

Análisis de sensibilidad aplicado a la dinámica de estructuras mediante la modificación de las propiedades inerciales

Sensitivity analysis applied to the dynamics of structures by changing the inertial properties

*Luis Manuel Villa García**

Doctor Ingeniero Industrial, Dpto. de Construcción e Ingeniería de Fabricación, Universidad de Oviedo. CP. 33203. Gijón. España.

(Recibido el 17 de marzo de 2013. Aceptado el 23 de enero de 2014)

Resumen

Dentro de la dinámica de estructuras, el análisis de sensibilidad muestra la forma de alcanzar la modificación más efectiva para conseguir un cambio deseado en el comportamiento estructural.

Generalmente, el modelo modal del que se dispone, posee un limitado número de modos de vibración; aún así, es posible alcanzar una aproximación razonable para estimar las sensibilidades de las frecuencias naturales y de los autovectores.

A lo largo de la exposición del trabajo, se desarrolla una validación experimental de sendas expresiones analíticas para lograr la determinación de las estimaciones de modificación sobre los parámetros modales, es decir, de las estimaciones de la variación de la desviación de frecuencia $\Delta\omega_p$, y del incremento $\Delta\{\psi_i\}$ de las componentes de cada autovector, perteneciente al modo i .

----- *Palabras clave:* Análisis modal operacional, factores de escala, sensibilidad, método del cambio de masa

Abstract

Within the dynamics of structures, sensitivity analysis shows how to achieve the most effective modification to reach a change in the structural behaviour.

Usually, the modal model is available, has a limited number of vibration modes; even so, it is possible to achieve a reasonable approximation to estimate the sensitivities of the natural frequencies and the eigenvectors.

* Autor de correspondencia: teléfono: + 34 + 98 + 5 181 930, fax: + 34 + 98 + 5 182 433, correo electrónico: villa@uniovi.es (L. Villa)

Throughout the exhibition of the work, we develop an experimental validation of both analytical expressions for determining estimates of modification of modal parameters, i.e., estimates of the variation of the frequency deviation $\Delta\omega_p$, and the increase $\Delta\{\psi_i\}$ the components of each eigenvector, belonging to the mode i .

----- **Keywords:** Operational modal analysis, scaling factor, sensitivity, mass-change method

Introducción

La identificación modal es un proceso de estimación de parámetros modales a partir de mediciones de vibración de la estructura en operación, obtenidas en diferentes localizaciones de la misma. Los parámetros modales de la estructura son los modos de vibración (autovectores), las frecuencias naturales (autovalores) y los factores de amortiguamiento de cada modo, que influyen en la respuesta de la estructura en un rango de frecuencias de interés.

En el análisis modal tradicional, los parámetros modales se obtienen por ajuste de Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRF), que relacionan fuerzas de excitación y respuesta en vibración. En el análisis modal operacional, la identificación modal se realiza basándose únicamente en la respuesta en vibración; habitualmente, se aplica en el caso de grandes estructuras civiles y/o estructuras en operación, en las que resulta difícil una excitación artificial, por lo que se aprovecha la excitación natural (viento, tráfico, olas...) a la que se encuentran sometidas. En definitiva, se trata de cargas que no pueden ser fácilmente controladas y medidas. Sin embargo, los modos de vibración que se obtienen del análisis modal operacional, no están escalados, por lo que es necesario un método adicional para calcular los factores de escala.

La utilidad del análisis de sensibilidad radica en determinar la localización más efectiva para un cambio estructural determinado. Da una primera estimación de la magnitud de modificación necesaria (masa, rigidez o amortiguamiento) para alcanzar un cambio deseado en el comportamiento estructural [1-3]. Sin embargo, sus predicciones

se limitan a un primer orden de aproximación, por lo que se pueden considerar exactas solamente para pequeños cambios [4].

En un sistema no amortiguado (1), la sensibilidad del grado de libertad j del modo de vibración i correspondiente a un cambio local en la masa en el grado de libertad k viene dado por [4, 5].

$$\frac{\partial\{\Phi_i\}}{\partial m_k} \cong -\frac{\Phi_{ki}^2}{2}\{\Phi_i\} + \Phi_{ki} \sum_{t=1, t \text{ dif. } i=1}^{N_m} \frac{\omega_i^2}{\omega_t^2 - \omega_i^2} \Phi_{kt} \{\Phi_t\} \quad (1)$$

Siendo ω_i la frecuencia natural correspondiente al modo de vibración Φ_i y m_k una masa puntual colocada en el grado de libertad k . Mientras que (2) la sensibilidad del polo i debido a un cambio local de masa en el grado de libertad k resulta ser [4].

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial m_k} \cong -\omega_i \frac{\Phi_{ki}^2}{2} \quad (2)$$

En estructuras reales, que presentan un ligero amortiguamiento con predominio de comportamiento lineal, las dos ecuaciones anteriores constituyen una buena aproximación para estimar la sensibilidad de las frecuencias naturales y los modos de vibración [6]. Incluso utilizando la parte real de los modos de vibración, es decir, sin tener en cuenta el amortiguamiento, los resultados experimentales [7] muestran que esta simplificación conduce a resultados aceptables, incluso en estructuras con un amortiguamiento significativo.

Es importante destacar que, para el cálculo de la sensibilidad de un polo del sistema λ_i , solamente se precisa el modo de vibración (autovector) correspondiente (ecuación 2), mientras que para

la determinación de las sensibilidades relativas a los modos de vibración, es necesario conocer todos los modos (ecuación 1). Por lo tanto, estas expresiones son exactas solamente si se tienen en cuenta todos los modos de vibración de la estructura. Como, generalmente, el modelo modal con el que se trabaja sólo contiene un limitado número de modos, las sensibilidades de los modos de vibración pierden exactitud [4]. Aún así, con un limitado número de modos Nm se suele conseguir una buena aproximación en el cálculo de las sensibilidades.

Si el cambio de masa se realiza simultáneamente en varios grados de libertad, se puede emplear una aproximación por diferencias finitas (3) y (4), de modo que utilizando modos de vibración sin normalizar (relacionados con aquéllos a través de los factores de escala) se llega a [8]

$$\Delta\{\psi_i\} \cong -\frac{\{\psi_i\}^T[\Delta m]\cdot\{\psi_i\}\cdot\alpha_i^2\cdot\{\psi_i\}}{2} + \sum_{t=1, t \text{ dif. } i=1}^{Nm} \frac{\omega_i^2}{\omega_t^2 - \omega_i^2} \cdot \{\psi_i\}^T[\Delta m]\cdot\{\psi_t\}\cdot\alpha_t^2\cdot\{\psi_t\} \quad (3)$$

$$\Delta\omega_i \cong -\frac{1}{2} \omega_i \cdot \alpha_i^2 \cdot \{\psi_i\}^T[\Delta m]\cdot\{\psi_i\} \quad (4)$$

siendo $[\Delta m]$ la matriz de cambio de masa.

El objetivo del presente trabajo, es validar experimentalmente ambas expresiones anteriores, para las estimaciones de modificación sobre los parámetros modales, es decir, de las estimaciones de la variación de la desviación de frecuencia $\Delta\omega_i$, y del incremento $\Delta\{\psi_i\}$ de las componentes de cada autovector, perteneciente al modo i .

Para determinar sensibilidades, utilizando la pareja anterior de expresiones (1) y (2), es necesaria la determinación previa de los factores de escala α_i correspondientes a cada forma de vibración i . Con el objeto de conocer cómo afecta un error en la estimación de la desviación de frecuencia $\Delta\omega_i$ a las sensibilidades (5), se calcula analíticamente la derivada parcial

$$\frac{\partial\Delta\omega_i}{\partial\alpha_i} \cong -\omega_i \alpha_i \{\psi_i\}^T[\Delta m]\{\psi_i\} \quad (5)$$

Como se puede observar, la derivada anterior es la correspondiente a la expresión (4), relativa a la estimación de la desviación de frecuencia, y no la correspondiente a la desviación de frecuencia real para el modo i , $\Delta\omega_i = (\omega_0 - \omega_1)_i$

Si la expresión obtenida en el segundo miembro se multiplica y divide por $2\alpha_i$ se obtiene (6)

$$\frac{\partial\Delta\omega_i}{\Delta\omega_i} \cong 2 \frac{\partial\alpha_i}{\alpha_i} \quad (6)$$

con lo que se llega a una expresión equivalente a la propuesta por Parloo et al. (2002) [6], según la cual se concluye que la presencia de un error relativo ε_i en la estimación del factor de escala α_i , correspondiente al modo i , induce un error de magnitud $2\alpha_i$ sobre la estimación de la desviación de frecuencia.

Validación experimental de las estimaciones de modificación en los parámetros modales

Los ensayos experimentales se realizaron sobre una barra en voladizo, constituida por un tubo de acero de sección rectangular constante (de 100 por 40 mm, y de 4 mm de espesor) dispuesto verticalmente (figura 1), con una altura de 1875 mm, sujeto en su base a un bastidor de ensayos mediante una chapa de asiento rectangular con cuatro tornillos.

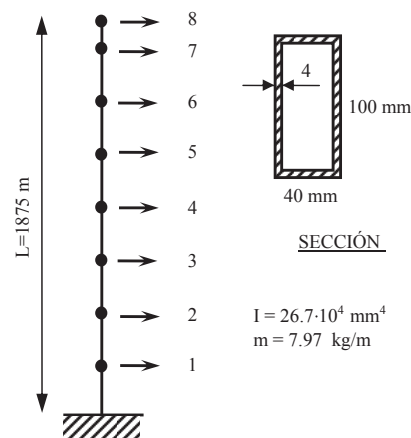


Figura 1 Estructura empleada en la validación experimental

Para definir el comportamiento dinámico de la estructura, se establecieron 8 grados de libertad, obteniéndose las medidas por medio de otros tantos acelerómetros, localizados y orientados horizontalmente como se muestra en la figura 1. La distancia entre grados de libertad es de 250 mm, excepto entre los puntos 7 y 8, que se reduce a 125 mm. Las masas puntuales necesarias para modificar el comportamiento dinámico de la estructura quedaron vinculadas a los grados de libertad 1 al 7.

Ensayo y análisis operacionales

Inicialmente se realizaron unos ensayos previos, con el fin de deducir los parámetros modales de la estructura, para posteriormente, en una segunda etapa, proceder a colocar masas puntuales en los diferentes grados de libertad.

Como fuente de excitación natural aleatoria, se empleó el contacto de una lima, aplicando una ligera presión, junto con un desplazamiento

longitudinal sobre la superficie externa del tubo; de forma que la excitación fue estacionaria en un ancho de banda. Las respuestas fueron medidas mediante 8 acelerómetros 4508B Brüel & Kjær, colocados como se muestra en la figura 1, y registradas con una tarjeta de adquisición de datos (National Instruments PCI4472) controlada por Labview.

En toda la investigación, se registraron únicamente los 5 primeros modos. El análisis de los datos extraídos, de los ensayos experimentales, se realizó con el software *ARTeMIS Extractor* (versión 3.4), utilizando los métodos: *Enhanced FREQUENCY DOMAIN DECOMPOSITION Peak Picking* y *STOCHASTIC SUBSPACE IDENTIFICATION CVA Estimation*.

A continuación, se muestra la gráfica correspondiente al promediado de los valores singulares normalizados de las matrices de densidad espectral (figura 2) para el primero de ellos.

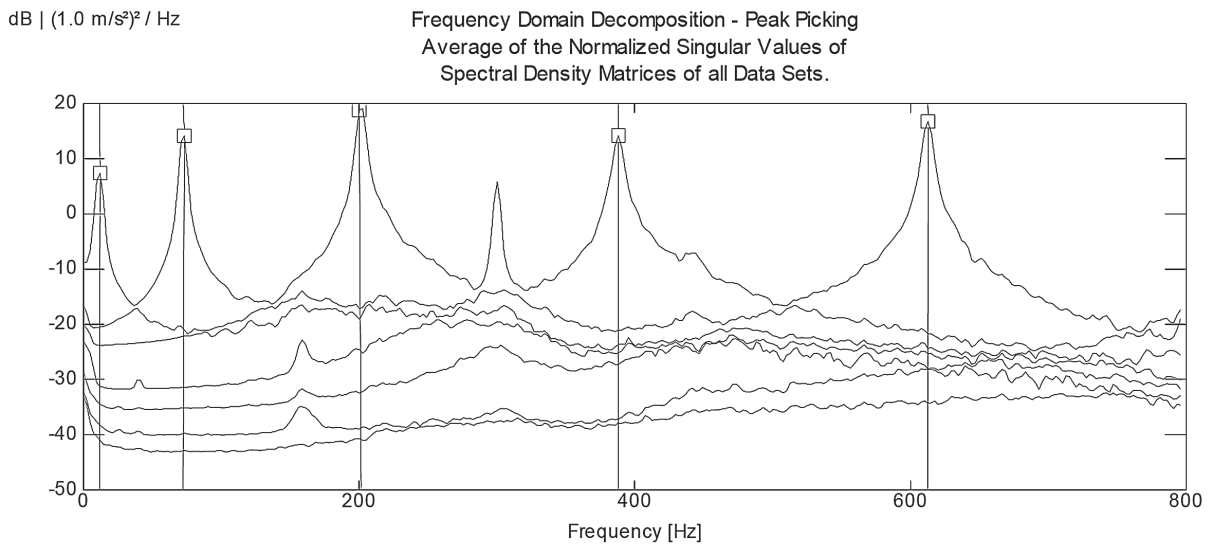


Figura 2 Cinco primeros modos de flexión -con respecto al eje de inercia más débil de la sección: ancho de la misma- identificados mediante la técnica FDD

Aplicación del método de cambio de masa

A continuación se aplicó el método de cambio de masa [9-11], al objeto de calcular los factores de escala α y los parámetros modales modificados de la estructura. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 1, en la que se indican, para los 5 primeros modos, las frecuencias originales y las obtenidas tras la modificación de masa, así como la desviación porcentual de la frecuencia, el MAC (Modal Assurance Criterion) entre los modos modificados y no modificados, y el factor de escala resultante (7), calculado mediante la siguiente expresión [6, 12]

$$\alpha_x = \sqrt{\frac{(\omega_{0x}^2 - \omega_{1x}^2)}{\omega_{1x}^2 \cdot \{\psi_{0xlg}\}^T \cdot [\Delta m_x] \cdot \{\psi_{1xlg}\}}}$$
 (7)

En la que se utilizan modos de vibración modificados ψ_{1xlg} , y no modificados ψ_{0xlg} (el subíndice x hace referencia a datos experimentales, mientras que el subíndice lg denota que dichos modos de vibración están normalizados a la longitud), ω_0 y ω_1 son las frecuencias naturales del modo considerado, antes y después de la aplicación del cambio de masa, y $[\Delta m]$ la matriz de cambio de masa.

Tabla 1 Frecuencias naturales y factores de escala experimentales

Resultados experimentales de la aplicación del método de cambio de masa						
<i>n</i> ^o modo	<i>f</i> _{original} [Hz]	<i>f</i> _{Δm} [Hz]	% Δf	MAC	α	
1	11,74	11,34	3,41	0,9999	0,4571 – 0,0014i	
2	72,45	67,52	6,80	0,9999	0,4151 + 0,0015i	
3	201,5	192,7	4,37	0,9973	0,4444 – 0,0002i	
4	388	373,1	3,84	0,9954	0,4266 – 0,0066i	
5	612,6	592,3	3,31	0,9931	0,4713 – 0,0048i	

Determinación de las sensibilidades

Una vez efectuado el cálculo de los parámetros modales, se procede a determinar las sensibilidades, utilizando para ello las expresiones (3) y (4), para las estimaciones [8] de la variación de la desviación de frecuencia $\Delta\omega_i$, y del incremento $\Delta\{\psi_i\}$ de las componentes del autovector, para cada modo *i*.

Una vez determinados los incrementos citados, el procedimiento seguido consiste, por una parte, en estimar las frecuencias naturales modificadas, sumando la estimación de la frecuencia $\Delta\omega_i$ a la frecuencia natural original y hallando el porcentaje de variación con respecto a la misma (de referencia); y por otra, en estimar los autovectores modificados, sumando el vector de las variaciones de cada una de las componentes $\Delta\{\psi_i\}$ al vector original correspondiente (sin modificar), para posteriormente comparar los modos de vibración (reales y estimados) entre sí, a través del MAC. Todo esto para cada modo de vibración, y utilizando diferentes expresiones para el cálculo de los factores de escala.

El procedimiento seguido se ilustra en la figura 3, y en la tabla 2 se muestran las diferencias porcentuales entre la frecuencia modificada estimada y la frecuencia modificada real, para las 5 primeras frecuencias de resonancia. En los diversos casos analizados -y dentro de cada uno de ellos- la expresión de cálculo del factor de escala α que se utiliza en el método de cambio de masa, se emplea también en la estimación de $\Delta\omega_i$ y $\Delta\{\psi_i\}$.

$$\Delta\omega_i \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \omega_{1\text{ est}} = \omega_0 + \Delta\omega \\ \omega_i \end{matrix} \right\}_i \rightarrow \% \text{ de diferencia}$$

$$\Delta\{\psi_i\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \psi_{1\text{ est}} = \psi_0 + \Delta\{\psi_i\} \\ \psi_i \end{matrix} \right\}_i \rightarrow \text{MAC}$$

Figura 3 Metodología seguida para la comparación entre los parámetros experimentales modales estimados y reales

Para cada uno de los cinco casos anteriores (tabla 2), los resultados alcanzados mediante el MAC (Modal Assurance Criterion), entre los modos de vibración modificados estimados ψ_{1est} (obtenidos tras añadir masa a la estructura), y los reales ψ_1 , muestran que ambos conjuntos de modos se

corresponden perfectamente entre si; este hecho se demuestra cuantitativamente por medio de las magnitudes de la matriz MAC (Modal Assurance Criterion), con valores de la diagonal principal que alcanzan el valor unidad.

Tabla 2 Frecuencias naturales obtenidas a través de las estimaciones de $\Delta\omega_i$ y $\Delta\{\psi_i\}$

<i>Porcentaje de diferencia entre ω_{1est} y ω_1, obtenidas a través de estimaciones numéricas</i>						
	<i>Expresión de cálculo</i>	<i>Frecuencia de resonancia n°</i>				
		1	2	3	4	5
Método del cambio masa	1) Utilizando modos no modificados y modificados					
	$\sqrt{\frac{(\omega_{0x}^2 - \omega_{1x}^2)}{\omega_{1x}^2 \cdot \{\psi_{0xlg}\}^T \cdot [\Delta m_x] \cdot \{\psi_{1xlg}\}}}$	5,4830	11,4818	8,2985	9,1935	18,7331
	2) Utilizando modos no modificados					
	$\sqrt{\frac{(\omega_{0x}^2 - \omega_{1x}^2)}{\omega_{1x}^2 \cdot \{\psi_{0x1}\}^T \cdot [\Delta m_x] \cdot \{\psi_{0x1}\}}}$	5,3546	11,2170	6,9652	6,0263	5,2553
	3) Utilizando modos no modificados (Propuesta de Parloo)					
$\sqrt{\frac{2 \cdot (\omega_{0x} - \omega_{1x})}{(\omega_{0x} + \omega_{1x}) \cdot \{\psi_{0x1}\}^T \cdot [\Delta m_x] \cdot \{\psi_{0x1}\}}}$	1,7344	3,5205	2,2428	1,9156	1,7386	
4) Utilizando el valor medio de los modos (Propuesta de Brincker)						
$\sqrt{\frac{(\omega_{0x}^2 - \omega_{1x}^2)}{\omega_{1x}^2 \cdot \left\{ \frac{\psi_{0x1} + \psi_{1x1}}{2} \right\}^T \cdot [\Delta m_x] \cdot \left\{ \frac{\psi_{0x1} + \psi_{1x1}}{2} \right\}}}$	5,4823	11,4801	8,2202	9,1206	18,1002	
5) Utilizando el valor medio de los factores de escala						
$\frac{\alpha_{00x} + \alpha_{11x}}{2}$	5,4815	11,4788	8,1517	9,1137	18,6756	

Estimación mediante resolución de problema característico

Se repite el apartado anterior, a través de la resolución (8) del siguiente problema característico [13, 14]

$$\left([\omega_0^2] - ([I] + [\Phi_0]^T \cdot [\Delta m] \cdot [\Phi_0]) \right) \cdot [A] = 0 \quad (8)$$

en donde se utilizan los parámetros modales experimentales reales sin modificar: $\{\omega_0\}$ y $[\Phi_0]$, es decir, las frecuencias naturales y los modos de

vibración de la estructura original sin modificar; junto con la matriz de cambio de masa $[\Delta m]$. En dicho problema característico, la matriz diagonal $[\omega_0^2]$ contiene el cuadrado de las frecuencias naturales originales, que representa las propiedades de rigidez, y $([I] + [\Phi_0]^T \cdot [\Delta m] \cdot [\Phi_0])$, que representa las propiedades de masa.

Por lo tanto, de (8) se pueden obtener, por una parte, una estimación de las frecuencias naturales ω_{1est} para compararlas con las experimentales reales; y por otra, la matriz $[A]$, a partir de la cual

[13, 14] se puede alcanzar una estimación (9) de los modos de vibración normalizados

$$[\Phi_{1est}] = [\Phi_0] \cdot [A] \quad (9)$$

Además, como los factores de escala para cada modo son conocidos, la determinación de aquellos sin normalizar ψ_{1est} , es inmediata. Posteriormente se comparan los modos de vibración entre sí

(experimentales reales ψ_1 y estimados ψ_{1est}), a través del MAC.

En la tabla 3 se muestran las diferencias porcentuales entre la frecuencia modificada estimada ω_{1est} y la frecuencia modificada real ω_1 , para las 5 primeras frecuencias de resonancia. Todo esto para cada modo de vibración, utilizando diferentes expresiones para el cálculo de los factores de escala; al igual que en el anterior apartado.

Tabla 3 Frecuencias naturales obtenidas a través de la resolución de un problema característico, a partir de los parámetros modales originales

Porcentaje de diferencia entre ω_{1est} y ω_1, obtenidas a través de la resolución del problema característico							
	Expresión de cálculo	Frecuencia de resonancia n°					
		1	2	3	4	5	
Método del cambio masa	1) Utilizando modos no modificados y modificados	$\sqrt{\frac{(\omega_{0x}^2 - \omega_{1x}^2)}{\omega_{1x}^2 \cdot \{\psi_{0x1g}\}^T \cdot [\Delta m_x] \cdot \{\psi_{1x1g}\}}}$	0,0047	0,0166	0,0117	0,1243	3,3810
	2) Utilizando modos no modificados	$\sqrt{\frac{(\omega_{0x}^2 - \omega_{1x}^2)}{\omega_{1x}^2 \cdot \{\psi_{0x1}\}^T \cdot [\Delta m_x] \cdot \{\psi_{0x1}\}}}$	0,0005	0,0008	0,0579	0,0710	0,0332
	3) Utilizando modos no modificados (Propuesta de Parloo)	$\sqrt{\frac{2 \cdot (\omega_{0x} - \omega_{1x})}{(\omega_{0x} + \omega_{1x}) \cdot \{\psi_{0x1}\}^T \cdot [\Delta m_x] \cdot \{\psi_{0x1}\}}}$	0,1148	0,4573	0,2434	0,2144	0,1132
	4) Utilizando el valor medio de los modos (Propuesta de Brincker)	$\sqrt{\frac{(\omega_{0x}^2 - \omega_{1x}^2)}{\omega_{1x}^2 \cdot \left\{ \frac{\psi_{0x1} + \psi_{1x1}}{2} \right\}^T \cdot [\Delta m_x] \cdot \left\{ \frac{\psi_{0x1} + \psi_{1x1}}{2} \right\}}}$	0,0046	0,0165	0,0000	0,0748	1,0161
	5) Utilizando el valor medio de los factores de escala	$\frac{\alpha_{00x} + \alpha_{11x}}{2}$	0,0046	0,0164	0,0004	0,0851	1,6452

En el caso de los autovectores, al objeto de valorar la precisión, resulta interesante comparar el grupo de modos de vibración; a este respecto, es más preferible una representación numérica -por ser más objetiva y más fácilmente contrastable- que su análoga gráfica.

Por tanto, para cada uno de los cinco casos anteriores (tabla 3), los resultados alcanzados mediante el MAC (Modal Assurance Criterion) entre los modos de vibración modificados estimados ω_{1est} (obtenidos tras añadir masa a la estructura) y los experimentales reales ω_1 , para los términos de la diagonal principal de la matriz MAC, se muestran en la tabla 4.

Tabla 4 Componentes de la diagonal principal del MAC, entre los modos de vibración modificados estimados Ψ_{1est} , y los experimentales reales ω_1

MAC: componentes de la diagonal principal						
	Alternativa de cálculo	Modo de vibración n°				
		1	2	3	4	5
Método del cambio masa	1) Utilizando modos no modificados y modificados	0,9999	1,0000	0,9994	0,9917	0,3277
	2) Utilizando modos no modificados	0,9999	1,0000	0,9997	0,9992	0,9934
	3) Utilizando modos no modificados	0,9999	1,0000	0,9996	0,9993	0,9959
	4) Utilizando el valor medio de los modos	0,9999	1,0000	0,9996	0,9975	0,9003
	5) Utilizando el valor medio de los factores de escala	0,9999	1,0000	0,9995	0,9961	0,7290

A la vista de los resultados obtenidos, con las componentes de la diagonal principal muy próximas o en algunos casos iguales al valor unidad, se deduce que ambos conjuntos de modos se corresponde perfectamente entre sí.

Conclusiones

Las expresiones (3) y (4), suministran una estimación razonable [8] sobre la desviación de frecuencia y las componentes del vector modal (correspondientes a un modo de vibración i) en los intervalos de incremento de masa utilizados para la determinación de los factores de escala; en concreto, las estimaciones son útiles para los primeros modos, ya que para los más altos el error crece rápidamente. En general, las estimaciones de las frecuencias modificadas ω_{1est} se encuentran en el entorno del 10 % para las primeras frecuencias de resonancia; en particular, la expresión con la que se alcanzan mejores estimaciones es la propuesta por Parloo (caso 3) en la cual se utilizan modos de vibración modificados y no modificados.

La resolución de un problema característico, formado por los autovalores y autovectores iniciales (de la estructura sin modificar), estos últimos normalizados con respecto a la matriz

de masa (utilizando los factores de escala), junto con la matriz de incremento de masa, ofrece a la vista del MAC (Modal Assurance Criterion)-una bondad de los resultados similar para las estimaciones de cada una de las componentes de los vectores modales, mientras que las estimaciones de las desviaciones de frecuencia son mucho mejores; prácticamente coinciden con los valores experimentales reales de los primeros modos de vibración.

Referencias

1. W. To, D. Ewins. "Structural Modification Analysis Using Rayleigh Quotient Iteration". *International Journal of Mechanical Sciences*. Vol. 32. 1990. pp. 169-179.
2. Y. Ram. "Dynamic Structural Modification". *Shock and Vibration Digest*. Vol. 32. 2000. pp. 11-17.
3. P. Wallack, P. Skoog, M. Richardson. *Comparison of Analytical and Experimental Rib Stiffener Modifications to a Structure*. Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference (IMAC7). Las Vegas, USA. 1989. pp. 965-973.
4. W. Hielen, S. Lammens, P. Sas. *Modal Analysis Theory and Testing*. 1^a ed. Ed. Katholieke Universiteit Leuven. Heverlee, Belgium. 1999. pp. 11-35.
5. P. Vanhonacker. "Differential and Difference Sensitivities of Natural Frequencies and Mode Shapes

- of Mechanical Structures”. *AIAA Journal*. Vol. 18. 1980. pp. 1511-1514.
6. E. Parloo, P. Verboven, P. Guillaume, M. Van Overmeire. “Sensitivity-based operational mode shape normalization”. *Mechanical Systems and Signal Processing (MSSP)*. Vol. 16. 2002. pp. 757-767.
 7. E. Parloo. *Application of Frequency-Domain System Identification Techniques in the Field of Operational Modal Analysis*. Ph.D. Thesis. Department of Mechanical Engineering. Vrije Universiteit Brussel. Brussel, Belgium. 2003. pp. 81-128.
 8. M. López, R. Brincker, A. Canteli, L. García. *Scaling Factor Estimation by Mass Change Method*. Proceedings of the 1st International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC). Copenhagen, Denmark. 2005. pp. 53-64.
 9. M. Khatibi, M. Ashory, A. Malekjafarian. *Scaling of Mode Shapes Using Mass-Stiffness Change Method*. Proceedings of the International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC). Copenhagen, Denmark. 2009. pp. 699-706.
 10. M. Khatibi, M. Ashory, A. Malekjafarian, R. Brincker. “Mass-stiffness change method for scaling of operational mode shapes”. *Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol. 26. 2012. pp. 34-59.
 11. R. Brincker, P. Andersen. *A Way of Getting Scaled Mode Shapes in Output Only Modal Analysis*. Proc. of the International Modal Analysis Conference (IMAC) XXI. Orlando, USA. 2003. pp. 141-145.
 12. E. Parloo, B. Cauberghe, F. Benedettini, R. Alaggio, P. Guillaume. “Sensitivity-based Operational Mode Shape Normalisation: Application to a Bridge”. *Mechanical Systems and Signal Processing (MSSP)*. Vol. 19. 2005. pp. 43-55.
 13. A. Sestieri. “Structural Dynamic Modification”. *Academy Proceedings in Engineering Sciences (Sadhana)*. Vol. 25. 2000. pp. 247-259.
 14. T. Kundra. “Structural Dynamic Modification via models”. *Academy Proceedings in Engineering Sciences (Sadhana)*. Vol. 25. 2000. pp. 261-276.