Rev. Fac. Ing. Univ. Antioquia N.° 48. pp. 216-215. Junio, 2009

Operadores *k*-estadísticos para morfología matemática de conjuntos

K-statistical operators for set mathematical morphology

Juan Díaz de León Santiago, Arturo Gamino, Julio Salgado, Valentín Trujillo, Alicia Ortiz*

Departamento de Ingeniería Telemática, Universidad Politécnica de Pachuca. Carretera Pachuca-Cd. Sahagún km. 20 Ex-Hacienda de Santa Bárbara, Municipio de Zempoala Código Postal 43830, Hidalgo, México.

(Recibido el 4 de septiembre de 2008. Aceptado el 12 de marzo de 2009)

Resumen

En este artículo se presenta una generalización de las operaciones básicas de la morfología matemática de conjuntos, debido a que es capaz de obtener de forma geométrica descriptores estadísticos en el codominio del operador ($Z= \{0, 1\}$). A los resultados de esta generalización se le han denominado operadores *k*-estadísticos. Estos operadores no son tan exigentes con respecto a lo que se espera de la traslación de un elemento estructural al interceptarlo con un conjunto original, como las operaciones básicas de dilatación y erosión. Más aun, un solo operador *k*-estadístico representa un conjunto funcionalmente completo, e incluye la erosión y la dilatación como casos particulares. En un operador *k*-estadístico, la condición de pertenencia al resultado de la operación depende de que el área (número de elementos) de la intersección entre la traslación del elemento de estructura y el conjunto original sea al menos de magnitud *k*. Como consecuencia, con un solo parámetro (*k*) se pueden crear toda la gama de operadores que van desde erosión hasta dilatación y, por ende, otro tipo de aperturas y cerraduras que tengan comportamientos intermedios, como alternativa a la solución de diversos problemas en procesamiento de imágenes binarias.

----- *Palabras clave:* Morfología matemática, dilatación, erosión, apertura, cerradura

Abstract

A generalization of the basic operators in mathematical morphology is presented in this paper. The resulting generalization lead to the construction of the *k*-statistical operators, due to its ability to obtain geometricaly the

* Autor de correspondencia: teléfono: + 52 + 771 + 547 75 10, fax: + 52 + 771 + 547 30 03, correo electrónico: jdiaz@upp.edu.mx (J. Díaz)

statistical descriptors within the range of the operator (Z={0,1}). These operators can be less strict as to the expected result as in the basic operators of dilation and erosion. Furthermore, a single *k*-statistical operator represents a functional complete set that includes erosion and dilation as particular cases. In a *k*-statistical operator, the condition to obtain the resulting set depends on whether the area (number of elements) of intersection between the translated structural set and the original set is at least equal to *k*. As a consecuence, a single parameter (*k*) is able to create a manifold of operators ranging from erosion to dilation. Hence, other kinds of openings and closings with new behavior are created as alternative solutions to binary image processing problems.

----- *Keywords*: Mathematical morphology, dilatation, erosion, opening, closing

Introducción

La morfología matemática es una excelente herramienta para extraer componentes de un objeto de interés, útiles para representar y describir la forma de una región, tales como fronteras y esqueletos. La morfología matemática se ha utilizado con gran éxito en el procesamiento de imágenes y el lenguaje utilizado es la teoría de conjuntos, dado que una imagen binaria se representa por medio de un conjunto [1, 2]. En su forma actual, la morfología matemática no termina en el procesamiento de imágenes o señales y, dado que su única premisa de trabajo es la de utilizar el álgebra de conjuntos y sus propiedades, es de utilidad para cualquier clase de problema que se modele por medio de conjuntos y donde la *forma* sea la característica más relevante [3]. Las bases teóricas de la morfología matemática se deben al científico alemán nacido en Rusia, Hermann Minkowski (1864-1909); estas bases teóricas se centran en la suma de Minkowski [4] y la resta de Minkowski [5] (dual de la operación suma) definida por Hadwiger. Las operaciones de Minkowski dan pauta a las operaciones básicas de la morfología matemática (iniciada por George Matheron a mediados de los 60's), la *dilatación* y la *erosión*. A partir de estas dos operaciones se crean las demás operaciones morfológicas. También es importante destacar que el resultado de estas operaciones morfológicas depende fuertemente de la forma del elemento de estructura; es por ello que en este trabajo se presentan resultados importantes acerca de la flexibilidad que exhiben las operaciones de dilatación y erosión. Aunque la mayoría de trabajos están encaminados a ser más eficientes estas operaciones, ya sea con elementos arbitrarios o discos [3, 6-15]. En la referencia [1] se describen los operadores *k*-estadísticos como un operador más de la morfología matemática; sin embargo, los operadores *k*-estadísticos representan una familia mucho más amplia de operadores que permiten, entre otras cosas, obtener descripciones estadísticas de: conjuntos (representados por funciones binarias), funciones y relaciones en diferentes álgebras. Una descripción completa de sus operadores y propiedades está fuera del alcance de este artículo. Las operaciones *k*-estadísticas reciben su nombre de la estadística descriptiva, pues entregan como resultado conjuntos de descriptores estadísticos; en ella se considera como población a un conjunto por ser analizado dentro del universo de discurso, llámese A, y las muestras son representadas por un conjunto B, o de estructura; para cada elemento a de A se obtiene un descriptor dado por la muestra B trasladado en a. Nótese la similitud que se tiene en la filosofía de trabajo con la morfología matemática, lo que permite generalizar las operaciones de esta última para el caso de conjuntos. Como se trata de operadores, el conjunto de descriptores estadísticos está acotado por el rango o codominio del operador; por ejemplo, si el codominio es {0,1}, el conjunto de descriptores estadísticos conocidos se reduce a {mínimo, mediana=moda, máximo} mientras que otros descriptores como media, varianza, sesgo, Kurtosis, etc., requieren de un rango dentro de los reales para el operador. Este artículo es el primero de una serie de trabajos que describen los operadores k-estadísticos en diversos dominios y rangos; para nuestro caso el codominio es {0,1}, por lo que los operadores solo dependen del conteo de la intersección de eventos al trasladar B en a; i.e. las probabilidades discretas de las intersecciones de B en A. Como resultado, se obtienen operadores k-estadísticos de erosión (mínimo), dilatación (máximo), mediana=moda, cerradura y apertura, los cuales son versiones modificadas de las operaciones originales; por ejemplo en la referencia [18] se específica que al utilizar aperturas y cerraduras de manera conjunta se obtienen otros operadores morfológicos, donde el elemento de estructura es una trayectoria. No obstante lo anterior, en sus límites inferior y superior se obtiene las operaciones morfológicas originales. En estos operadores k-estadísticos el elemento de estructura puede ser arbitrario, permitiendo con esto que a partir de su adecuada selección se obtengan resultados más adecuados con respecto a las operaciones básicas. En este artículo se desglosan los conceptos fundamentales de la morfología matemática de conjuntos, se desarrollan los operadores k-estadísticos, se muestran ejemplos usando los operadores k-estadísticos y se realizan las conclusiones.

Conceptos básicos de la morfología matemática

Como se ha mencionado, la morfología matemática es una excelente herramienta para el procesamiento de imágenes y sus operaciones fundamentales son la dilatación y la erosión. Antes de definir las operaciones básicas abordemos sobre las imágenes que se tratarán en este trabajo; todos los resultados presentados son válidos para un espacio $X=Z^2$; es decir, para una región de interés $A\subseteq X$ con A finito y no vacío; este conjunto A relacionado con la región en cuestión es el conjunto de puntos $(x,y)\in X$, tales que dicho píxel sea negro (por convención). Nótese que $X=Z^2$, por lo que la operación + es cerrada sobre X, conmutativa, asociativa y existe su elemento neutro y su inverso aditivo. Cabe mencionar que estos operadores se pueden extender a funciones multivaluadas como se detalla en [17]. Las operaciones morfológicas quedan definidas completamente por la adición de conjuntos de Minkowski. Algunas operaciones básicas de conjuntos [1, 2, 16] son las siguientes:

Definición 1. La reflexión de $A\subseteq X$ (o conjunto reflejado), cuya notación es A^-, se define como el conjunto formado por los inversos aditivos de los elementos de A, es decir,

$$A^- = \{-x\in X \mid x\in A\} \tag{1}$$

Definición 2. La traslación de $A\subseteq X$ por un elemento $x\in X$ se denota por $(A)_x$ y se define como

$$(A)_x = \{a+x \mid a\in A\} \tag{2}$$

Definición 3. El complemento de un conjunto $A\subseteq X$ respecto a X (conjunto universo) o simplemente complemento, denotado por A^c, se define como el conjunto formado por aquellos elementos de X que no pertenecen a A, es decir,

$$A^c = \{x\in X \mid x\notin A\} \tag{3}$$

Con las definiciones anteriores se tiene un soporte para empezar a definir la dilatación; este término sugiere ideas afines al verbo dilatar; las palabras aumentar, inflar, engordar, expandir, crecer, entre otras, describe intuitivamente los efectos de la acción que el verbo dilatar produce en las características del ente sobre el que actúa. La dilatación es un proceso de crecimiento controlado y se puede definir como sigue:

Definición 4. La suma de Minkowski de $A\subseteq X$ y $B\subseteq X$, denotada por $A\oplus B$ es el conjunto que resulta de sumar cada elemento de A con cada elemento de B, es decir,

$$A\oplus B = \{a+b \mid a\in A, b\in B\} \tag{4}$$

A la suma de Minkowski también se le conoce como *dilatación* de un conjunto A por un conjunto B. Comúnmente al conjunto B se le conoce con el nombre de elemento de estructura o elemento estructurante; a partir de la definición anterior se puede demostrar sin mucha dificultad que la dilatación exhibe propiedades muy interesantes como lo son: a) Conmutatividad, i.e, $A\oplus B=B\oplus A$ b) Asociatividad, i.e., $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$ c) Invarianza a la traslación, i.e., $(A)_x\oplus B=(A\oplus B)_x$ d) Distributividad respecto a la unión, i.e., $(A\cup B)\oplus C=(A\oplus C)\cup(B\oplus C)$. El amable lector puede encontrar estas propiedades más detalladas en [1-2, 4-5]. La definición 4 se puede representar de manera alterna como sigue:

Teorema 1. Sean $A\subseteq X$ y $B\subseteq X$ dos conjuntos, se cumple que:

$$A\oplus B=\bigcup_{b\in B}(A)_b \tag{5}$$

Demostración

Se sabe que $(A)_x=\{a+x\mid a\in A\}$, entonces $A\oplus B=\{a+b\mid a\in A, b\in B\}$

$$=\{(A)_b\mid b\in B\}=\bigcup_{b\in B}(A)_b.$$

El Teorema 1 proporciona un algoritmo para encontrar la dilatación de un conjunto A por un elemento de estructura B de cardinalidad k, además se puede ver que es una interpretación geométrica de la dilatación. Se puede observar que cuando se dilata siempre se une completamente el conjunto B al conjunto A; si B es un conjunto de cardinalidad k, es decir, contiene k elementos, entonces en cada unión se anexan k elementos al conjunto a dilatar. La operación de erosión consiste en hacer decrecer un conjunto A a través de un proceso controlado de eliminación de elementos, tomando como referencia un elemento de estructura B. Al igual que sucede en la dilatación, el tamaño y la forma final del conjunto erosionado dependerá fuertemente del tamaño y forma del elemento de estructura.

Definición 5. Sean $A\subseteq X$ y $B\subseteq X$ dos conjuntos. La *erosión* de A por B, denotada por $A\Theta B$, se define como la resta de Minkowski de A y B, es decir,

$$A\Theta B=\{x\in X\mid x+b\in A, \forall b\in B\} \tag{6}$$

La erosión posee propiedades que la diferencia notablemente de la dilatación, la primera de ellas es que la erosión no es una operación que cumple con la propiedad de ser conmutativa y es distributiva pero respecto a la intersección, i.e., $(A\cap B)\Theta C=(A\Theta C)\cap(B\Theta C)$. Las demás diferencias entre las propiedades de la dilatación y la erosión se muestran en los siguientes teoremas:

Teorema 2: Sean $A,B,C\subseteq X$, entonces:

$$(A\Theta B)\Theta C=A\Theta(B\oplus C) \tag{7}$$

Demostración

$$(A\Theta B)\Theta C=\{x\mid x+c\in(A\Theta B), \forall c\in C\}$$

$$=\{x\mid x+(b+c)\in A, \forall b\in B, \forall c\in C\}$$

$$=\{x\mid x+b+c\in A, \forall b\in B, \forall c\in C\}$$

$$=\{x\mid x+(b+c)\in A, \forall(b+c)\in(B\oplus C)\}$$

$$=A\Theta(B\oplus C)$$

Teorema 3: Sean $A,B\subseteq X$ y sea $x\in X$ arbitrario, entonces:

$$(A)_x\,\Theta B=(A\Theta B)_x \tag{8}$$

$$A\Theta(B)_x=(A\Theta B)_{-x} \tag{9}$$

Demostración:

$$(A)_x\,\Theta B=\{y\mid y+b\in(A)_x, \forall b\in B\}$$

$$=\{y\mid[y+(-x)]+b\in A, \forall b\in B\}$$

$$=\{y\mid y-x\in A\Theta B\}$$

$$=\{y\mid y\in(A\Theta B)_x\}=(A\Theta B)_x$$

$$A\Theta(B)_x = \{y \mid y+c \in A, \forall c \in (B)_x\}$$

$$= \{y \mid y+c \in A, \forall c-x \in B\}$$

$$= \{y \mid y+b+x \in A, \forall b \in B\}$$

$$= \{y \mid (y+x)+b \in A, \forall b \in B\}$$

$$= \{y \mid y+x \in A\Theta B\}$$

$$= \{y \mid y \in (A\Theta B)_{-x}\} = (A\Theta B)_{-x}$$

Al igual que la dilatación, la erosión tiene un algoritmo para encontrar dicha erosión de un conjunto A por un elemento de estructura B de cardinalidad k, la cual es su interpretación geométrica. Se puede observar que cuando se erosiona siempre se intersecta completamente el conjunto B con el conjunto A; si B es un conjunto de cardinalidad k, es decir, contiene k elementos; entonces en cada intersección se verifican k elementos del conjunto A. Lo anterior se muestra en el siguiente teorema:

Teorema 4: Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$ dos conjuntos, se cumple que:

$$A\Theta B = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b} \tag{10}$$

Demostración

$$A\Theta B = \{x \mid x+b \in A, \forall b \in B\}$$

$$= \{x \mid x \in (A)_{-b}, \forall b \in B\} = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b}$$

Como se ha observado tanto en la operación de dilatación como de erosión, siempre se verifican un número de intersecciones o uniones igual a la cardinalidad de B, respectivamente, para obtener la operación resultante sobre el conjunto A; es por tal motivo que en este trabajo se presentan operaciones más flexibles, donde la cardinalidad de la intersección del elemento de estructura se pueda variar. La dilatación y la erosión exhiben el principio de dualidad, con la particularidad de que entran en juego el complemento de un conjunto operando y el conjunto reflejado de un elemento estructurante, esto se muestra en el siguiente teorema:

Teorema 5: Sean A y B dos subconjuntos de X, entonces se cumple que:

$$(A\Theta B)^c = A^c \oplus B^- \tag{11}$$

Demostración:

$$(A\Theta B)^c = \left[\bigcap_{b \in B} (A)_{-b}\right]^c = \bigcup_{b \in B} \left[(A)_{-b}\right]^c$$

$$= \bigcup_{b \in B} (A^c)_{-b} = \bigcup_{b \in B^-} (A^c)_b = A^c \oplus B^-$$

El significado de la dualidad entre la dilatación y la erosión es relevante; quiere decir que la acción de erosionar un conjunto A por un elemento estructura B dado es equivalente a dilatar el complemento del conjunto A con el reflejado del elemento de estructura B. Recíprocamente, dilatar un conjunto A por un elemento de estructura es equivalente a erosionar su complemento (A^c) con el reflejado del elemento de estructura B. En un gran porcentaje de procesos de análisis de conjuntos (imágenes binarias), a pesar de que la dilatación y la erosión son operaciones básicas independientes dentro de la morfología matemática se usan por parejas alternadas; es decir, normalmente se realizan procesos iterativos del tipo erosión seguida de una dilatación y una dilatación seguida de una erosión. En un principio podría llegar a pensarse que en ambos procesos se obtendría el mismo resultado, pero no es así; a pesar de que la dilatación y la erosión realizan efectos contrarios no son operaciones inversas; es por ello que a estos procesos se les conoce con el nombre de apertura y cerradura respectivamente y, de hecho, se consideran como operaciones fundamentales (básicas) de la morfología matemática, no obstante su definición en términos de la dilatación y la erosión.

Definición 6 La *apertura* de un conjunto $A \subseteq X$ por un elemento de estructura $B \subseteq X$ se denota como $A°B$ y se define así:

$$A \circ B = (A \Theta B) \oplus B \qquad (12)$$

Los efectos de una apertura sobre una región de interés se pueden resumir en 4 aspectos: a) Se eliminan islas de tamaño menor al elemento de estructura. b) Se eliminan picos o cabos más delgados que el elemento de estructura. c) Se rompen istmos cuya anchura sea menor al diámetro del elemento de estructura.

Definición 7: La *cerradura* de un conjunto $A \subseteq X$ por un elemento de estructura $B \subseteq X$ se denota como $A \bullet B$ y se define así:

$$A \bullet B = (A \oplus B) \Theta B \qquad (13)$$

Los efectos de una cerradura sobre una región de interés son diferentes a los de la apertura, éstos se pueden resumir en 3 aspectos: a) Se rellenan los lagos o los huecos de tamaño menor al elemento de estructura. b) Se rellenan rajaduras o golfos más delgados que el elemento de estructura. c) Se funden estrechos cuya anchura sea menor al diámetro del elemento de estructura. Existen muchas aplicaciones para las operaciones de erosión, dilatación, apertura y cerradura. Estas cuatro operaciones definen prácticamente todos los filtros y procesos dentro de la morfología matemática, por ejemplo: el esqueleto morfológico, la transformada hit and miss, extracción de contornos, entre otros.

Operadores binarios k-estadísticos

Como se ha mencionado anteriormente las operaciones de dilatación y erosión son demasiado exigentes (o flexibles según se vea) con respecto a lo que se espera de la traslación de un elemento estructural al interceptarlo con un conjunto A. Mientras una exige la contención de un conjunto en otro, la otra se conforma con cualquier intersección no nula. Se puede definir un operador más flexible, la mediana de A con respecto a B, de la siguiente manera:

Definición 8: Sean A,B dos subconjuntos de X al conjunto

$$A_{med} B = \left\{ x \mid med_{(B)_x} (\chi_A) = 1 \right\} \qquad (14)$$

donde $med_{(B)x}(\chi_A)$ es la mediana estadística de χ_A restringida al subdominio de $(B)_x$, se le llama conjunto mediana de A con respecto B. La operación mediana de la definición 8 tiene algunas propiedades interesantes. Sin embargo, en lugar de trabajar con ella directamente es conveniente definir un operador más general, como sigue.

Definición 9: Sean A,B dos subconjuntos no vacíos de X, el operador *k-estadístico* básico tiene la siguiente forma:

$$A \otimes_k B = \left\{ x \mid \left| (B)_x \cap A \right| \geq k \right\} \qquad (15)$$

En la definición 9 se puede observar claramente la flexibilidad de este operador, que a diferencia de las operaciones básicas solo se comprueban para k elementos del elemento de estructura B. El valor de k depende fuertemente del número de elementos del conjunto estructurante, por lo que en la definición se verifica la cardinalidad. Como se sabe, la dilatación y la erosión son operaciones controladas; este crecimiento o reducción del conjunto original A se realiza a través del elemento de estructura en su totalidad; por otro lado, el operador k-estadístico permite que estos efectos de aumento y disminución del conjunto original A dependa además de un parámetro k. Por tanto, los operadores k-estadísticos pueden ofrecer mejores resultados en ciertos procesos donde se requiera que la forma y probabilidad (número de eventos) de intersección sean la característica principal a conservar. Resulta sencillo comprobar a partir de las definiciones de erosión, dilatación y mediana, el siguiente teorema:

Teorema 6: Sean $A,B \subseteq X$, entonces se cumple que:

$$A\Theta B = A \otimes_{|B|} B \tag{16}$$

$$A \oplus B^{-} = A \otimes_{1} B \tag{17}$$

$$A_{med} B = A \otimes_{(|B|+1)/2} B \tag{18}$$

donde $|B|$ significa la cardinalidad del conjunto B y $A_{med}B$ es el conjunto mediana de A dado B.

Demostración:

$$A\Theta B = \left\{x \mid (B)_x \subseteq A\right\} = \left\{x \mid (B)_x \cap A = (B)_x\right\}$$

$$= \left\{x \mid \left|(B)_x \cap A\right| = |B|\right\} = A \otimes_{|B|} B$$

$$A \oplus B^{-} = \left\{x \mid \left[\left(B^{-}\right)^{-}\right]_x \cap A \neq \varnothing\right\}$$

$$= \left\{x \mid \left|(B)_x \cap A\right| \geq 1\right\} = A \otimes_{1} B$$

$$A_{med} B = \left\{x \mid med_{(B)_x}\left(\chi_A\right) = 1\right\}$$

$$= \left\{x \mid \left|(B)_x \cap A\right| \geq (|B|+1)/2\right\} = A \otimes_{(|B|+1)/2} B$$

A partir de $\otimes_k$ se pueden crear versiones modificadas de erosión y dilatación, y por ende, otro tipo de aperturas y cerraduras que contengan comportamiento intermedios, esto se muestra en las siguientes 4 definiciones:

Definición 10 Sean $A,B \subseteq X$ la *erosión k-estadística* o *k-erosión* esta dada por:

$$A\Theta_k B = A \otimes_{|B|-k} B \tag{19}$$

donde k=0, 1, 2, …, $|B|$-1.

Definición 11: Sean $A,B \subseteq X$ la *dilatación k-estadística* o *k-dilatación* esta dada por:

$$A \oplus_k B = A \otimes_{k+1} B^{-} \tag{20}$$

donde k=0, 1, 2, …, $|B|$-1.

Definición 12 Sean $A,B \subseteq X$ la *apertura k-estadística* o *k-apertura* esta dada por:

$$A \circ_k B = \left(A\Theta_k B\right) \oplus_k B \tag{21}$$

donde k=0, 1, 2, …, $|B|$-1.

Definición 13 Sean $A,B \subseteq X$ la *cerradura k-estadística* o *k-cerradura* esta dada por:

$$A \bullet_k B = \left(A \oplus_k B\right) \Theta_k B \tag{22}$$

donde k=0, 1, 2, …, $|B|$-1.

A partir de estos operadores k-estadísticos se pueden obtener más operadores, por ejemplo un k filtrado morfológico progresivo o simple. Un estudio acerca de los k-estadísticos muestra que para los valores extremos, i.e. k=0 y k=$|B|$-1, se obtienen las operaciones básicas; mientras que para otros valores de k se tienen aproximaciones a estas operaciones básicas según el grado de cercanía a algunos de los valores extremos. Lo anterior se demuestra en el siguiente teorema:

Teorema 7: Sean $A,B \subseteq X$ se cumple que si k=0:

$$A\Theta_0 B = A\Theta B \tag{23}$$

$$A \oplus_0 B = A \oplus B \tag{24}$$

$$A \circ_0 B = A \circ B \tag{25}$$

$$A \bullet_0 B = A \bullet B \tag{26}$$

cuando k=$|B|$-1, entonces:

$$A\Theta_{|B|-1} B = A \oplus B^{-} \tag{27}$$

$$A \oplus_{|B|-1} B = A\Theta B^{-} \tag{28}$$

$$A \circ_{|B|-1} B = A \bullet B^{-} \tag{29}$$

$$A \bullet_{|B|-1} B = A \circ B^{-} \tag{30}$$

y para k=$|B|$:

$$A\Theta_{|B|} B = A \square_{|B|} B = X \tag{31}$$

$$A \oplus_{|B|} B = A \circ_{|B|} B = \varnothing \tag{32}$$

Demostración:

Para k=0

$$A\Theta_0 B = A \otimes_{|B|-0} B = A \otimes_{|B|} B = A\Theta B$$

$$A \oplus_0 B = A \otimes_{0+1} B^- = A \otimes_1 B^- = A \oplus B$$

$$A \circ_0 B = \left(A\Theta_0 B\right) \oplus_0 B = \left(A\Theta B\right) \oplus B = A \circ B$$

$$A \bullet_0 B = \left(A \oplus_0 B\right)\Theta_0 B = \left(A \oplus B\right)\Theta B = A \bullet B$$

Para k=|B|-1

$$A\Theta_{|B|-1} B = A \otimes_{|B|-(|B|-1)} B = A \otimes_1 B = A \oplus B^-$$

$$A \oplus_{|B|-1} B = A \otimes_{(|B|-1)+1} B^- = A \otimes_{|B|} B^- = A\Theta B^-$$

$$A \circ_{|B|-1} B = \left(A\Theta_{|B|-1} B\right) \oplus_{|B|-1} B = \left(A \oplus B^-\right)\Theta B^-$$

$$= A \bullet B^-$$

$$A \bullet_{|B|-1} B = \left(A \oplus_{|B|-1} B\right)\Theta_{|B|-1} B = \left(A\Theta B^-\right) \oplus B^-$$

$$= A \circ B^-$$

Para k=|B|

$$A\Theta_{|B|} B = A \otimes_{|B|-(|B|)} B = A \otimes_0 B$$

$$= \left\{x \mid \left|\left(B\right)_x \cap A\right| \geq 0\right\} = X$$

$$A \oplus_{|B|} B = A \otimes_{|B|+1} B^-$$

$$= \left\{x \mid \left|\left(B^-\right)_x \cap A\right| \geq |B| + 1\right\} = \varnothing$$

$$A \bullet_{|B|} B = \left(A \oplus_{|B|} B\right)\Theta_{|B|} B = (\varnothing)\Theta_{|B|} B$$

$$= \varnothing \otimes_{|B|-(|B|)} B = \varnothing \otimes_0 B = \left\{x \mid \left|\left(\varnothing\right)_x \cap A\right| \geq 0\right\} = X$$

$$A \circ_{|B|} B = \left(A\Theta_{|B|} B\right) \oplus_{|B|} B = \left(X\right) \oplus_{|B|} B$$

$$= X \otimes_{|B|+1} B^- = \left\{x \mid \left|\left(B^-\right)_x \cap A\right| \geq |B| + 1\right\} = \varnothing$$

Por lo que

$$A\Theta_{|B|} B = A \bullet_{|B|} B = X$$

$$A \oplus_{|B|} B = A \circ_{|B|} B = \varnothing$$

A lo largo de esta sección se aportaron las bases matemáticas para desarrollar operadores llamados *k*-estadísticos, que permiten una mayor flexibilidad a las operaciones de dilatación, erosión, apertura y cerradura; no obstante, se pueden generar más operaciones morfológicas usando estos operadores *k*-estadísticos, sobre todo se pueden implementar un infinidad de filtros morfológicos usando el concepto *k-estadístico*.

Experimentos con operadores k-estadísticos

En este apartado se muestran las operaciones k-estadísticas en imágenes binarias. Estas imágenes binarias son de tamaño de 368 píxeles de ancho por 600 píxeles de alto, con una profundidad de 1 BIT. El color negro representa un valor de píxel de 0 mientras que el color blanco representa un valor de píxel de 1. En todos los experimentos presentados se utilizó un elemento de estructura de 9 píxeles conocido como vecindad de Moore (Figura 1 inciso a), por lo que el valor de k varía desde 0 hasta 8; es decir, se obtienen 9 versiones distintas de dilatación, erosión, apertura y cerradura. En la figura 1 inciso b, se muestra la imagen original sobre la cual se realizarán los experimentos demostrativos; en el inciso c se muestra el resultado de realizar una operación de dilatación, así como en el inciso d se observa la operación de erosión; finalmente, en los incisos e y f se muestran las operaciones de apertura y cerradura, respectivamente. Estos resultados son las operaciones básicas de la morfología matemática.

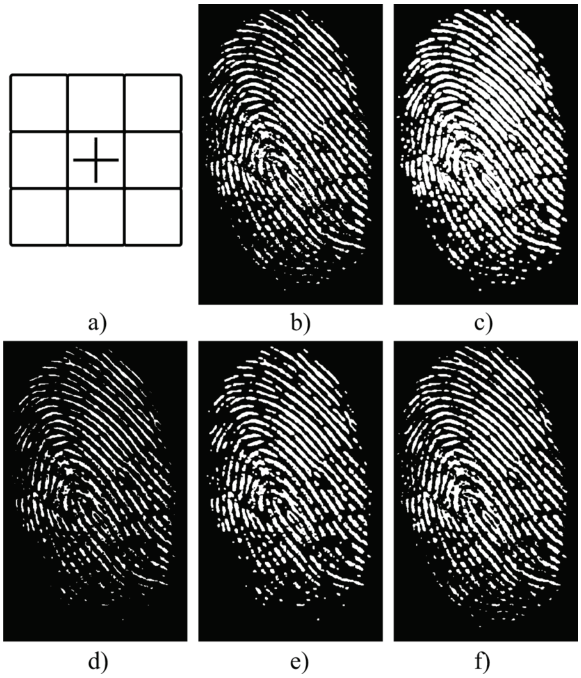

Figura 1 a) Elemento de estructura, b) Imagen *A* que será operada, c) Dilatación, d) Erosión, e) Apertura y f) Cerradura

En la figura 2 se muestran las 9 versiones de la operación de dilatación; se puede observar que para el inciso a, utilizando k=0, la imagen resultante coincide con la operación básica de dilatación (Figura 1, inciso c). Conforme se aumenta el valor de k se observa que se obtienen versiones modificadas y parecidas a la dilatación básica; pero mientras el valor de k se acerca a 8 (máximo valor para el elemento de estructura) la dilatación se va convirtiendo en una erosión. Si se observa en el inciso i, el resultado es el mismo que el de la operación básica de erosión (Figura 1, inciso d). Estas similitudes también se deben a que el elemento de estructura es simétrico, es decir, el elemento B es el mismo que su reflejado (B^-).

Si se hace un análisis similar para la figura 3, se podrá notar que para un valor k=0 el resultado es una erosión básica y para k=8 el resultado obtenido es una dilatación básica (ver los incisos: a, i de la figura 3 y compararlo con los incisos d y c de la figura 1), mientras que para valores intermedios se obtienen versiones distintas de erosión.

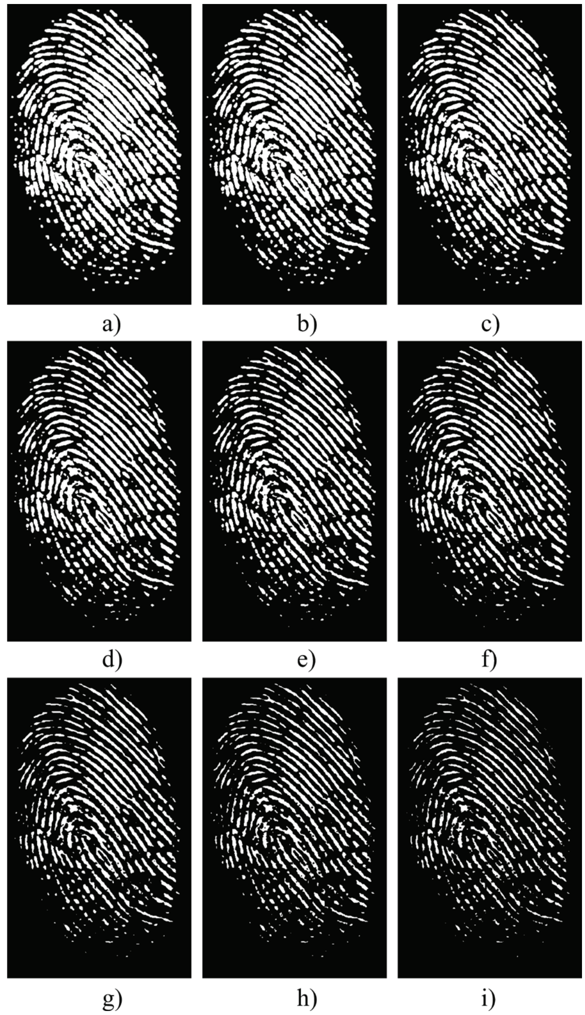

Figura 2 Operación de k-dilatación con a) k=0, b) k=1, c) k=2, d) k=3, e) k=4, f) k=5, g) k=6, h) k=7, i) k=8

Tal como sucede en las operaciones de la k-dilatación y la k-erosión, las mismas observaciones son válidas para las operaciones de k-apertura (Figura 4) y k-cerradura (Figura 5). Como se ve en estas dos figuras, para k=0 se obtienen las operaciones básicas de apertura y cerradura, mientras que para un valor de k=8 se obtienen las operaciones contrarias, es decir, cerradura y apertura, respectivamente.

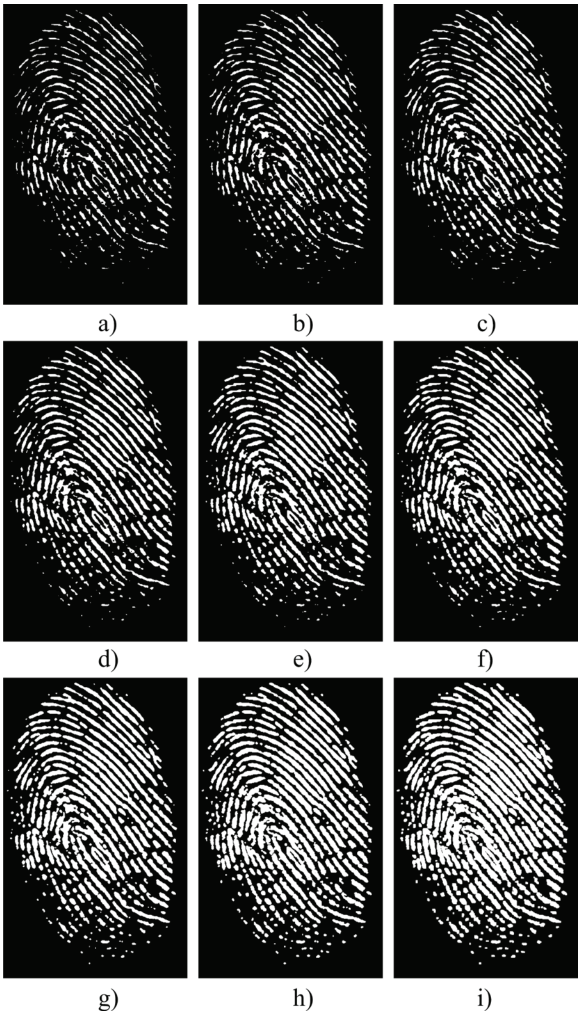

Figura 3 Operación de *k*-erosión con a) *k*=0, b) *k*=1, c) *k*=2, d) *k*=3, e) *k*=4, f) *k*=5, g) *k*=6, h) *k*=7, i) *k*=8

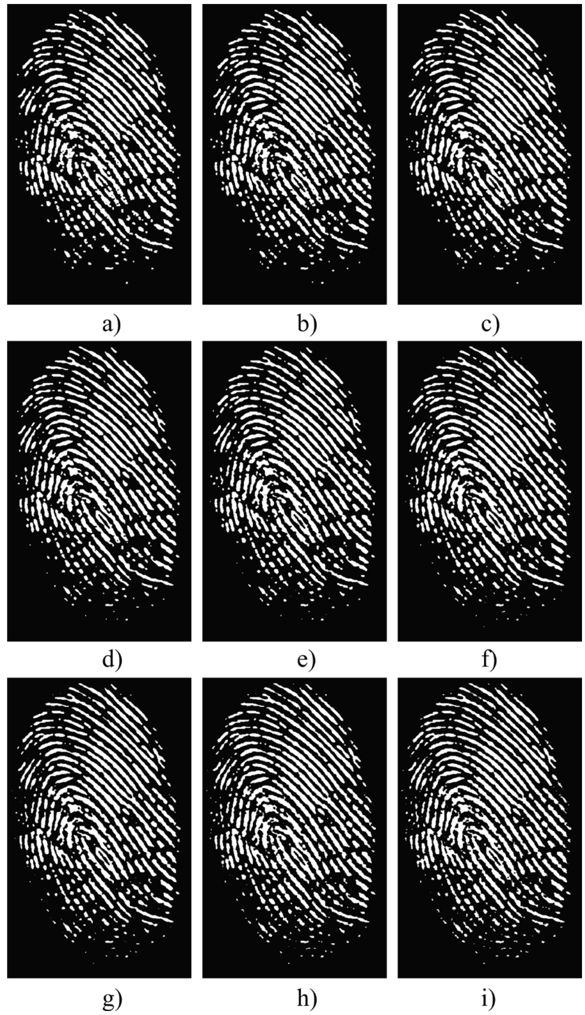

Figura 4 Operación de *k*-apertura con a) *k*=0, b) *k*=1, c) *k*=2, d) *k*=3, e) *k*=4, f) *k*=5, g) *k*=6, h) *k*=7, i) *k*=8

Al comparar todos estos resultados se pueden mencionar algunos aspectos interesantes; uno de ellos puede ser la programación. En otras palabras, no es necesario programar dos algoritmos (uno para la dilatación y otro para la erosión); es suficiente implementar la *k*-dilatación o la *k*-erosión y trabajar con el parámetro *k* para obtener cualquiera de estas dos operaciones (lo mismo sucede para la apertura y cerradura). Lo anterior es un hecho importante si se desean implementar estas operaciones en hardware especializado, debido a que el mismo hardware sirve para dilatar o erosionar y este se puede usar iterativamente para obtener una *k*-apertura o una *k*-cerradura.

Conclusiones

Los operadores *k*-estadísticos son un modelo matemático muy importante en el área del procesamiento de imágenes y en aquellos problemas donde la característica a preservar sea la forma. Aunque las operaciones básicas de erosión, dilatación, apertura y cerradura son modelos que han proporcionado resultados eficientes, estas son superadas por las operaciones desarrolladas en este trabajo; además, en los valores extremos del operador *k*-estadístico se engloban las operaciones básicas de la morfología matemática. Otro aspecto importante es que se pueden generar versiones variadas de erosión y dilatación, por ende apertura y cerradura, a partir de un elemento de estructura determinado, con el simple hecho de variar la cardinalidad que se desea que se dilate o erosione (número de elementos). En términos generales se puede concluir que al utilizar un operador *k*-estadístico se tienen las siguientes ventajas sobre las operaciones básicas de la morfología matemática:

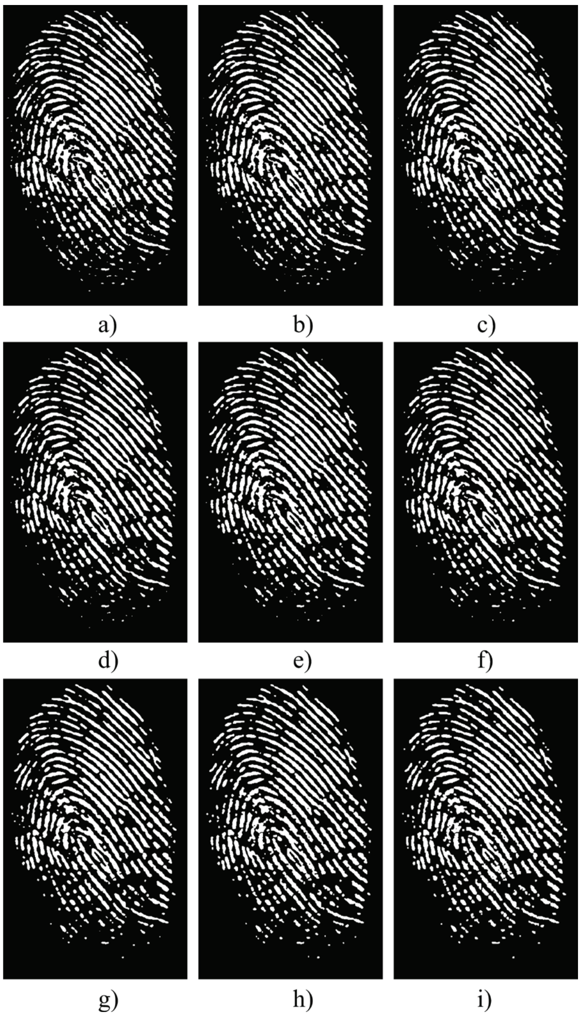

Figura 5 Operación de *k*-cerradura con a) *k*=0, b) *k*=1, c) *k*=2, d) *k*=3, e) *k*=4, f) *k*=5, g) *k*=6, h) *k*=7, i) *k*=8

a) Se presentan operadores que no sólo dependen de la forma, sino también de la probabilidad (eventos) de intersección.

b) Cada operador *k*-estadístico es un conjunto funcionalmente completo.

c) Se tienen una familia de *k*-erosiones o *k*-dilataciones para cada elemento de estructura donde el *k* es la cardinalidad del conjunto del elemento de estructura.

d) Se tiene una mayor flexibilidad al momento de seleccionar un crecimiento o un decrecimiento de la imagen original, i.e., al variar el parámetro *k*.

e) Dado que la apertura y cerradura son los filtros morfológicos más simples de la morfología matemática, entonces se pueden obtener k^2 filtros diferentes, que de acuerdo a la selección del valor de *k* es el detalle del filtro sobre la imagen original.

f) Al tener un operador *k* estadístico, se tiene las dos operaciones básicas (dilatación y erosión), por lo que solo es necesario implementar un algoritmo para estas dos operaciones.

g) Como consecuencia del inciso d) si se desea implementar de manera física, es decir, en hardware, la densidad aritmética disminuye notablemente.

h) Con base en los operadores propuestos en este trabajo se pueden generar más operadores *k*-estadísticos de utilidad en la morfología matemática, sin mucho esfuerzo.

Referencias

1. J. L. Díaz de León, C. Yañez. *Introducción a la morfología matemática de conjuntos*. Instituto Politécnico Nacional, Universidad Nacional Autónoma de México. Fondo de cultura económica. 2003. pp. 191-199

2. J. Serra. *Image analysis and mathematical morphology*. Vol. 1. Academic Press. New York. 1982. pp. 1-100.

3. A. Gamino *Operaciones morfológicas rápidas por descomposición del elemento de estructura mediante discos*". Tesis de maestría. CINVESTAV-IPN.2002. pp. 1-6.41-52.

4. H. Minkowski. "Volumen and Oberfläche". *Math. Ann.* Vol. 57. 1903. pp. 447-495.

5. H. Hadwiger. *Vorslesunger über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Ed. Springer. Berlín. 1957. pp. 401-441.

6. J. L. Díaz de León. *Algoritmos de esqueletización de imágenes digitales binarias*. Tesis de maestría. CINVESTAV-IPN. 1993. pp. 1-15.

7. J. L. Díaz de León. *Morfología matemática basada en espacios métricos de combinación lineal.* Tesis de doctorado. CINVESTAV-IPN. 1996. pp. 1-21.

8. J. L. Díaz de León, H. Sossa. "Mathematical morphology on linear combined metric spaces on Z^2: Part I". *Journal of mathematical imaging and vision.* Vol. 12. 2000. pp. 137-154.

9. J. L. Díaz de León, H. Sossa. "Mathematical morphology on linear combined metric spaces on Z^2: Part II". *Journal of mathematical imaging and vision*. Vol. 12. 2000. pp. 155-168.

10. O. Cuisenaire, B. Macq. "Fast euclidean morphological operator using local distance transformation by propagation". *IPA 99-7th conference on image processing and its applications*. Manchester. U.K. 1999. pp. 856-860.

11. M. V. Droogenbroeck. "Algorithms for openings of binary and label images with rectangular structuring elements". *Mathematical Morphology*. H. Talbot, R. Beare (editors). Ed. Csiro publishing. Sidney. Australia. 2002. pp. 197-207.

12. M. V. Droogenbroeck, H. Talbot. "Fast computation of morphological operatorations with arbitrary structuring elements". *Pattern recognition letters.* Vol. 17. 1996. pp. 1451-1460.

13. I. Ragnelmam. "Fast erosion and dilatation by contour processing and thresholding of distance maps". *Pattern recognition letters.* Vol. 13. 1992. pp. 161-166.

14. J. L. Van Vliet, B. J. Verwer. "A contour processing method for fast binary neighborhood operations". *Pattern recognition letters.* Vol 7. 198. pp. 27-36.

15. L. Vincent. "Morphological transformations of binary images with arbitrary structuring elements". *Signal processing*. Vol. 22. 1991. pp. 3-23.

16. G. Matheron. *Random sets and integral geometry.* Wiley. New York. 1975. pp. 844-847.

17. J. Ángulo. "Morphological colour operators in totally ordered lattices based on distances: Application to image filtering, in enhancement and analysis". *Computer Vision & Image Understanding*. Vol. 107. 2007. pp. 56-73.

18. H. Talbot, B. Appleton. "Efficient complete and incomplete path openenings and closings". *Image & Vision Computing.* Vol. 25. April 2007. pp. 416-425.