

Evaluación de Tecnología utilizando TOPSIS en Presencia de Multi-colinealidad en Atributos: ¿Por qué usar distancia de Mahalanobis?

Evaluation of Technology using TOPSIS in Presence of Multi-collinearity in Attributes: Why use the Mahalanobis distance?

Rodrigo Villanueva Ponce, Jorge Luis García Alcaraz*

Instituto de Ingeniería y Tecnología. Departamento de Ingeniería Industrial y Manufactura. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Av. del Charro norte #450. Col. Partido Romero. C.P. 32360. Cd. Juárez, Chih, México.

(Recibido el 2 de mayo de 2012. Aceptado el 2 de mayo de 2013)

Resumen

Este artículo justifica matemáticamente el mejoramiento a la técnica multi-criterio TOPSIS (Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution), la cual utiliza la distancia Euclidiana al evaluar un conjunto de alternativas, la cual asume independencia entre los atributos de dicha opción, algo que frecuentemente no se cumple. Se demuestra como matemáticamente la distancia Mahalanobis integra la dependencia lineal entre los atributos de las alternativas evaluadas, además se presentan dos casos de estudio en los que se realizan evaluaciones con ambas distancias, encontrándose diferencias en las soluciones obtenidas.

----- *Palabras clave:* Técnicas multi-atributos, inversión en Tecnologías para la Manufactura Avanzada (TMA), TOPSIS, distancia Euclidiana (DE), distancia Mahalanobis (DM)

Abstract

This paper validates mathematically an improvement to the multi-criteria technique TOPSIS, (Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution) which traditionally uses the Euclidean distance when evaluating a set of alternatives, and assumes that there is independence between the attributes of the alternatives being evaluated, condition that is not always true. This paper demonstrates how the Mahalanobis distance incorporates the linear dependence between the alternative's attributes, and also presents

* Autor de correspondencia: teléfono + 52 + 656 + 688 4443, fax + 52 + 656 + 688 48 47, correo electrónico: al118908@alumnos.uacj.mx (R. Villanueva)

two cases of study in which evaluations are performed with both distances, finding differences in proposed solutions.

----- *Keywords:* Multi-attribute techniques, Technology for Advance Manufacturing (TAM) investment, TOPSIS, Euclidean distance, Mahalanobis distance

Introducción

La competitividad actual entre empresas manufactureras ha hecho que éstas inviertan en Tecnologías para la Manufactura Avanzada (TMA) para poder alcanzar calidad y precios competitivos en los productos. Las inversiones en TMA ofrecen beneficios operativos, económicos y proporcionan ventajas competitivas a las empresas que las instituyen [1].

Sin embargo, las empresas que han decidido invertir en TMA se enfrentan muy frecuentemente a problemas cuando tienen que elegir una alternativa u opción que cumpla con ciertas características requeridas para solventar una necesidad dentro de la empresa, por ejemplo, al elegir una máquina, herramientas, proveedores etc. Las características que se toman en cuenta de una alternativa se denominan atributos tales como la calidad, el costo, la velocidad, tiempo de entrega, los servicios post-venta de un producto, entre otros. Algunos autores dividen las características de las TMA en dos grupos; cualitativos y cuantitativos [2 - 4]. Para ayudar a las compañías en esta actividad de selección existen técnicas, modelos y metodologías, las cuales se clasifican en: Económicas, Estratégicas y Analíticas [5].

Las técnicas estratégicas están íntimamente relacionadas con la visión y misión de la empresa. Las económicas, tienen una perspectiva totalmente financiera y no integran atributos cualitativos durante los procesos de evaluación. Las técnicas analíticas, integran en la evaluación los dos tipos de atributos; cualitativos y cuantitativos, además de que tienen un enfoque multi-criterio y multi-atributos, estas técnicas son más complejas que las económicas, ya que analizan mayor información incluyendo

incertidumbre y sus consecuencias por lo que son más realistas [6-8].

Es importante señalar que para una empresa es importante integrar los atributos cualitativos y cuantitativos, ya que como menciona [9-11], si no se integran estos dos tipos de atributos en el análisis, es muy probable que se presenten problemas en la implementación de algún proceso, tecnología o método provocando pérdidas de inversión.

Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS) es un ejemplo de técnica analítica empleada en la toma de decisiones o en procesos de selección. Se enfoca en buscar la Distancia Euclidiana (DE) más corta a una alternativa considerada ideal y lo más lejana a otra alternativa considerada anti-ideal [12,13], en otras palabras la técnica define un índice de similitud (o de proximidad relativa) que se construye combinando un índice de cercanía al ideal.

Esta técnica puede ser empleada en diversos campos donde se presente un problema de selección, por ejemplo; se ha utilizado en procesos de administración de recursos humanos [14], así como también en selección de sistemas de transporte [15], incluso en la selección de diseños y prototipos [16], en procesos de manufactura [17], en administración de sistemas de distribución de agua [18], e inclusive para definir la localización de una planta industrial [19].

En la industria manufacturera en específico, se ha encontrado que se ha empleado en la selección de procesos de producción [20], se ha utilizado en selección de materiales para un nuevo diseño [21], para la selección de niveles ideales de inventario [22], ha sido usada para selección de materiales en

un diseño secundario [23], ha integrado aspectos de incertidumbre mediante lógica difusa [24], en la selección de materiales que sean más fáciles de manejar durante la manufactura [25], en selección de prototipos rápidos [26], en selección de robots de ensamble en una empresa automotriz [27], e incluso en selección de procesos de manufactura no tradicionales [1, 28].

El uso de esta técnica es ampliamente difundido y se pueden nombrar muchos casos; por ejemplo, en una búsqueda rápida de la base de datos de Science Direct se encontraron 24 artículos en los que se usa TOPSIS en el año 2012, 46 en el año 2011, 19 en 2010 y 20 en el año 2009. Estos números indican sin lugar a dudas que la técnica TOPSIS es ampliamente aceptada en los procesos de decisión multi-atributos.

Sin embargo, la técnica TOPSIS tradicional hace uso de la DE, la cual considera independencia entre los atributos, es decir, no toma en cuenta la correlación que puede existir entre éstos, de tal manera que evaluar casos donde la presencia de multi-colinealidad de los atributos existe, puede llevar a tomar decisiones incorrectas. Es aquí donde este artículo propone una forma alterna de aplicar esta técnica de selección al integrar la Distancia Mahalanobis (DM) en sustitución de la DE, especialmente cuando se tenga colinealidad entre los atributos, ya que ésta distancia integra el índice de correlación que existe entre éstos.

El Enfoque Matricial en Evaluación Multi-atributos

Durante un proceso de decisión se deben de determinar los atributos que serán evaluados en cada una de las alternativas. Supóngase que existen K Tecnologías para la Manufactura Avanzada (TMA) y que se debe seleccionar la mejor de éstas tomando en cuenta los atributos cualitativos (subjetivos) y cuantitativos (objetivos), que a continuación se definen.

De manera genérica, considérese un problema de selección de tecnología donde se han definido un grupo de atributos; objetivos J y subjetivos L .

Los J atributos objetivos se expresan por $X_1, X_2, \dots, X_J$, y los L atributos subjetivos se expresan por $X_{J+1}, X_{J+2}, \dots, X_{J+L}$.

Los valores asignados a los atributos objetivos para el proceso de selección de una alternativa son proporcionados por el encargado de definir la TMA, que regularmente son aspectos relacionados con costos, características propias de la tecnología e ingeniería, etc. En este trabajo se representan las alternativas a seleccionar como $A_1, A_2, \dots, A_k$ y los valores asignados de dichas alternativas se muestran en una matriz de valores objetivos (VO), representada por la ecuación (1).

$$VO = \begin{matrix} & \begin{matrix} A^1 & A^2 & \dots & A^k \end{matrix} \\ \begin{matrix} X^1 \\ X^2 \\ \dots \\ X^J \end{matrix} & \begin{bmatrix} X^1_1 & X^1_2 & \dots & X^1_J \\ X^2_1 & X^2_2 & \dots & X^2_J \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X^k_1 & X^k_2 & \dots & X^k_J \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

Donde:

X^k_j es el valor del atributo X_j para el proceso y A^k para $k= 1, \dots, K$ y $j = 1, \dots, J$.

Para asignar valores a los atributos subjetivos para la selección del proceso o TMA se pide a un grupo de expertos que asignen una calificación según su juicio y se toma el valor promedio de cada atributo. Los expertos generalmente son personas relacionadas con la TMA y que cuentan con un amplio conocimiento del área, algunas veces pueden ser gerentes de los diversos departamentos dentro de la compañía, quienes conocen aspectos estratégicos, técnicos y operativos.

Defínase como P a los expertos que son invitados a formar un comité multidisciplinario para calificar la TMA con respecto a cada uno de los atributos subjetivos en las K alternativas. Los expertos dictaminan su juicio sobre el atributo en la alternativa asignando una calificación entre 1 y 9, siendo el número 1 la más baja calificación y el 9 la más alta [1]. Este tipo de escala es muy recomendada por su facilidad de manejo y porque ha sido empleada por otros investigadores

[29]. Una matriz de valores subjetivos (**VS**) se construye por cada uno de los P expertos del grupo de decisión y es mostrada en la ecuación (2).

$$VS^p = \begin{bmatrix} A_1 & X^{1p}_{J+1} & X^{1p}_{J+2} & \dots & X^{1p}_{J+L} \\ A_2 & X^{2p}_{J+1} & X^{2p}_{J+2} & \dots & X^{2p}_{J+L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_K & X^{Kp}_{J+1} & X^{Kp}_{J+2} & \dots & X^{Kp}_{J+L} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Las matrices VS^p que proveen los P expertos se suman término a término, generando una matriz total, donde cada uno de sus elementos es dividido por el valor P (número de expertos), obteniéndose así el juicio promedio. Así, la matriz de valores subjetivos total denominada **VST**, se determina mediante la ecuación (3).

$$VST = \sum_{p=1}^P VS^p / P = \begin{bmatrix} A_1 & X^1_{J+1} & X^1_{J+2} & \dots & X^1_{J+L} \\ A_2 & X^2_{J+1} & X^2_{J+2} & \dots & X^2_{J+L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_K & X^K_{J+1} & X^K_{J+2} & \dots & X^K_{J+L} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Donde $x^k_{J+i} = \frac{\sum_{p=1}^P x^{kp}_{J+i}}{P}$ para $k=1, \dots, K$, $i=1, \dots, L$ es la calificación promedio de los P expertos para la alternativa A^k con respecto al atributo subjetivo X_{J+i} .

Al integrar la matriz de valores objetivos y la de valores subjetivos en una sola, se construye la matriz de decisión final (MDF) que sirve de base para el proceso de decisión, tal como se señala en la ecuación (4).

$$MDF = [VO, VST] = \begin{bmatrix} A^1 & x^1_1 & \dots & x^1_J & x^1_{J+1} & \dots & x^1_{J+L} \\ A^2 & x^2_1 & \dots & x^2_J & x^2_{J+1} & \dots & x^2_{J+L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^K & x^K_1 & \dots & x^K_J & x^K_{J+1} & \dots & x^K_{J+L} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Técnica Multi-criterio TOPSIS

La técnica TOPSIS se basa en que representa a las alternativas a evaluar como puntos en un espacio

euclidiano $J+L$ -dimensional; así, seleccionando la alternativa que tiene la menor distancia a una alternativa ideal, y al mismo tiempo tiene la mayor distancia a otra alternativa anti-ideal.

Entonces, siendo que la alternativa A^k es un vector en el espacio euclidiano, puede ser representada de acuerdo a la ecuación (5).

$$A^k = (x^k_1, \dots, x^k_{J+L}) \text{ para } k=1, 2, \dots, K \quad (5)$$

A cada alternativa le corresponde un punto en el espacio $J+L$ -dimensional, similarmente, el atributo x -ésimo se representa como un vector en el espacio k -dimensional mostrado en la ecuación (6).

$$X_n = (x^1_n, \dots, x^k_n) \text{ para } n=1, 2, \dots, K \quad (6)$$

En la técnica TOPSIS se le llama solución o alternativa ideal a una alternativa hipotética que se genera con las mejores características en los atributos, y está dada por la ecuación (7), así mismo, la alternativa compuesta por todos los valores nominales no deseados de los atributos se le denomina solución o alternativa anti-ideal y está representada por la ecuación (8).

$$A^+ = (x^+_1, x^+_2, \dots, x^+_{J+L}) \quad (7)$$

$$A^- = (x^-_1, x^-_2, \dots, x^-_{J+L}) \quad (8)$$

Aplicación TOPSIS

En esta sección se describen los pasos a seguir para utilizar TOPSIS en un proceso de toma de decisión.

Los atributos a evaluar en un proceso de decisión pueden llegar a tener diferentes escalas de medición, un ejemplo puede ser la capacidad de carga de un tractor y su velocidad, ambos atributos definen al elemento pero presentan diferentes unidades de medida y es por esta razón que como primer paso se debe normalizar cada vector X_n de los atributos evaluados convirtiéndolos en TX_n , según la ecuación (9).

$$TX_n = \frac{X_n}{\|X_n\|} = \left(\frac{x_n^1}{\|X_n\|}, \dots, \frac{x_n^k}{\|X_n\|} \right) \quad (9)$$

Dónde $\|X_n\|$, constituye la norma del vector de cada atributo. Desarrollando esta operación los atributos quedarán adimensionales y así se podrán realizar comparaciones entre alternativas. $\|X_n\|$ puede ser obtenida según la ecuación (10).

$$\|X_n\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} \quad (10)$$

En términos generales, la ecuación (11) representa la normalización de los atributos de las alternativas siendo evaluadas, así mismo la ecuación (12) y (13) muestran a la alternativa ideal y anti-ideal, respectivamente.

$$TA^k = (t_1^k, \dots, t_n^k) = \left(\frac{x_1^k}{\|X_1\|}, \dots, \frac{x_n^k}{\|X_n\|} \right) \quad (11)$$

$$TA^+ = (t_1^+, \dots, t_n^+) = \left(\frac{x_1^+}{\|X_1\|}, \dots, \frac{x_n^+}{\|X_n\|} \right) \quad (12)$$

$$TA^- = (t_1^-, \dots, t_n^-) = \left(\frac{x_1^-}{\|X_1\|}, \dots, \frac{x_n^-}{\|X_n\|} \right) \quad (13)$$

Una vez que los atributos son adimensionales, el segundo paso consiste en construir la matriz de decisión normalizada y ponderada utilizando las ecuaciones (14) y (15), donde (w) corresponde a la ponderación de atributos generada por el grupo multidisciplinario de expertos, de tal forma que se calculan las distancias euclidianas de cada alternativa hacia la solución ideal y anti-ideal. Esto es debido a que casi nunca se tienen los mismos niveles de importancia para los atributos.

$$\rho(A^k, A^+) = \|w * (TA^k - TA^+)\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{J+1} w_n * (t_1^k, \dots, t_n^k)^2} \quad (14)$$

$$\rho(A^k, A^-) = \|w * (TA^k - TA^-)\| = \sqrt{\sum_{n=1}^N w_n * (t_1^k, \dots, t_n^-)^2} \quad (15)$$

Con las distancias entre cada alternativa y la ideal positiva e ideal negativa, entonces se calcula la separación relativa de cada alternativa a la solución ideal positiva mediante la ecuación (16).

$$RC(A^+, A^-) = \frac{\rho(A^k, A^+)}{\rho(A^k, A^+) + \rho(A^k, A^-)} \quad (16)$$

Finalmente, se procede a la selección de la mejor opción, que en este caso TOPSIS la define como la alternativa que contenga el menor índice de cercanía RC (A^k, A^+) calculado.

Mejoramiento de la técnica TOPSIS mediante correlación de atributos

La técnica TOPSIS presenta una deficiencia al utilizar la DE, ya que no integra la colinealidad que puede existir entre los atributos, esta condición puede ser anulada si se incorpora la dependencia entre éstos, por lo que en esta sección se presenta una descripción de los conceptos que intervienen en el mejoramiento de la técnica TOPSIS, justificando la integración de la DM.

Distancia Euclidiana

La fórmula de la distancia Euclidiana para el caso supuesto en que se tienen solamente dos atributos en la evaluación [30, 31], es representada en la ecuación (17) y se basa en la raíz cuadrada de la magnitud del vector diferencia al cuadrado.

$$d_E(x, y) \equiv \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (17)$$

Se puede también decir que la misma fórmula se aplica cuando se presentan $J+L$ atributos de un conjunto de alternativas en evaluación. Recuerdese que la distancia Euclidiana sirve para medir las distancias entre las alternativas (ideal y anti-ideal) en la técnica TOPSIS tradicional, considerando que éstos no presentan correlación.

Distancia Mahalanobis

La distancia Mahalanobis sirve para determinar la similitud entre dos variables aleatorias multidimensionales y difiere de la distancia Euclidiana en el sentido de que ésta si considera la correlación entre los atributos. Entonces, la distancia Mahalanobis considera la dispersión de las variables y su dependencia [30-32], medida por el coeficiente de correlación [33, 34].

La distancia Mahalanobis se define según la ecuación (18) [35].

$$d_M(\vec{x}, \vec{y}) \equiv \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^T C_X^{-1} (\vec{x} - \vec{y})} \quad (18)$$

Donde se muestran dos variables aleatorias con la misma distribución de probabilidad $\vec{x}$ y $\vec{y}$ con matriz de covarianza C_X .

Colinealidad y Correlación

Cuando dos o más atributos se encuentran interrelacionadas se determina que éstos presentan colinealidad, es decir, que uno explica al otro. Para determinar si un grupo de atributos presenta colinealidad entre ellos se pueden aplicar varias técnicas entre las que cabe mencionar; la matriz de correlación de atributos, los factores de inflación de la varianza, la matriz de gráficos de dispersión y los números de condición [36-38].

Matriz de Correlación de atributos

En una matriz de correlación, se presentan valores entre [-1, 1], mientras más cerca se esté de éstos es más firme asegurar que existe una fuerte colinealidad entre atributos. Cuando la matriz de correlación resulta ser la matriz identidad, se entiende que existe independencia entre los atributos [39]; sin embargo, difícilmente se observa ese tipo de comportamiento en un grupo de atributos.

Factores de Inflación de la Varianza (FIV)

La determinación de los factores de inflación de la varianza es otra técnica frecuentemente usada para la obtención de la colinealidad mostrada en la ecuación [19]. Donde R_j^2 es el coeficiente de determinación del atributo j sobre los demás en una regresión lineal múltiple. Se sugiere que valores mayores a 10 en los FIV indican fuerte colinealidad en los datos [40]. En la actualidad muchos paquetes estadísticos como NCSS, SPSS y Minitab pueden estimar estos valores.

$$FIV_j = \frac{1}{(1 - R_j^2)} \quad (19)$$

Gráficos de Dispersión

Para determinar la colinealidad se grafican de manera matricial cada uno de los atributos, permitiendo observar patrones de alineación de una forma visual. Esta técnica permite fácilmente determinar si un atributo a evaluar tiene un alto nivel de correlación con otro.

Números de Condición

Los números de condición se estiman mediante el análisis del eigensistema de la matriz $X^T X$ de los atributos siendo evaluados. Se estiman mediante los eigenvalores de la matriz de correlaciones. Los números de condición para cada variable son la razón del eigenvalor perteneciente a la variable o atributo dividido entre el mínimo eigenvalor encontrado en todas las variables o atributos. De esta forma, habrá un número de condición con valor de uno y otro que se refiera a la razón de cambio del máximo entre el mínimo, obteniendo así el máximo número de condición [41]. Si alguno de los números de condición es mayor que 1000, se concluye que existe multi-colinealidad. La ecuación (20) define la estimación del máximo valor.

$$\eta = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (20)$$

Donde:

η = Número de condición

$\lambda_{\max}$ = Máximo eigenvalor

$\lambda_{\min}$ = Mínimo eigenvalor

Incorporación de la distancia Mahalanobis en la técnica TOPSIS.

Para calcular la distancia Mahalanobis, se estima la matriz de varianza-covarianza C_X , mediante la ecuación (21), ligada a la ecuación (18).

$$C_X \equiv \frac{1}{(n-1)} (X_c)^T (X_c) \quad (21)$$

Donde:

n = número de alternativas en evaluación.

X_c = la matriz de datos centrados de las alternativas para todos los atributos $X_{ci} = (X_i - \bar{X})$.

La ecuación (22) muestra un caso donde se evalúan dos atributos en un conjunto de alternativas y se genera la matriz de varianza-covarianza [38].

$$C_x \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Donde:

σ_1^2 y σ_2^2 son las varianzas de los atributos respectivos de X_1 y X_2 .

$\sigma_1\sigma_2$ es la covarianza entre los dos atributos.

ρ_{12} es el coeficiente de correlación entre los dos atributos.

La distancia Mahalanobis de una alternativa hacia la ideal queda expresada mediante la ecuación (23) y a la anti-ideal por la ecuación (24).

$$DM_i \equiv \sqrt{(x_i - x_+) C_x^{-1} (x_i - x_+)^T} \quad (23)$$

$$DM_i \equiv \sqrt{(x_i - x_-) C_x^{-1} (x_i - x_-)^T} \quad (24)$$

Donde:

x_i es el vector que representa a la alternativa en evaluación

x_+ es el vector que representa a la alternativa ideal

x_- es el vector que representa a la alternativa anti-ideal

$(x_i - x_+)$ es el vector diferencia entre la alternativa en evaluación y la ideal

C_x^{-1} es la matriz inversa de varianza la cual no debe de ser singular para garantizar su uso en los cálculos en (23) y (24).

La singularidad de la matriz de la ecuación (21) y (22) puede ser fácilmente probada mediante la estimación de su determinante, ecuación (25) donde se obtiene la inversa por el método de la matriz adjunta, cada elemento está dividido por dicho determinante y si éste es igual a cero, entonces la operación no está definida y por lo tanto la matriz inversa no existe.

$$C_x^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2^2}{\det(C_x)} & \frac{-\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\det(C_x)} \\ \frac{-\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\det(C_x)} & \frac{\sigma_1^2}{\det(C_x)} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Donde:

$\det(C_x) = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho_{12}^2)$ es el determinante de la matriz de varianzas-covarianzas de la ecuación (22).

Con la finalidad de demostrar la relación que existe entre la distancia Mahalanobis y la distancia Euclidiana y por fines de parsimonia, se demuestra su equivalencia para dos atributos solamente, X_1 y X_2 , lo cual puede ser generalizado para $J+L$ atributos. Los primeros dos términos de la raíz de las ecuaciones (23) y (24) pueden ser representados mediante (26).

$$[(x_1 - x_{id1})(x_2 - x_{id2})] C_x^{-1} \quad (26)$$

Sustituyendo el valor de C_x^{-1} por (25) se obtiene la ecuación (27).

$$\left[\frac{\sigma_2^2 (x_1 - x_{id1})^2 - (x_2 - x_{id2})(x_1 - x_{id1})\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\det(C_x)} \quad \frac{\sigma_1^2 (x_2 - x_{id2})^2 - (x_1 - x_{id1})(x_2 - x_{id2})\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\det(C_x)} \right] \quad (27)$$

Al ingresar el tercer término de la ecuación de la DM, se obtiene la ecuación (28).

$$[(x_1 - x_{id1})(x_2 - x_{id2})] C_x^{-1} \begin{bmatrix} (x_1 - x_{id1}) \\ (x_2 - x_{id2}) \end{bmatrix} \quad (28)$$

Desarrollando estas ecuaciones matemáticamente y realizando la factorización correspondiente se llega a la ecuación (29):

$$MD_i = \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_{id1}}{\sigma_1}\right)^2 + \left[\left(\frac{x_2 - \bar{x}_{id2}}{\sigma_2}\right)^2 - \rho_{12}\left(\frac{x_1 - x_{id1}}{\sigma_1}\right)\right]\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}\right)^2} \quad (29)$$

Se puede apreciar que el segundo término del binomio al cuadrado incorpora al coeficiente de correlación entre los atributos siendo evaluados, por lo tanto si no existe dependencia entre éstos, ($\rho_{12} = 0$) la ecuación se reduce a la expresión de la distancia Euclidiana estandarizada.

En caso contrario, cuando existe correlación entre estos ($\rho_{12} \neq 0$), será incluida a través de la distancia Mahalanobis, provocando que la técnica TOPSIS se vuelva estadísticamente más fuerte.

Casos de Estudio

En esta sección se presentan dos casos de estudio donde se compara la técnica TOPSIS utilizando la distancia Euclidiana y la distancia Mahalanobis.

Caso 1

Una empresa del sector electrónico, tiene la necesidad de adquirir una nueva Insertadora de terminales y dispositivos para una tablilla de circuitos integrados y así solventar la capacidad de producción recientemente incrementada por su cliente principal.

Existen catorce diferentes tipos de insertadoras de las cuales se debe escoger solo una y se consideran cuatro atributos de evaluación; Costo del equipo (X_1) y es medido en unidades monetarias, Velocidad de inserción (X_2) y es medido en piezas por segundo insertadas, Precisión (X_3) y es medido en milímetros y finalmente, Flexibilidad (X_4), el cual es medido en número de piezas que puede manejar. Todos estos atributos cuantitativos.

La matriz de decisión final se muestra en la tabla 1 y se aprecian la alternativa ideal (A+) y anti-ideal (A-) generadas a partir del grupo de características a elegir, y también se indica la ponderación en el último renglón (w).

Tabla 1 Matriz de Decisión Final

<i>Insertadora de Terminales</i>	<i>Costo (X_1)</i>	<i>Velocidad (X_2)</i>	<i>Repetitividad (X_3)</i>	<i>Flexibilidad (X_4)</i>
I_1	30	2,7	0,15	140
I_2	34	1,5	0,16	120
I_3	62	3	0,09	180
I_4	44	1,1	0,11	110
I_5	54	1	0,14	130
I_6	67	1,55	0,17	150
I_7	65	0,8	0,1	195
I_8	99	1,05	0,11	120
I_9	48	1,3	0,13	135
I_{10}	48,8	1,35	0,16	155
I_{11}	59	1,65	0,17	160
I_{12}	48	1,25	0,12	150
I_{13}	23	1,2	0,14	124
I_{14}	14	0,76	0,16	160
A+	14	3	0,09	195
A-	99	0,76	0,17	110
w	0,250	0,256	0,236	0,256

Los resultados obtenidos de las evaluaciones realizadas mediante la técnica TOPSIS empleada de forma tradicional (distancia Euclidiana) y de forma alterna (distancia Mahalanobis) se listan en la tabla 2. Los números entre corchetes expresan el orden de preferencia de selección.

Tabla 2 Resultados Obtenidos por Ambos Métodos

<i>Alternativa</i>	<i>TOPSIS con distancia Euclidiana</i>			<i>TOPSIS con distancia de Mahalanobis</i>		
	$\rho(A^+, A^k)$	$\rho(A^-, A^k)$	$RC(A^+, A^k)$	$\rho(A^+, A^k)$	$\rho(A^-, A^k)$	$RC(A^+, A^k)$
I_1	0,0444	0,1215	0,2676 [1]	5,536	5,256	0,5129 [2]
I_2	0,0844	0,0872	0,4919 [5]	6,083	4,7	0,5641 [11]
I_3	0,0600	0,1184	0,3363 [2]	6,031	4,779	0,5579 [9]
I_4	0,0995	0,0750	0,5700 [9]	5,891	4,876	0,5471 [6]
I_5	0,1072	0,0592	0,6441 [13]	5,983	4,78	0,5558 [8]
I_6	0,1005	0,0558	0,6428 [12]	6,102	4,671	0,5664 [12]
I_7	0,115	0,0662	0,6346 [11]	5,893	4,909	0,5455 [5]
I_8	0,1403	0,0304	0,8216 [14]	6,305	4,491	0,5840 [13]
I_9	0,0916	0,0709	0,5634 [7]	6,042	4,716	0,5616 [10]
I_{10}	0,0916	0,0708	0,5641 [8]	6,345	4,419	0,5894 [14]
I_{11}	0,0904	0,0672	0,5735 [10]	5,701	5,105	0,5275 [4]
I_{12}	0,0907	0,0730	0,5538 [6]	5,659	5,103	0,5258 [3]
I_{13}	0,0888	0,0975	0,4766 [3]	5,511	5,265	0,5114 [1]
I_{14}	0,1039	0,1082	0,4898 [4]	6,019	4,849	0,5538 [7]

Se puede observar que al aplicar TOPSIS empleando la distancia Euclidiana la selección a tomar es la insertadora I_1 , ya que el índice de cercanía es de 0,2676, a su vez aplicando la técnica con la distancia Mahalanobis muestra que se debe de seleccionar la insertadora I_{13} , ya que tiene un índice de cercanía de 0.5114. Se observa que en función de la distancia que se empleé, se obtienen diferentes soluciones al mismo problema de selección.

Caso 2

En una empresa del rango automotriz se tiene la tarea de evaluar a 8 proveedores de asientos para una nueva línea de automóviles. Los atributos a evaluar son los siguientes; Costo del producto (X_1), medido en unidades monetarias; Tiempo de entrega (X_2), medido en días y por último, el Nivel de Calidad (X_3), medido en porcentaje de rechazos.

La matriz de decisión se muestra en la tabla 3 en la cual se determinaron las alternativas ideal (A^+) y anti-ideal (A^-) del grupo de características a elegir, así mismo se muestra la ponderación indicada en el último renglón (w).

Tabla 3 Matriz de Decisión Final

<i>Proveedor de Asientos</i>	<i>Costo (X_1)</i>	<i>Tiempo de entrega (X_2)</i>	<i>Calidad (X_3)</i>
P_1	9264	120	48,05
P_2	9354	118	19,65
P_3	9360	115	35,05
P_4	9307	118	35,85
P_5	9304	121	33,55
P_6	9323	118	35,05
P_7	9266	121	35,05
P_8	9269	119	35,85
A^+	9264	115	19,65
A^-	9360	115	48,05
w	0,33	0,33	0,33

Los resultados obtenidos de las evaluaciones realizadas mediante la técnica TOPSIS empleada de forma tradicional (distancia Euclidiana) y de forma alterna (distancia Mahalanobis) se listan en la tabla 4. Los números entre corchetes expresan el orden de preferencia, es decir, de selección.

Tabla 4 Resultados Obtenidos por Ambos Métodos

Alternativa	TOPSIS con distancia Euclidiana			TOPSIS con distancia de Mahalanobis		
	$\rho(A^+, A^k)$	$\rho(A^-, A^k)$	$RC(A^+, A^k)$	$\rho(A^+, A^k)$	$\rho(A^-, A^k)$	$RC(A^+, A^k)$
P_1	0,0934	0,0015	0,9836 [8]	0.595	1,081	0.3549 [7]
P_2	0,0031	0,0934	0,0326 [1]	0.6535	1,652	0.2833 [5]
P_3	0,0506	0,0431	0,5399 [3]	0.6606	0,8696	0.4317 [8]
P_4	0,0533	0,0402	0,5701 [6]	0.1875	1,232	0.1321 [1]
P_5	0,0461	0,0476	0,4914 [2]	0.6272	1,365	0.3148 [6]
P_6	0,0507	0,0428	0,5421 [4]	0.2145	1,060	0.1682 [2]
P_7	0,0509	0,0427	0,5438 [5]	0.4387	1,637	0.2113 [3]
P_8	0,0534	0,0401	0,5706 [7]	0.6345	1,724	0.2689 [4]

En este segundo caso se aprecia que al aplicar TOPSIS empleando la distancia Euclidiana la selección a tomar es el proveedor P_2 , por tener un índice de cercanía de 0,0326, a su vez aplicando la técnica con la distancia Mahalanobis se puede observar que el resultado difiere seleccionando el proveedor P_4 , ya que tiene un índice de cercanía de 0,1321.

Conclusiones

Como se demostró y ejemplificó en los dos casos de estudio, la incorporación de la correlación mediante la distancia de Mahalanobis en las evaluaciones por medio de TOPSIS genera soluciones diferentes a las propuestas por la técnica original. Al incluir la dependencia de atributos se incrementa el impacto que éstos tienen entre sí, por lo que se concluye que la técnica propuesta es estadísticamente más completa y que los 266 casos reportados por [42] y en los que se ha usado TOPSIS en un proceso de toma de decisiones, podrían haber sido equivocadas.

El coeficiente de correlación hace la diferencia entre la distancia Euclidiana y la de Mahalanobis, en trabajos futuros se reportarán los resultados de simulaciones que se están realizando con matrices generadas aleatoriamente, con diferente número de alternativas y atributos, para determinar bajo qué condiciones se debe usar una u otra distancia.

Referencias

1. C. Parkan, L. Wu. "Decision-making and performance measurement models with applications to robot selection". *Computers & Industrial Engineering*. Vol. 36. 1999. pp. 503-523.
2. C. Hofmann, S. Orr. "Advanced manufacturing technology adoption-the German experience". *Technovation*. Vol. 25. 2005. pp. 711-724.
3. F. Lefley, F. Wharton, L. Hajek, J. Hynek, V. Janecek. "Manufacturing investments in the Czech Republic: - An international comparison". *International Journal of Production Economics*. Vol. 88. 2004. pp. 1-14.
4. S. MacDougall, R. Pike. "Consider your options: changes to strategic value during implementation of advanced manufacturing technology". *Omega*. Vol. 31. 2003. pp. 1-15.
5. M. Small, I. Chen. "Economic and strategic justification of AMT inferences from industrial practices". *International Journal of Production Economic*. Vol. 49. 1997. pp. 65-75.
6. J. Meredith, N. Suresh. "Justification techniques for advanced manufacturing technologies". *International Journal of Production Research*. Vol. 24. 1987. pp. 1043-1057.
7. R. Adler. "Strategic Investment Decision Appraisal Techniques: The Old and the New". *Business Horizons*. Vol. 43. 2000. pp. 15-22.
8. M. Wiecek, E. Matthias, G. Fadel, J. Ruiz. "Multiple criteria decision making for engineering". *Omega*. Vol. 36. 2008. pp. 337-339.
9. R. Yusuff, M. Hashmib. "A preliminary study on the potential use of the analytical hierarchical process (AHP) to predict advanced manufacturing technology

- (AMT) implementation". *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. Vol. 7. 2001. pp. 421-427.
10. B. Ahn, K. Park. "Comparing methods for multi-attribute decision making with ordinal weights". *Computers and Operations Research*. Vol. 35. 2008. pp. 1660-1670.
11. S. Hajkowicz, A. Higgins. "A comparison of multiple criteria analysis techniques for water resource management". *European Journal of Operational Research*. Vol. 184. 2008. pp. 255-265.
12. Y. Lai, T. Liu, C. Hwang. "TOPSIS for MODM". *European Journal of Operational Research*. Vol. 76. 1994. pp. 486-500.
13. M. Chen, G. Tzeng. "Combining gray relation and TOPSIS concepts for selecting an expatriate host country". *Mathematical and Computer Modelling*. Vol. 40. 2004. pp. 1473-1490.
14. K. Yoon, C. Hwang. "Multiple Attribute Decision Making. An introduction". *Quantitative Applications in the Social Sciences*. Vol. 7-104. 1995. pp. 53-62.
15. M. Janic. "Multicriteria evaluation of high-speed rail, transrapid maglev, and air passenger transport in Europe". *Transportation Planning and Technology*. Vol. 26. 2003. pp. 491-512.
16. C. Kwong, S. Tam. "Case-based reasoning approach to concurrent design of low power transformers". *Journal of Materials Processing Technology*. Vol. 128. 2002. pp. 136-141.
17. A. Milani, A. Shanian, R. Madoliat. "The effect of normalization norms in multiple attribute decision making models: A case study in gear material selection". *Structural Multidisciplinary Optimization*. Vol. 29. 2005. pp. 312-318.
18. B. Srdjevic, Y. Medeiros, A. Faria. "An objective multi-criteria evaluation of water management scenarios". *Water Resources Management*. Vol. 18. 2004. pp. 35-54.
19. K. Yoon, C. Hwang. "Manufacturing plant location analysis by multiple attribute decision making: Part I—single-plant strategy". *International Journal of Production Research*. Vol. 23. 1985. pp. 345-359.
20. R. Rao. "Evaluation of environmentally conscious manufacturing programs using multiple attribute decision-making methods". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers - Part B - Engineering Manufacture*. Vol. 222. 2008. pp. 441-451.
21. R. Rao, J. Davim. "Decision-making framework model for material selection using a combined multiple attribute decision-making method". *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. Vol. 35. 2007. pp. 751-760.
22. A. Bhattacharya, B. Sarkar, S. Mukherjee. "Distance-based consensus method for ABC analysis". *International Journal of Production Research*. Vol. 45. 2007. pp. 3405-3420.
23. R. Prabhakaran, B. Babu, V. Agrawal. "Optimum selection of a composite product system using MADM". *Materials & Manufacturing Processes*. Vol. 21. 2006. pp. 883-891.
24. Y. Deng. "Plant location selection based on fuzzy TOPSIS". *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. Vol. 28. 2006. pp. 839-844.
25. R. Rao. "Machinability evaluation of work materials using a combined multiple attribute decision-making method". *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. Vol. 28. 2006. pp. 221-227.
26. H. Byun, K. Lee. "A decision support system for the selection of a rapid prototyping process using the modified TOPSIS method". *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. Vol. 26. 2006. pp. 1338-1347.
27. O. Ghrayeb, N. Phojanamongkolkij, R. Marcellus, W. Zhao. "A practical framework to evaluate and select robots for assembly operations". *Journal of Advanced Manufacturing Systems*. Vol. 3. 2004. pp. 151-167.
28. M. Yurdakul, C. Çogun. "Development of a multi-attribute selection procedure for non-traditional machining processes". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers -- Part B -- Engineering Manufacture*. Vol. 217. 2003. pp. 993-1009.
29. T. Saaty. "Time dependent decision-making; dynamic priorities in the AHP/ANP: Generalizing from points to functions and from real to complex variables". *Mathematical and Computer Modeling*. Vol. 46. 2007. pp. 860-891.
30. M. Meloun, J. Militky. "Detection of single influential points in OLS regression model building". *Analytica Chimica Acta*. Vol. 439. 2001. pp. 169-191.
31. M. Kiang. "A comparative assessment of classification methods". *Decision Support Systems*. Vol. 35. 2003. pp. 441-454.

32. H. Nocairi, E. Mostafa, E. Vigneau, D. Bertrand. "Discrimination on latent components with respect to patterns. Application to multicollinear data". *Computational Statistics and Data Analysis*. Vol. 48. 2005. pp. 139-147.
33. P. Kovács, T. Petres, L. Tóth. "A New Measure of Multicollinearity in Linear Regression Models". *International Statistical Review*. Vol. 73. 2005. pp. 405-412.
34. W. Hoyt, Z. Imel, F. Chan. "Multiple Regression and Correlation Techniques: Recent Controversies and Best Practices". *Rehabilitation Psychology*. Vol. 53. 2008. pp. 321-339.
35. S. Xiang, F. Nie, C. Zhang. "Learning a Mahalanobis distance metric for data clustering and classification". *Pattern Recognition*. Vol. 41. 2008. pp. 3600-3612.
36. A. Pasini. "A bound for the collinearity graph of certain locally polar geometries". *Journal of Combinatorial Theory, Series A*. Vol. 58. 1991. pp. 127-130.
37. S. Lipovetsky, W. Conklin. "Multiobjective regression modifications for collinearity". *Computers and Operations Research*. Vol. 28. 2001. pp. 1333-1345.
38. D. Montgomery, E. Peck, G. Vining. "Wiley Series in Probability and Statistics Series". *Introduction to linear regression analysis*. 5ª ed. New York. USA. 2012. pp. 167-193.
39. R. Johnson, D. Wichern. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 3ª ed. Ed. Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey, USA. 1992. pp. 512-532.
40. R. Liu, J. Kuang, Q. Gong, X. Hou. "Principal component regression analysis with SPSS". *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. Vol. 71. 2003. pp. 141-147.
41. B. Li, A. Morris, E. Martin. "Generalized partial least squares regression based on the penalized minimum norm projection". *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*. Vol. 72. 2004. pp. 21-26.
42. M. Behzadiana, S. Khanmohammadi, M. Yazdanib, J. Ignatiusc. "A state-of the-art survey of TOPSIS applications". *Expert Systems with Applications*. Vol. 39. 2012. pp 13051–13069.