF, produciendo superficies suaves y continuas mediante la aplicación de un kernel de paso bajo para reducir la cantidad de puntos, proponiendo un procedimiento en el cual se reduce el costo computacional del proceso de interpolación con RBF; sin embargo, el costo computacional alcanzado es alto, debido a que el procedimiento de reducción de puntos es computacionalmente costoso. Los trabajos teóricos y de aplicación realizados en la última década confirman una problemática relacionada con la interpolación de datos para reconstruir superficies, debido a que la teoría de la interpolación con RBF está bien definida y sustentada. El problema que emerge es el costo computacional anexo a este tipo de procedimientos comparados con otras técnicas de interpolación de datos como los Splines que han sido ampliamente estudiadas en los últimos años. En el 2005, Beatson [16] construyó un método para la rápida evaluación de interpolantes con funciones de base radial. El algoritmo propuesto está basado en una propiedad fundamental de funciones definidas condicionalmente negativas (o positivas); este método mostró un alto rendimiento sobre arquitecturas de clúster de estaciones de trabajo. Otros trabajos, proponen una técnica de ajuste adaptativo mediante RBF, como en Ohtake [17], el cual propone una método de selección de parámetros mediante el cual se garantiza la suavidad del modelo final; aquí el número de centros seleccionados

para evaluar la función de base radial, tiene influencia sobre la calidad del error. Kojekine [18] utiliza la evaluación de una función de base radial de soporte compacto, este tipo de funciones necesitan una menor complejidad computacional que otros modelos de RBF, ya que la utilización de estructuras de datos como los árboles Octales, ayudan a reducir la complejidad de la búsqueda y clasificación de centros sobre los cuales una RBF es evaluada. En este artículo, la tarea de ajustar superficies es realizada mediante técnicas de interpolación utilizando RBF de soporte compacto. Los temas relacionados con el control de la suavidad no son tratados en profundidad, sin embargo, es conocido que las RBF permiten la configuración en nivel de la precisión de la representación final [19].

Generación de la superficie

Las funciones de base radial son funciones circularmente simétricas, centradas en un punto llamado *centro*. Para calcular el interpolante de una RBF se considera que se tiene un conjunto de N puntos $p = \{p_1, \dots, p_N\}$ tomados desde la superficie original S del objeto real. El objetivo principal es construir una función $y = f(x)$ en la cual el conjunto de ceros de la función $f(x) = 0 : x \in \mathbb{R}^3$ aproxime la superficie S . Típicamente la interpolación construye una función $y = f(x)$ interpolando el conjunto P de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{p_i \in P} [g_i(x) + \lambda_i] \phi_\sigma(\|x - p_i\|) \quad (1)$$

Donde $\phi_\sigma(r)$ es la función base, el conjunto de valores λ_i es el conjunto de pesos asociado a cada centro, g_i es típicamente, un polinomio de segundo o tercer grado que mejora la suavidad de la superficie generada cuando es utilizado en técnicas de aproximación, poco se ha estudiado sobre la determinación del efecto del grado del polinomio utilizado, Sin embargo, en algunos casos como en el caso de la RBF TPS (*thin-plate spline*), la presencia del polinomio es necesaria para garantizar la definición positiva de la matriz

resultante. Para este caso, el conjunto P_i es denominado el conjunto de centros, es decir en un enfoque general todos los puntos de la muestra de la superficie S son tomados como puntos referentes en la interpolación. Los parámetros $\phi_\sigma(r)$, P_i y g_i son conocidos, de tal forma que λ_i es estimado resolviendo el sistema de ecuaciones. Los enfoques clásicos de interpolación con RBF conocidos como interpolación con soporte global no contienen parámetros adicionales a los centros de interpolación. Existe otro modelo de interpoladores RBF en los cuales cada centro no afecta ni se afecta por todos los puntos, por el contrario, solo un reducido conjunto de centros vecinos cercanos se afectan entre si. Este modelo es conocido como RBF de soporte compacto (CSRBF – *compact support radial basis functions*). Las CSRBF ayudan a mitigar la carga computacional que tradicionalmente se ha asociado con la solución de los sistemas de ecuaciones generados con un modelo con soporte global, debido a que generan un sistema con numerosas entradas en cero o sistema disperso debido a que la función se define únicamente en un intervalo del espacio determinado por un parámetro denominado soporte compacto. La dispersión en la matriz ayuda a que el costo de almacenamiento disminuya y el costo del cómputo para resolver el sistema de igual manera disminuya. Tradicionalmente una CSRBF agrega un parámetro adicional denominado radio de soporte. El radio de soporte indica de alguna manera general cual es la región sobre la cual el centro de interpolación tendría alguna influencia, debido a esto se debe tener en cuenta de manera importante la densidad de muestreo de la nube de puntos. Esto para garantizar que cada centro realmente influya sobre su vecindad de puntos y por el contrario evitar que cada centro influya sobre todo el conjunto de puntos y se pierdan los beneficios del soporte compacto. Una definición clásica de CSRBF es:

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\|x - x_i\|) + p(x) \quad (2)$$

donde, $\phi(r) = \begin{cases} f(r) & 0 \leq r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$, λ_i es el conjunto de pesos de los centros x_i y $p(x)$ un polinomio.

La estructura general se mantiene y la función $\phi(r)$ definida positiva se conoce como de soporte compacto, por que para cualquier valor de norma $\|x - x_i\| > R$, la función $\phi(r)$ toma el valor de cero, de tal forma que el parámetro R es conocido como el radio de soporte. Es común encontrar en la literatura que el valor del radio del soporte sea puesto en 1. Sin embargo, en el contexto de la reconstrucción de superficies, algunos objetos son sensados en diferentes tamaños del volumen contenedor. Esto es, algunos dispositivos escalan el volumen del objeto en un cubo de lado igual a la unidad. Para este caso, si el tamaño de soporte fuese el tradicional, la función de soporte compacto se comportaría exactamente igual a una con soporte global porque cada centro esta en la capacidad de envolver dentro de su soporte a cada uno de los otros centros. Otro caso seria tratar de dar soporte de tamaño unitario a objetos cuyo volumen es muy grande, seria posible entonces que no se genere ningún valor de influencia y que la matriz resultante este llena de ceros. Un enfoque adaptativo es el de establecer un valor constante diferente de la unidad, pero que garantice que el centro mas distante por lo menos se solape con algún otro. En general estos enfoques poseen un tamaño de radio fijo para todos y cada uno de los centros (Figura 1).

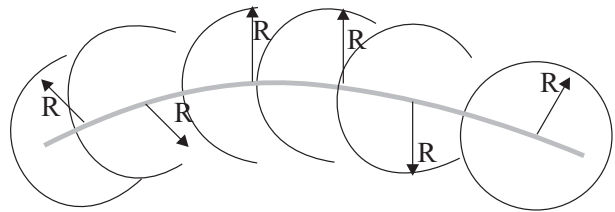


Figura 1 Radio de longitud fija para cada uno de los centros en una interpolación mediante CSRBF

Con el enfoque de radios fijos un posible inconveniente seria la determinación correcta del valor

de soporte de acuerdo a la densidad de la nube de puntos. Un problema adicional lo constituye el hecho de que en algunos centros pueden quedar mas cercanos que otros y habrá un traslapa innecesario en algunos centros con lo que se estaría incurriendo costo computacional adicional.

Para resolver el problema de la correcta asignación de los centros el modelo inicial de CSRBF clásico debe tener la flexibilidad de incorporar tamaños de soporte específicos para cada uno de los centros, así el modelo de CSRBF se redefine así:

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\|x - x_i\|) + p(x) \quad (3)$$

$$\text{donde, } \varphi(r, i) = \begin{cases} f(i, r) & 0 \leq r \leq R_i \\ 0 & r > R_i \end{cases}$$

Así se evita que existan solapes innecesarios y que cada centro se adapte adecuadamente a la superficie. La figura 2 muestra gráficamente el modelo con radios independientes. La interpolación correcta con CSRBF exige que toda la superficie sea cubierta por lo menos por un centro de interpolación (Figura 3).

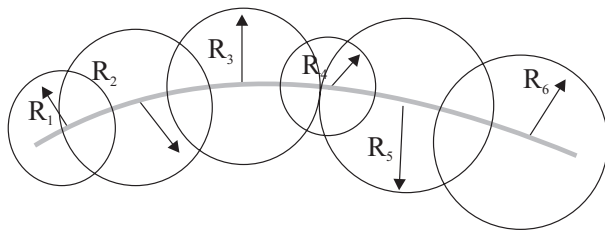


Figura 2 Radios de soporte con longitud independiente para centro de interpolación

Sin embargo este enfoque da lugar a un costo computacional innecesario debido a la posibilidad de que más de un centro sea cubierto en su totalidad con la intersección de otros. En general para lograr establecer un soporte adecuado para cada uno de los centros seleccionados, no es necesario tener en cuenta únicamente la densidad del muestreo del conjunto de puntos, si no la densidad de muestreo del conjunto de centros.

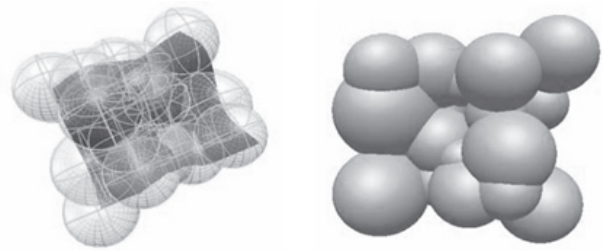


Figura 3 Centros y radios de soporte para un segmento de superficie

Selección de centros mediante clusterización

Esta etapa busca generar una aproximación de la superficie. La aproximación de la superficie se realiza en este trabajo mediante la interpolación de un sub-conjunto de puntos de la nube inicial. Este sub-conjunto es seleccionado, teniendo en cuenta afectar lo menos posible la precisión de la representación final y teniendo en cuenta que para que posteriormente se pueda recortar la superficie generada, los puntos del contorno deben satisfacer la función de interpolación, es decir, deben hacer parte del sub-conjunto de puntos con el cual se construye el interpolante, a este sub-conjunto de puntos se llamará en adelante, centros de la interpolación y estarán formados por los sub-conjuntos seleccionados de acuerdo a las siguientes características: 1. Seleccionar un conjunto de puntos cuyas características geométricas sean representativas de su entorno, 2. Todos los puntos que correspondan a contornos externos, si los hay. El objetivo de la característica 1, es disminuir el efecto de la pérdida de precisión con la reducción de puntos, así el objetivo es seleccionar puntos representativos por regiones lo que sugiere algún tipo de segmentación o subdivisión de los puntos que conforman la superficie para extraer puntos representativos, según las características locales de cada región. Las características 2 tienen como objetivo hacer que se interpolen correctamente los límites de la superficie (Figura 4): (a) Borde reproducido incorrectamente, (b) Borde correctamente reproducido.

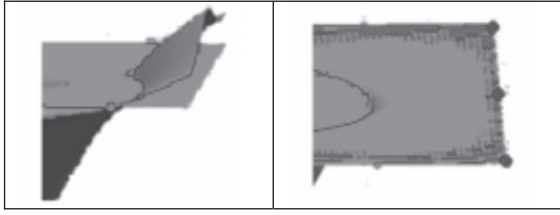


Figura 4 Efectos de la selección de centros en la reproducción del borde

El error en la interpolación de los límites es debido a que el comportamiento de la superficie más allá de los límites de los centros de referencia está dado por la naturaleza del método utilizado. Es decir, si no se posee información en los límites de las superficies al construir el interpolante es posible que la superficie generada descienda o se eleve de forma incorrecta, por lo tanto, los bordes no se representan correctamente. En la figura 5, las flechas indican la dirección en las cuales las dos superficies se extienden, esto es debido a que los puntos de referencia están alejados del borde y no es posible reproducir correctamente la superficie desde el borde hasta los centros de interpolación.

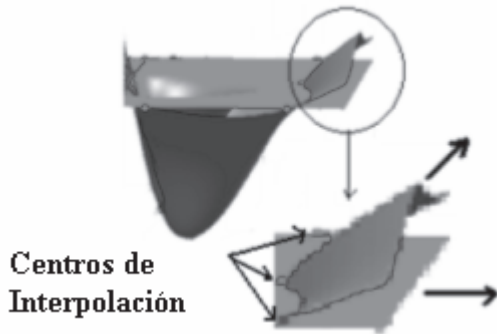


Figura 5 Interpolación incorrecta de los bordes

Los puntos que cumplen con las características 2 y 3 son extraídos de los contornos que previamente se han clasificado como preservables y el conjunto de puntos que cumple la característica 1 son establecidos mediante clusterización. Hay una razón teórica que indica que la interpolación es óptima si los centros están situados en los puntos del objeto [20]. Los experimentos relaciona-

dos con la localización de centros están centrados principalmente en técnicas de aproximación de datos para la reconstrucción [21]. En estas técnicas la calidad de la aproximación es medida mediante una función de energía que se intenta minimizar. Aunque la función típica de minimización la constituye los mínimos cuadrados, otras funciones objetivo también se han considerado para la minimización [22, 23]. El objetivo, es obtener una buena aproximación del objeto representado por el conjunto de puntos con un sub-conjunto de éste. Debido a que esta simplificación del conjunto de datos reduce el tiempo de cómputo empleado en la construcción y la evaluación del interpolante que aproxima la geometría del objeto. Los resultados indican que los ahorros significativos en costo computacional pueden resultar en el costo de introducir errores muy pequeños de precisión en la representación final [24], es decir, la representación digital obtenida luego de una reducción siempre será afectada por un incremento en el error. Esta etapa implementa una técnica general de *clusterización* mediante crecimiento de regiones, dado que *clusterizar* la superficies no suele ser costoso computacionalmente si se establecen las estructuras de datos eficientemente. El algoritmo consiste en calcular previamente una estimación de la curvatura de las superficies en cada punto P . La estimación de la curvatura es calculada resolviendo una matriz de covarianza formada utilizando un vecindario cercano y de tamaño fijo en cada uno de los puntos así:

$$MC = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})(p_i - \bar{p})^T \quad (4)$$

donde n es el número de vecinos al punto p_i y $\bar{p}$

se define como $\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$.

La estimación de la curvatura en un punto p es:

$$C = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2} \quad (5)$$

donde λ_i son los *eigenvalores* de la matriz formada en la Ecuación 4, tal que $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$, este

enfoque de estimación del valor de la curvatura viene dado del análisis estadístico mediante PCA (*principal component analysis*). Una vez obtenida la aproximación de la curvatura, el siguiente paso consiste en calcular una *clusterización* de las superficies, de tal forma que la varianza de cada clúster no supere un umbral β establecido. La descripción general de este procedimiento se presenta en el Algoritmo 1 y figura 6 respectivamente.

Algoritmo 1 Método propuesto para la selección de centros

Inicio

1. *Inicie con un punto semilla aleatoria P_r y cree un clúster C_r*
2. *Adhiera un vértice $V_k \in N_{ci}$ sucesivamente a C_r , mientras que $V_{ci} < \beta$ donde N_{ci} es un vecindario circular alrededor del centroide de C_r y V_{ci} es la varianza dentro del clúster C_r (ver figura 1).*
3. *Retorne a 1 hasta clusterizar todos los puntos de M*

Fin

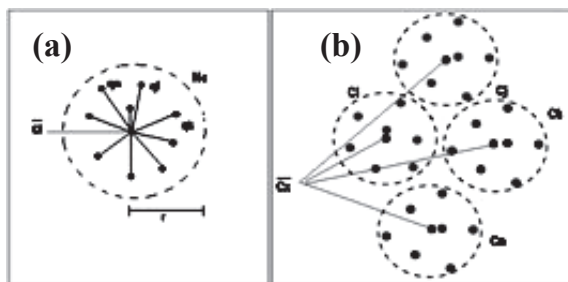


Figura 6 (a) Definición de vecindario de cada centroide, (b) Centroides de los clúster no pertenecen al conjunto de datos

La cantidad de clúster obtenidos se comporta inversamente al valor de la varianza, a medida que la varianza aumenta, se obtienen menor número

ro de *clústers*. La varianza tendrá una incidencia directa sobre la suavidad y la calidad de la superficie interpolada, porque ésta determina la cantidad de centros con las cuales se aproximará la superficie. La técnica de *clusterización*, tiene la propiedad de representar completamente las variaciones de la superficie, característica que no se presenta en técnicas de selección aleatoria, en la cual puede presentarse ausencia de centros en regiones pequeñas que generan altos errores y causan la interpolación iterativa del interpolante.

Estimación de Radios de Soporte

El procedimiento comienza con los resultados de la etapa de selección de centros, una vez obtenido el conjunto de centros, es necesario realizar un cálculo de la conectividad de los centros seleccionados, dado que el conjunto de centros obtenido por *clusterización* no está homogéneamente distribuido sobre la superficie, es necesario estimar un valor de radio teniendo en cuenta la separación máxima de cada centro con los centros que forman el primer anillo en la malla que los conecta. Esto garantiza que el área total de la superficie es cubierta. El conjunto del punto k formado por el primer anillo en la malla M , lo compone el conjunto de centros C_i para los cuales exista una arista A que conecta a k con C_i . Es decir todo los $\forall C_i : \exists < C_i, k > \in M$ (Figura 7).

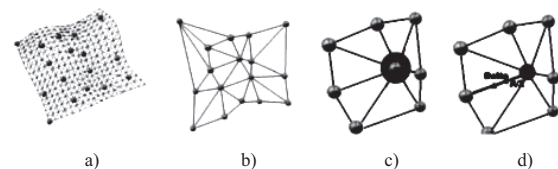


Figura 7 Pasos para la estimación de los radios de los centros de interpolación, a) centros seleccionados sobre la superficie original, b) estimación de una conectividad de los centros seleccionados, c) y d) estimación del radio de soporte basado en el análisis del conjunto del primer anillo

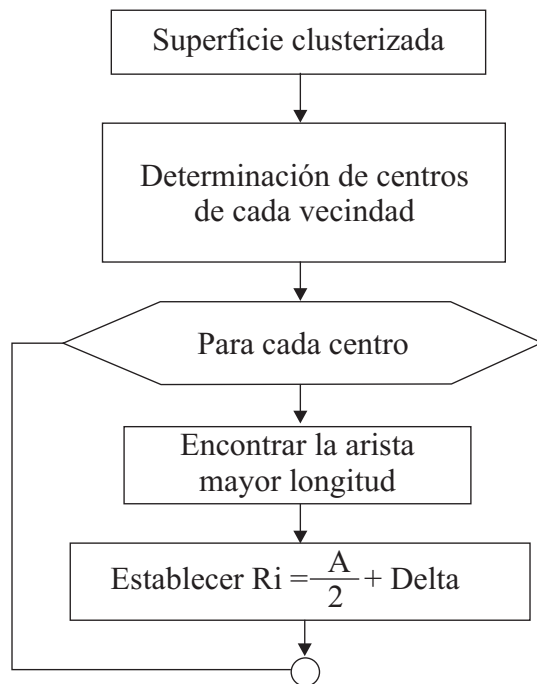


Figura 8 Proceso de estimación de parámetros para la interpolación con Funciones de Base Radial con Soporte compacto

El objetivo de la triangulación es conocer mediante la información de conexión la vecindad de cada centro, el tamaño del soporte estará en relación a dicha vecindad. Para cada uno de los centros se estima la vecindad determinada por el primer anillo de la malla triangular. En este anillo se busca la arista de mayor tamaño, es decir la máxima distancia del centro a su vecino mas alejado. Esto garantiza que los centros se relacionan en vecindades generando traslapes con cada uno de sus vecinos. Finalmente, el tamaño del soporte se establece como la mitad del tamaño de la arista de mayor longitud más un delta que garantiza el solapamiento con el centro que conecta con dicha arista. El problema de la selección correcta de los tamaños de soporte se reduce a encontrar el tamaño del adecuado entre traslapes en el cual una relación entre el tiempo de computo y la disminución en el error de ajuste sea conveniente. Es decir para una vecindad v_i del centro k , el radio adecuado es $R_i = \max dist(k, c_i)$, donde $c_i \in v_i$

el proceso se muestra gráficamente en el diagrama de la figura 8. Este algoritmo establece un radio específico para cada centro de interpolación de acuerdo a la ubicación de estos, al combinarse con la técnica de selección propuesta en la sección anterior, cada centro representa una región homogénea y se encarga de reproducir una región homogénea topológicamente puesto que el procedimiento de selección de centros toma un punto representativo de cada división homogénea obtenida.

Resultados

Todas las pruebas se realizaron utilizando un computador con procesador Intel de 3,0 GHz, memoria RAM de 1,0Gb corriendo bajo el sistema operativo Microsoft Windows XP. Las implementaciones de los modelos fueron realizadas en C++ y MATLAB, además se programó un motor gráfico en OpenGL, para obtener la representación gráfica de las imágenes. La mayoría de los datos utilizados fueron obtenidos con el sensor Kreon disponible en el Advanced Man-Machine Interface Laboratory - Department of Computing Science, University of Alberta, Canadá.

Selección de centros para superficies cerradas

El comportamiento en la interpolación de superficies cerradas no incluye más que procedimientos para modelar los detalles o variaciones geométricas de la superficie.

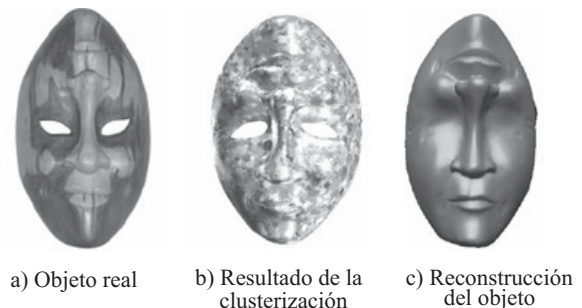


Figura 9 Objeto máscara y los resultados de la etapa del proceso de reconstrucción

Para el objeto mostrado en la figura 9 el resultado de la *clusterización* arrojó 4.089 centros seleccionados, adicionalmente 231 puntos correspondientes a los bordes de la superficie se anexaron al conjunto general sobre el cual se calculó el interpolante. La figura 9b muestra los resultados del proceso de selección de centros mediante *clusterización*. El interpolante se calculó con 4.320 centros de interpolación seleccionados de un conjunto inicial de 31.284 puntos. El resultado de la interpolación se muestra en la figura 9c. Esta representación fue obtenida mediante un algoritmo de extracción de superficies denominado Marching-Cubes. Finalmente, en la figura interpolada, los huecos que estaban presentes en la figura original se ha llenado, esto debido a que la interpolación mediante RBF asume continuidad en la superficie. De forma similar el objeto que se muestra en la figura 10a fue reconstruido con el método propuesto; el proceso de selección de centros seleccionó un conjunto de 9.962 de 35.947 puntos en la imagen inicial.

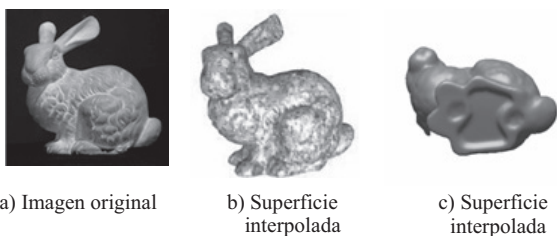


Figura 10 Objeto conejo de la Universidad Stanford y los resultados de la etapa del proceso de reconstrucción

Conclusiones

Se ha propuesto un método para el ajuste de superficies de objetos de forma libre mediante interpolación de datos dispersos utilizando funciones de base radial con soporte compacto. La selección de centros para la generación de la interpolación se realiza mediante una *clusterización* basada en curvaturas de la superficie. La *clusterización* garantiza que cada segmento de la superficie tiene representación en el modelo interpolado [19]. La

determinación de las principales características geométricas fueron necesarias para realizar la correcta selección de centros de interpolación. Se realizó un análisis mediante la obtención y estudio de soluciones óptimas generadas mediante una estrategia evolutiva, dando como resultado que características locales como la variación de la curvatura y la normal son determinantes para la preservación de detalles finos en la selección de centros de interpolación. Una debilidad del método propuesto radica en que al estimar el interpolante no se consideran las discontinuidades del objeto, por el contrario se asume que la superficie es continua. Como trabajo futuro se debería trabajar en generar superficies que preserven las discontinuidades presentes en las superficies.

Referencias

1. M. Powell. "The theory of radial basis function approximation" *Advances in Numerical Analysis II*. W.A. Light. Editor. Ed. Clarendon Press. Oxford. 1990. pp. 105.
2. A. Arge. *Approximation of scattered data using smooth grid functions*. Technical Report STF33 A94003. SINTEF. 1994.
3. M. Buhmann. "Multivariate interpolation in odd-dimensional Euclidean spaces using multiquadrics" *Const. Approx.* 1990. Vol. 6. pp. 21-34.
4. M. Buhmann. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. Ed. Cambridge University Press. 2003. pp. 99-153.
5. H. G. Barrow, J. M. Tanenbaum. "Interpreting line drawings as three-dimensional surfaces". *Proc. of AAAI-80*. Stanford. CA. 1980. pp.11-14.
6. P. Blicher. "From images to surfaces: A computational study of the human early visual system". *SIGART Bull.* MIT press. 1982. Vol. 82. pp. 12-14.
7. W. Grimson. *From Images to Surfaces: A Computational Study of the Human Early Visual System*. Cambridge: MIT Press 1981. Ph.D. Thesis. pp. 274.
8. D. Marr; T. Poggio. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*. Vol. 204. 1979. pp. 301-328.
9. T. Boult, J. Kender. "Visual surface reconstruction using sparse depth data". *CVPR86*. 1986. pp. 68-76.

10. J. Duchon. "Spline minimizing rotation-invariant seminorms in sobolev spaces". *Constructive Theory of Functions of several Variables*. Vol. 571. 1997. pp. 85-100.
11. B. Baxter. *The Interpolation Theory of Radial Basis Functions*. PhD thesis. Trinity College. 1992.
12. H. Wendland. "Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree". *Advances in Computational Mathematics*. Vol. 4. 1995. pp. 389-396.
13. M. Floater, A. Iske. "Multistep scattered data interpolation using compactly supported radial basis functions". *Journal of Comp. Appl. Math.* Vol. 73. 1996. pp. 65-78.
14. J. C. Carr, R. K. Beatson, J. B. Cherrie, T. J. Mitchell, W. R. Fright, B. C. McCallum, T. R. Evans. "Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions". *Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and interactive Techniques SIGGRAPH 2001*. ACM. New York. NY. pp. 67-76.
15. J. Carr, R. Beatson, B. McCallum, W. Fright, T. Mclellan, T. Mitchell. "Smooth surface reconstruction from noisy range data". *Proceedings of the 1st international conference on Computer graphics and interactive techniques in Australasia and South East Asia. GRAPHITE '03*. New York. USA. ACM Press. 2003. pp. 119.
16. R. K. Beatson, W. A. Light, S. Billings. "Fast Solution of the Radial Basis Function Interpolation Equations: Domain Decomposition Methods". *J. Sci. Comput.* Vol. 22. 2000. pp. 1717-1740.
17. Y. Ohtake. "3d scattered data approximation with adaptive compactly supported radial basis functions". *Proceedings of the Shape Modeling International 2004 (SMI'04)*. Washington D.C. USA. *IEEE Computer Society*. 2004. pp. 31-39.
18. N. Kojekine, V. Savchenko. *Surface reconstruction based on compactly supported radial basis functions, Geometric modeling: techniques, applications, systems and tools*. Ed. Kluwer Academic Publishers. Norwell. Ma. USA. 2004. pp. 218-231.
19. G. Sánchez. "Selección de centros de Interpolación de funciones de Base Radial para el Ajuste de superficies de Objetos de forma libre". *CLEI - XXXII Conferencia Latinoamericana de Informática*. Santiago de Chile – Chile. 2006.
20. R. Schaback. *Creating Surfaces from Scattered Data Using Radial Basis Functions, Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design III*. M. Dæhlen, T. Lyche, L.L. Schumaker (eds.), Ed. Vanderbilt Univ. Press. Nashville. 1995. pp. 477-496.
21. R. McMahon, R. Franke. "Knot selection for least squares thin plate splines". *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. Vol. 13. 1992. pp. 484-498.
22. F. Girosi. "Some extensions of radial basis functions and their applications in artificial intelligence". *Computers and Mathematics with Applications*. Vol. 24. 1992. pp. 61-80.
23. K. Salkauskas. "Moving least squares interpolation with thin-plate splines and radial basis functions". *Computers and Mathematics with Applications*. Vol. 24. 1992. pp. 177-185.
24. R. Carlson, B. Natarajan. "Sparse approximate multiquadric interpolation". *Computers and Mathematics with Applications*. Vol. 26. 1994. pp. 99-108.