

Estudio de la Dinámica de los Procesos de Fractura y de Delaminación en Materiales Reforzados con Fibras

Dynamics Study of Processes Fracture and Fiber-Reinforced Materials Delamination

Pedro Tamayo-Meza^{1}, Anatoly S. Ovchinsky², Juan Manuel Sandoval-Pineda¹, Luis Armando Flores-Herrera¹, Rosa de G. González Huerta^{1,3}.*

¹Laboratorio de Fuerza Atómica, Sección de Estudios de Posgrado, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional. Av. De las Granjas, N° .682, Azcapotzalco. CP. 02250. México DF., México.

²Instituto de Metalurgia, Academia de Ciencias de Rusia. Lenninsky Prozpekt 49. Moscú, Rusia.

³Laboratorio de Electrocatálisis, ESQIE-IPN. UPALM. CP. 07738. México DF., México.

(Recibido el 24 de Agosto de 2012. Aceptado 25 de Junio de 2013)

Resumen

El estudio de los efectos dinámicos, relacionados con la falla de las fibras, comienza con el análisis de algunos modelos que consideran el carácter dinámico de la redistribución del esfuerzo en el compuesto. Se deduce una ecuación para el deslizamiento de los filamentos fracturados y para los filamentos que rodean éstos, para el caso cuando los componentes se deforman elásticamente, para una deformación de cizalle elasto-plástico de la matriz, y para el filamento fracturado exfoliado de la matriz. Se obtiene una solución analítica, y se brinda un análisis de la propagación de la onda del esfuerzo en el filamento fracturado cuando los componentes del material se deforman elásticamente.

----- *Palabras clave:* Fractura, interface, delaminación, fibra, matriz

Abstract

With the construction of a plane model, a qualitative study was made in order to observe the transactions that are developed during the fracture process and its simulation on different sections of a composite, from the accumulation

* Autor de correspondencia: teléfono: + 52 + 55 + 57 29 6000, ext. 64530, correo electrónico: ptamayom@ipn.mx (P. Tamayo)

of the damage stage to the moment when the crack propagates abruptly causing a macro fracture. An algorithm was developed to observe the stress redistribution processes and the compound is simulated including packaging defects of the filaments. During the study of the fracture processes in reinforced composites there are many factors to consider that are interrelated and that have a casual character. The mechanical properties of the fibers and the matrix, the matrix-fiber adherence and the resistance of the interface, all vary with the application of the load. The use of computational methods opens great possibilities for the development of the simulation and the models of the fracture processes.

----- *Keywords:* Fracture, interface, delamination, fiber, matrix

Introducción

El rompimiento de las fibras durante la aplicación de carga sobre el material compuesto es un instante crucial en el comportamiento del material e induce una redistribución del esfuerzo ejerciendo una influencia decisiva en la evolución de la fractura. El estudio de este fenómeno es básico para simular y modelar la acumulación de daño del material entre los diferentes componentes del sistema. El estudio de la dinámica de los fenómenos asociados a la redistribución del esfuerzo durante el rompimiento de fibras frágiles, representa un desarrollo adicional del trabajo en esta dirección. A pesar de la evidencia del carácter dinámico del proceso de fractura de compuestos con fibras de elevado módulo de elasticidad, son pocos los trabajos dedicados al estudio sobre la dinámica de formación de defectos en compuestos. Las dificultades son enormes, y surgen cuando se propone estudiar procesos transitorios en medios heterogéneos.

Desarrollo Teórico

La redistribución del esfuerzo, ocasionado por el rompimiento de los filamentos, ejerce una significativa influencia sobre el desarrollo de la fractura del compuesto en general. El estudio de este proceso es una componente fundamental y requisito para el desarrollo de algoritmos que simulan la acumulación de daño en el compuesto [1, 2]. A pesar de que el carácter de los procesos de fractura de las fibras con elevado módulo de

elasticidad es evidentemente dinámico [3], no son muchos los trabajos dedicados a este problema. La razón de esto reside en las considerables dificultades que surgen cuando se estudian procesos transitorios en medios heterogéneos. En el presente trabajo analizaremos los efectos dinámicos que surgen durante la fractura de las fibras en materiales reforzados con fibras [4, 5].

Se propone el análisis de un determinado volumen de material compuesto, dentro del cual las fibras se fracturan, como se muestra en la figura 1. El material es sometido a una fuerza de tensión unidireccionalmente orientada respecto a las fibras. A la fibra fracturada se le asigna un índice 0, a las fibras inmediatamente circundante se les asigna el índice 1, al siguiente cordón el 2, al siguiente 3, y así sucesivamente.

La fractura de una fibra perturba el campo de tensión en el compuesto y surgen esfuerzos tangenciales en la interface fibra-matriz. A este movimiento se oponen las fuerzas tangenciales que surgen en la interface entre la fibra fracturada y la matriz.

El análisis de las fuerzas aplicadas sobre un elemento de fibra, conduce a las ecuaciones de equilibrio características para un modelo unidimensional, en este caso como lo muestra la ecuación (1):

$$\frac{dN_{fi}}{dz - T_i} = 0 \quad (i=0,1,2,3\dots) \quad (1)$$

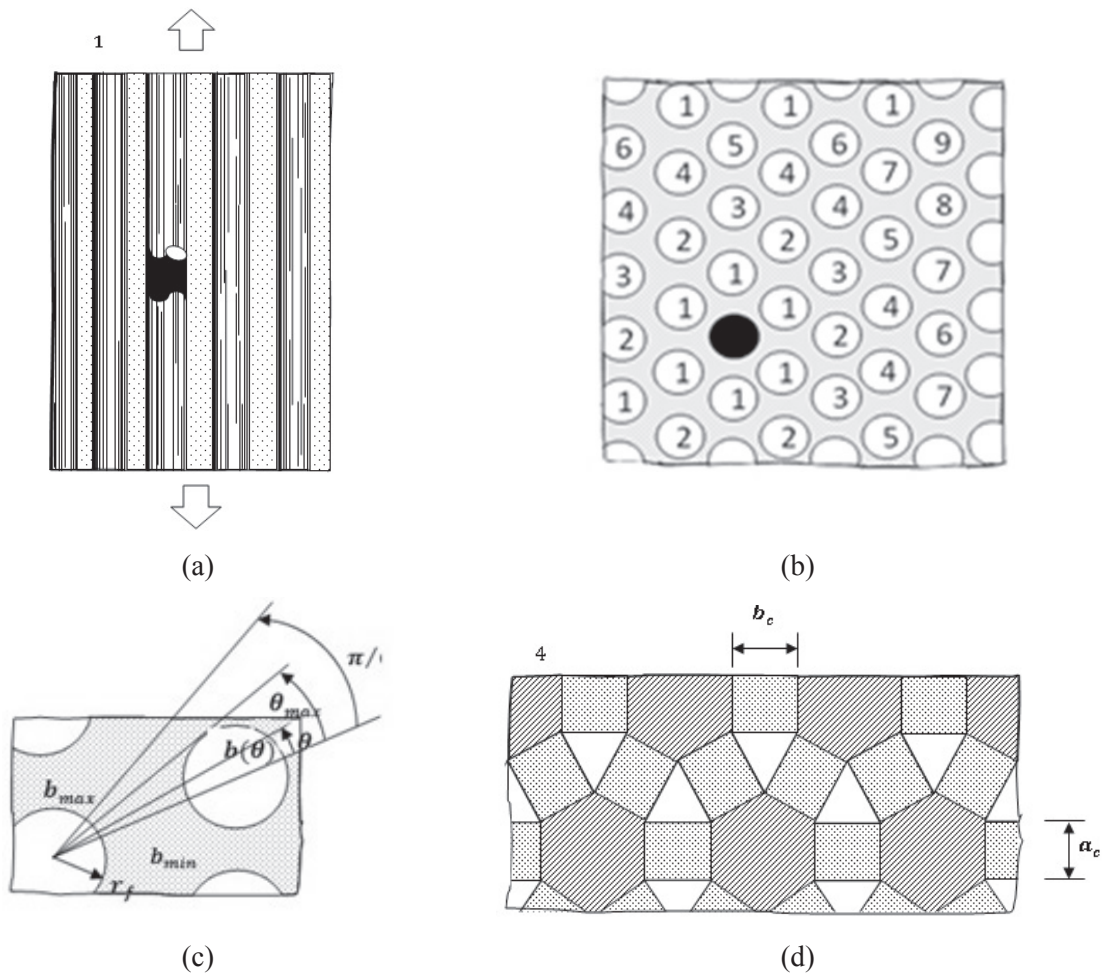


Figura 1 Modelos de materiales compuestos: a) Volumen en tensión; b) Indexación de las fibras; c) dos variantes para determinar la distancia entre las fibras

Dónde: N_{fi} - fuerzas internas de tensión en las fibras; T_i - suma de fuerzas tangenciales que actúan sobre una fibra de longitud unitaria. Consideramos que los esfuerzos de tensión se distribuyen uniformemente en la sección transversal de la fibra y $\sigma_{fi} = \frac{N_{fi}}{F_f}$, donde: F_f - área de la sección transversal de la fibra. La ecuación de equilibrio en este caso lo planteamos como lo indica la ecuación (2):

$$\frac{d\sigma_{fi}}{dz} - \frac{T_i}{F_f} = 0 \quad (2)$$

Para pasar de las ecuaciones de carga y esfuerzo a las ecuaciones en desplazamiento, el esfuerzo en las fibras lo expresamos a través de sus deformaciones axiales ϵ_{fi} que, a su vez, se relacionan con los desplazamientos $u_{fi} = \frac{du_i}{dz}$. Por otro lado, las fuerzas tangenciales T_i se expresan a través de los esfuerzos tangenciales que actúan en el perímetro de la fibra, y son consecuencia de las deformaciones de corte en la matriz que, a su vez, deben relacionarse con los desplazamientos axiales de la fibra.

Para relacionar las deformaciones de corte de la matriz con los desplazamientos axiales de la fibra

consideramos lo siguiente. El modelo desarrollado se apoya en la hipótesis: las deformaciones de corte de la matriz en la interface de cualesquier filamento, es directamente proporcional al deslizamiento de este filamento respecto a los filamentos vecinos, e inversamente proporcional a la distancia entre su superficie hasta la superficie de ellos, que es típica para un modelo unidimensional [5]. Se proponen dos variantes para determinar la distancia entre las fibras. En la primera, la distancia entre ellas $b(\Theta)$ se determina considerando el radio, que parte del centro de la fibra en cuestión, y es función de las coordenadas angulares Θ . Cuando la distribución de las fibras es hexagonal, $b(\Theta)$ varía con un período medio de $\frac{\pi}{6}$, como se muestra en la figura 1c. Una solución geométrica elemental nos da una función de la distancia entre las fibras $b(\Theta)$ respecto al ángulo Θ y se calcula conforme a la ecuación 3:

$$b(\Theta) = r_f (H_v \cos \Theta - 1 - \sqrt{1 - H_v^2 \sin^2 \Theta}) \quad (3)$$

En el rango de $0 < \Theta < \Theta_{max}$, y para Θ_{max} , cuando $\Theta < \Theta_{max} < \frac{\pi}{6}$, se tiene como lo indica la ecuación (4):

$$b(\Theta) = b_{max} = r_f (\sqrt{H_v^2 - 1} - 1) \quad (4)$$

Donde: r_f - radio de la fibra. El parámetro H_v se calcula conforme lo indica la ecuación (5) y es función del volumen de fibras V_f :

$$H_v = \sqrt{\frac{2\pi}{3V_f}} \quad (5)$$

El ángulo Θ_{max} también está determinado por el volumen de fibras: $\Theta_{max} = \sin^{-1}(1/H_v)$. Donde $\Theta_{max} = \arcsen(\frac{1}{H_v})$. Entonces la distancia mínima entre las fibras se determina por la ecuación 6:

$$b_{min} = r_f (H_v - 2). \quad (6)$$

De las condiciones $b_{min} = 0$, es posible determinar el volumen máximo posible de fibras cilíndricas como: $V_{fmax} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.907$

Demostraremos, que cuando se describe la distribución del esfuerzo a lo largo de la fibra, la distancia entre las fibras en función del ángulo de las coordenadas, por regla general, no juega ningún papel, y es significativa una característica integral como se observa en la ecuación (7):

$$b_c = \left[\frac{1}{\pi/6} \int_0^{\pi/6} \frac{d\Theta}{b(\Theta)} \right]^{-1} \quad (7)$$

Que es una función de la fracción de volumen, y que puede entenderse como la distancia media entre las fibras.

Para tener en forma explícita la distancia media entre las fibras en función del volumen de fibras, paralelamente al modelo propuesto analizamos otra variante construyendo un modelo geométrico simplificado. En este caso representamos la matriz en forma de capas uniformes con espesor b_c , distribuida entre las fibras con ordenamiento hexagonal, ver figura 1d. El costado del hexágono a_c lo determinamos de la igualdad de las superficies de las fibras con sección circular a partir del hexágono, empleando la ecuación (8):

$$a_c = \sqrt{2\pi/(3\sqrt{3})} \cdot r_f \quad (8)$$

Y el espesor de las capas de matriz b_c lo determinamos considerando la porción de volumen del compuesto empleando la ecuación (9):

$$b_c = \frac{1 - V_f}{V_f} \sqrt{\pi/(2\sqrt{3})} \cdot r_f \quad (9)$$

Hacemos notar, que la construcción de un modelo volumétrico de compuesto con fibras de sección circular, es la generalización de un modelo de compuesto propuesto en [6-9].

Conforme a la hipótesis señalada anteriormente en la variante para fibras cilíndricas, la distribución de las deformaciones de corte de la matriz por el perímetro de las fibras fracturadas γ_{01} , y por los perímetros de las fibras adyacentes γ_{10} , γ_{12} , γ_{13} , etc., se determinan empleando la ecuación (10):

$$\gamma_{01} = \frac{u_0 - u_1}{b(\theta)}; \gamma_{10} = \frac{u_1 - u_0}{b(\theta)}; \quad (10)$$

$$\gamma_{12} = \frac{u_1 - u_2}{b(\theta)}; \gamma_{13} = \frac{u_1 - u_3}{b(\theta)}$$

Donde: u_1, u_2, u_3, \dots , etc., son los desplazamientos axiales de la fibra, por ejemplo, a partir del plano de ruptura.

Ecuación de movimiento de una fibra fracturada, y de las fibras circundantes

Se analiza un determinado volumen de material compuesto, y una fibra que se fractura dentro de él, Figura 1a. Al momento de la fractura, los extremos de la fibra súbitamente relajan y comienzan a moverse, separándose. Las fuerzas tangenciales que surgen en la interface fibra fracturada - matriz se interponen a este desplazamiento. Estas fuerzas tangenciales, actuando en la matriz, obligan a las fibras adyacentes a moverse. Considerando las propiedades inerciales de las fibras, pasamos de las ecuaciones de equilibrio (1) a las ecuaciones de movimiento.

Durante su desplazamiento, sobre un elemento de fibra actúan fuerzas internas de tensión N_f , fuerzas cortantes T_f , y fuerzas inerciales $I_{f_i} = -dm_f \ddot{u}_f$, donde; $dm_f = \rho_f F_f dz$ que es la masa de un elemento de fibra de longitud dz ; $\ddot{u}_i = \partial^2 u_i / \partial t^2$ que es la aceleración del elemento de fibra, Figura 2.

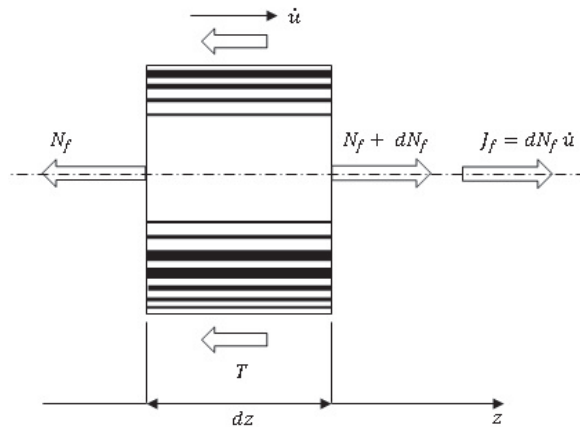


Figura 2 Fuerzas aplicadas sobre un elemento de fibra en desplazamiento

Proyectando las fuerzas sobre el eje z se deduce la ecuación (11):

$$dN_{f_i} - T_i dz - \ddot{u}_i dm_f = 0 \quad (11)$$

Considerando, que el filamento incluso hasta el instante mismo de la fractura se deforma elásticamente, replanteamos la ecuación (11) como se muestra en la ecuación (12):

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} - \frac{\rho_f}{E_f} \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{T_i}{E_f F_f} = 0 \quad (12)$$

Donde: ρ_f - densidad del material de la fibra.

Para pasar a las ecuaciones de movimiento, las fuerzas de cizallamiento T_i las expresamos a través de los esfuerzos tangenciales, como se aprecia en el conjunto de ecuaciones (13):

$$\begin{aligned} T_0 &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tau_{01} \cdot r_f \cdot d\theta \\ T_1 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tau_{01} \cdot r_f \cdot d\theta + 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tau_{12} \cdot d\theta + 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tau_{13} \cdot r_f \cdot d\theta \\ T_2 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tau_{21} \cdot r_f \cdot d\theta + 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tau_{23} \cdot r_f \cdot d\theta + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau_{24} \cdot r_f \cdot d\theta \end{aligned} \quad (13)$$

Expresiones análogas se obtienen para $T_1, T_2, T_3, T_4, \dots$ etc. La estructura final de las ecuaciones depende de las propiedades elástico-plásticas de la matriz, y la cantidad de ecuaciones en el sistema, a su vez, depende del tamaño del campo analizado, es decir, de la cantidad de capas de fibras que entran en el cálculo, como se muestra en la figura 3.

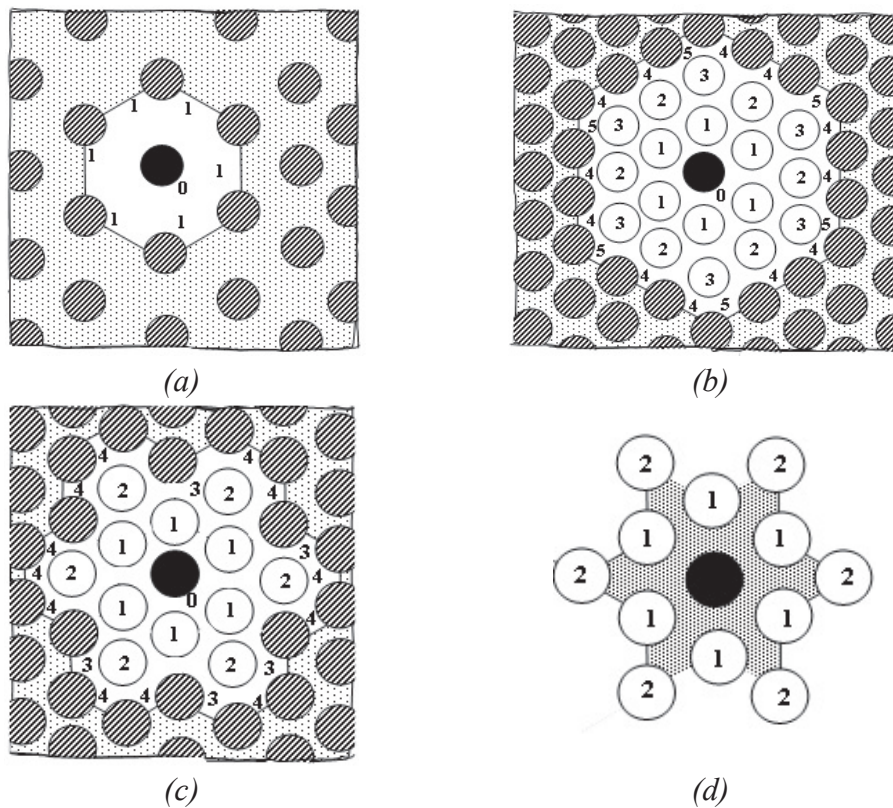


Figura 3 Modelos de materiales compuestos: a) modelo lineal, b) modelo de tres cinturones, c) modelo de dos cinturones, d) modelo de dos cinturones “maleable”

Discusión del problema teórico

Ecuaciones del movimiento de un filamento fracturado

A semejanza con el análisis estático, la dinámica de la redistribución del esfuerzo en la fibra fracturada puede examinarse partiendo del supuesto de que los filamentos circundantes a éste se encuentran empotrados, es decir: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$. Cuando la deformación al corte de la matriz es puramente elástica, $T_0/E_f F_f = \alpha_y^2 \cdot u_0$, la ecuación de movimiento de la fibra fracturada la expresamos empleando la ecuación (14):

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_0}{a_f^2 \partial t^2} - \alpha_y^2 u_0 = 0 \quad (14)$$

Donde: $a_f = \sqrt{\frac{E_f}{\rho_f}}$

Cuando la deformación al corte de la matriz es elástico-plástica, el movimiento de la fibra dañada puede presentarse en varias etapas. En la primera etapa la matriz al corte se deforma elásticamente (zona AB en la Figura 4), y el proceso puede ser descrito por la ecuación (14). Si durante la separación de los extremos surge la situación de que $\tau_{01} > \tau_{mT}$, o se cumple la condición $u_0 > u_T$, donde $u_T = b_c \cdot \gamma_T$, la matriz al corte comienza a deformarse plásticamente (zona BC en la figura 4). En esta etapa $T_0 / (E_f \cdot F_f) = \alpha_T^2 \cdot u_0 + \alpha_0^2 \cdot u_T$, y entonces el proceso se describe mediante la ecuación (15):

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \alpha_y^2 u_0 = \alpha_0^2 \cdot u_T \quad (15)$$

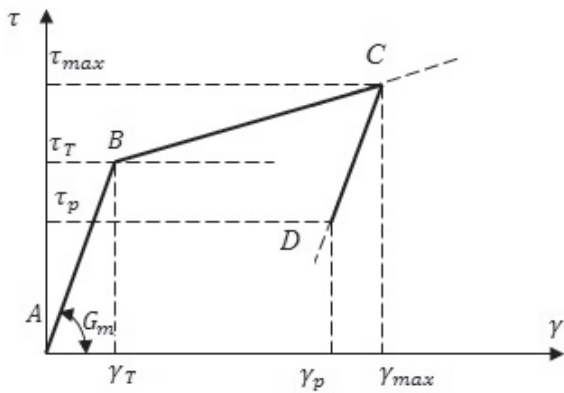


Figura 4 Diagrama de deformación al corte de la matriz

El movimiento de los extremos de la fibra fracturada tendrá, por lo visto, características oscilatorias, y después de la etapa de deformación plástica de la matriz al corte, cuando los extremos de la fibra tienden a separarse, se esperaría una relajación parcial de la matriz cuando algunos segmentos de fibra se mueven en sentido contrario. Sin embargo, la relajación de la matriz nuevamente transcurre elásticamente (segmento CD en la figura 4). A ulteriores vibraciones de los segmentos separados de fibras, la matriz se deforma elásticamente, pero si surgieran deformaciones plásticas de corte, entonces la relación entre los esfuerzos tangenciales y las deformaciones de corte se caracterizarán no por el segmento AB, sino por el segmento CD. La posición del segmento CD estará dado por las máximas deformaciones al corte de la matriz γ_{max} , que se logra cuando un determinado segmento de fibra se desplaza. La relación entre el esfuerzo de corte τ_p y las deformaciones de corte γ_p en la etapa de descarga, se obtienen mediante una construcción geométrica (Figura 4) en forma de la ecuación (16):

$$\tau_p = G_m \gamma_p - (G_m - G_{mT})(\gamma_{max} - \gamma_T) \quad (16)$$

Introduciendo $u_{max} = \gamma_{max} b_c$ (análogamente $u_T = \gamma_T b_c$), tenemos para la etapa de relajación y subsiguientes vibraciones $T_0/(E_f F_f) = \alpha_0^2 u_0 - \alpha_0^2$

$(u_{max} - u_T)$, una ecuación de movimiento como se muestra en la ecuación (17):

$$(17)$$

Al separarse los extremos de la fibra fracturada, los esfuerzos tangenciales en la superficie superan el valor de la fuerza de resistencia al corte de la fibra y la matriz τ_{fb} , entonces la fibra fracturada comienza a desprenderse de la matriz. En este caso analizamos la siguiente situación.

Ecuación de movimiento de un segmento delaminado

Durante su deslizamiento el trozo exfoliado de fibra contacta con la matriz, y surge una fuerza de roce entre ellos. Físicamente esta fuerza de roce, en este caso, puede explicarse de diferentes maneras, pero en líneas generales depende de la velocidad de su movimiento, - roce viscoso - y del desplazamiento, - roce posicional, y estas fuerzas son débiles. Lo más real es el surgimiento de roce seco, cuando durante el movimiento de una superficie con una rugosidad se mueve respecto a otra con una rugosidad distinta. Sin embargo, a medida que se desarrolla la delaminación se incrementan las superficies que participan en el roce, y por ello la fuerza sumatoria de roce crece proporcionalmente respecto a los segmentos desgarrados.

Análogamente con los esfuerzos tangenciales, se introduce una fuerza de rozamiento $\tau_R = R/2\pi r_f$ donde R – fuerza de roce que actúa por el perímetro de un elemento con longitud dz del segmento de fibra desprendido. Como se observa en la ecuación 18, consideramos que τ_R es una porción de τ_{mT} :

$$\tau_R = k_R \tau_{mT} \quad (18)$$

Dónde: k_R - constante, y refleja la presencia de un esfuerzo que comprime a la fibra σ_{ff} , y si el coeficiente de roce seco k_s es conocido, entonces $k_R = (k_s \sigma_{ff})/\tau_{mT}$, resultando que la fuerza de rozamiento que actúa sobre el elemento de

fibra puede representarse como se muestra en la ecuación (19):

$$R/E_f F_f = \alpha_y^2 \cdot k_R u_T (\text{sign } \dot{u}_0) \quad (19)$$

La resistencia al corte entre los componentes del sistema y la fuerza de roce entre ellos se puede determinar experimentalmente, Figura 5 [10-12]. Sustituyendo la ecuación (19) en (14), en lugar de $T_0/E_f F_f$, obtenemos la ecuación (20) que es la ecuación de movimiento para el trozo desprendido de fibra fracturada:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \alpha_y \cdot k_R (\text{sign } \dot{u}) \quad (20)$$

Entonces es importante determinar la ecuación de movimiento de la fibra que se encuentra rodeada de fibras fragmentadas.

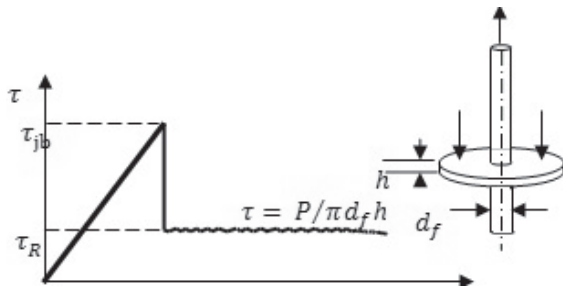


Figura 5 Esquema experimental para determinar la fuerza de adherencia τ_{jb} , y la fuerza de rozamiento entre la fibra y la matriz

Ecuación de movimiento de una fibra, rodeada de fibras fragmentadas

Como lo planteamos anteriormente, en el análisis de los efectos dinámicos nos limitamos a examinar tres capas de fibras que rodean a una fibra fracturada, suponiendo que $u_4 = u_5 = 0$, Figura 3. Las fuerzas tangenciales en la ecuación (9) $T_i / E_f F_f$ se expresan a través del desplazamiento de la fibra, pero considerando las distintas etapas de deformación al corte de la matriz, y la probabilidad de delaminación de la fibra fracturada, en lugar de dos sistemas de ecuaciones

para el campo de deformación elástica y elasto-plástica de la matriz al corte, durante el análisis de los efectos dinámicos tenemos cuatro sistemas de ecuaciones.

Para la etapa de deformación elástica al corte de la matriz se presenta el sistema de ecuaciones (21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \alpha_y^2 u_0 + \alpha_y^2 u_1 &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\alpha_y^2}{6} u_0 - \frac{2\alpha_y^2}{3} u_1 + \frac{\alpha_y^2}{3} u_2 + \frac{\alpha_y^2}{6} u_3 &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\alpha_y^2}{3} u_1 + \alpha_y^2 u_2 + \frac{\alpha_y^2}{3} u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Para la etapa de deformación plástica al corte de la matriz se presenta el sistema de ecuaciones (22):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \alpha_T^2 u_0 + \alpha_T^2 u_1 &= \alpha_0^2 u_T \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\alpha_T^2}{6} u_0 - \left(\frac{\alpha_T^2}{6} + \frac{\alpha_y^2}{2}\right) u_1 + \frac{\alpha_y^2}{3} u_2 + \frac{\alpha_y^2}{6} u_3 &= -(\alpha_0^2/6) u_T \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\alpha_y^2}{3} u_1 - \alpha_y^2 u_2 + \frac{\alpha_y^2}{3} u_3 &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \frac{\alpha_y^2}{6} u_1 + \frac{\alpha_y^2}{3} u_2 - \alpha_y^2 u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Para la etapa de relajación elástica de la matriz se presenta el sistema de ecuaciones (23):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \alpha_y^2 u_0 + \alpha_y^2 u_1 &= \alpha_0^2 [u_T - (u_0 - u_1)_{max}] \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\alpha_y^2}{6} u_0 - \frac{2\alpha_y^2}{3} u_1 + \frac{\alpha_y^2}{3} u_2 + \frac{\alpha_y^2}{6} u_3 &= \\ &= -(\alpha_0^2/6) u_T - (u_0 - u_1)_{max} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\alpha_y^2}{3} u_1 - \alpha_y^2 u_2 + \frac{\alpha_y^2}{3} u_3 &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \frac{\alpha_y^2}{6} u_1 + \frac{\alpha_y^2}{3} u_2 - \alpha_y^2 u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Para la etapa de delaminación de las fibras fracturadas de la matriz se presenta el sistema de ecuaciones (24):

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha_f^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \alpha_y^2 u_0 + \alpha_y^2 u_1 = \alpha_0^2 [u_T - (u_0 - u_1)_{max}]$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha_f^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\alpha_y^2}{6} u_0 - \frac{2\alpha_y^2}{3} u_1 + \frac{\alpha_y^2}{3} u_2 + \frac{\alpha_y^2}{6} u_3 = -(\alpha_0^2/6)u_T - (u_0 - u_1)_{max} \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha_f^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\alpha_y^2}{3} u_1 - \alpha_y^2 u_2 + \frac{\alpha_y^2}{3} u_3 = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha_f^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \frac{\alpha_y^2}{6} u_1 + \frac{\alpha_y^2}{3} u_2 - \alpha_y^2 u_3 = 0$$

Se supone que las deformaciones plásticas por cizalle de la matriz se desarrollan entre las fibras fracturadas y el primer cinturón de fibras que lo circundan, bajo condiciones de $(u_0 - u_1)/b_c > \gamma_T$. Las dos últimas ecuaciones en el sistema tienen la misma validez (21) y (24). Las condiciones de traslado de (22) a la (24), residen en que se alcanza una máxima deformación al corte en la matriz: $\gamma_{01(max)} = (u_0 - u_1)_{max} / b_c$.

Importancia de las propiedades inerciales de la matriz

En el marco del modelo propuesto, también es posible considerar la influencia de las propiedades inerciales de la matriz sobre la redistribución del esfuerzo al momento de la fractura de la fibra [13]. Para ello seleccionamos un elemento de fibra con matriz adherida a él, Figura 5. En nuestro caso utilizamos un modelo geométrico simplificado con un filamento de forma hexagonal y capas homogéneas de matriz entre ellos, Figura 1d. Conforme con la hipótesis sobre los vínculos de las deformaciones al corte de la matriz con los diversos desplazamientos de la fibra, suponemos, sin embargo, que ésta se satisface no en la superficie de la fibra, como antes, sino en el centro de las capas de matriz, que envuelven a la fibra.

Para ello proponemos analizar el movimiento de una fibra con matriz adherida, y consideramos tanto la presencia de las fuerzas de inercia, que surgen durante el desplazamiento del elemento de fibra, así como las fuerzas de inercia que surgen durante el movimiento de las capas de matriz, Figura 6. Este problema puede ser descrito mediante la ecuación (25).

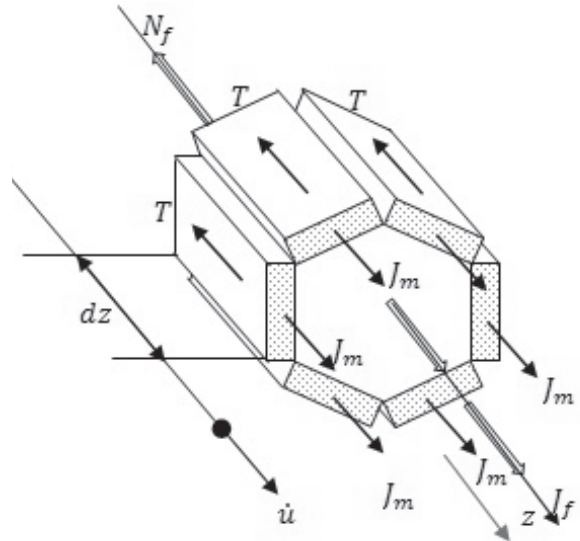


Figura 6 Fuerzas aplicadas sobre un elemento de fibra en desplazamiento con matriz adherida

$$dN_{fi} - \sum_j T_{ij} + I_{fi} + \sum_j I_{mij} = 0 \quad (25)$$

Donde: $I_{fi} = -dm_f \ddot{u}_{fi}$ que es la fuerza de inercia del elemento de fibra; $I_{mij} = -dm_m \ddot{u}_{mij}$ que son las fuerzas de inercia de la porción media de una capa de matriz en movimiento adherida a una fibra analizada i . El área de la mitad del segmento de matriz puede expresarse a través del área de la fibra como $(F_f(1-V_f)/6V_f)$, y como se muestra en la ecuación (26), su masa es:

$$dm_m = \rho_m dz \cdot F_f(1-V_f)/6V_f \quad (26)$$

Donde: ρ_m - densidad del material de la matriz. La aceleración del centro de gravedad del elemento de matriz, adyacente a la fibra analizada \ddot{u}_{mij} ,

puede expresarse a través de la aceleración de las fibras correspondientes \ddot{u}_i y \ddot{u}_j . Como se cumple el supuesto de que los desplazamientos en el elemento de matriz son lineales, de varias construcciones geométricas, figura 7, se tiene que $u_{mij} = (3/4)(\ddot{u}_i - u_j)$, y entonces, obtenemos la ecuación (27):

$$\ddot{u}_{mij} = (3/4)(\ddot{u}_i - \ddot{u}_j) \quad (27)$$

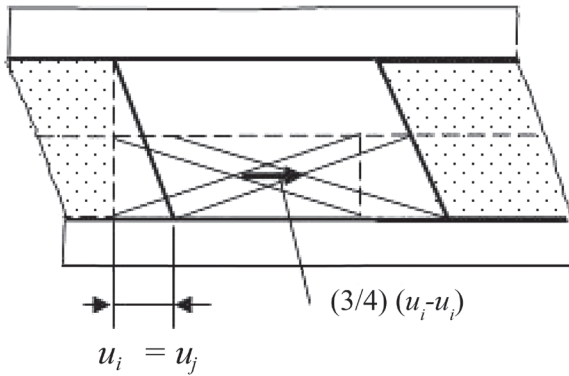


Figura 7 Desplazamiento del centro de gravedad del elemento de matriz adherida

Considerando (26) y (27), así como en los casos anteriores (12), pasamos de la ecuación (25) a la ecuación de desplazamiento (28):

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} - \frac{\rho_f}{E_f} \ddot{u}_i - \frac{1}{6} \cdot \sum_j^6 \frac{\rho_m}{E_f} \cdot \frac{1 - V_f}{V_f} \cdot \frac{3}{4} (\ddot{u}_i - \ddot{u}_j) - \sum_j^6 \frac{T_{ij}}{E_f F_f} = 0 \quad (28)$$

Análogamente a $1/(a_f^2) = \rho_f/E_f$, introducimos un parámetro a_m de tal forma que obtenemos la ecuación (29):

$$\frac{1}{a_m^2} = \frac{\rho_m}{G_m} \cdot \frac{G_m}{E_m} \cdot \frac{1 - V_f}{V_f} \cdot \frac{3}{4} \quad (29)$$

Destacamos, que $\sqrt{E_f/\rho_f}$, es la velocidad de las ondas elásticas de tensión-compresión en la fibra; $\sqrt{G_m/\rho_m}$ - velocidad de las ondas de

cizalle en el material de la matriz. Así, este parámetro, que depende tanto de la rigidez de los componentes, así como de las fracciones de volúmenes, por lo visto, se puede interpretar como una determinada velocidad efectiva de transferencia de la perturbación en dirección transversal (lógicamente, dentro del marco del modelo propuesto). Considerando el parámetro introducido, la ecuación (28) toma la forma mostrada en la ecuación (30):

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \ddot{u}_i - \frac{1}{a_m^2} \sum_j^6 \frac{\ddot{u}_i - \ddot{u}_j}{6} - \sum \frac{T_{ij}}{E_f F_f} = 0 \quad (30)$$

donde T_i - como anteriormente, tiene formas diferentes para las distintas etapas de la deformación elástico-plástica de la matriz al corte. Para el caso de una deformación puramente elástica de la matriz al corte, conforme a (29) y (20), se plantea el sistema de ecuaciones mostrado en (31) que considera las propiedades inerciales tanto de la fibra, así como de la matriz:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \ddot{u}_0 - \frac{1}{a_m^2} (\ddot{u}_0 - \ddot{u}_1) - a_f^2 (u_0 - u_1) = 0 \\ & \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \ddot{u}_1 - \frac{1}{a_m^2} \left[\frac{(\ddot{u}_1 - \ddot{u}_0)}{6} + \frac{2(\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2)}{6} + \frac{(\ddot{u}_1 - \ddot{u}_3)}{6} \right] - \\ & - a_f^2 \left[\frac{(u_1 - u_0)}{6} + \frac{2(u_1 - u_2)}{6} + \frac{(u_1 - u_3)}{6} \right] = 0 \quad (31) \\ & \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \frac{1}{a_f^2} \ddot{u}_2 - \frac{1}{a_m^2} \left[\frac{2(\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1)}{6} + \frac{2}{6} + \frac{(\ddot{u}_2 - \ddot{u}_3)}{6} + \frac{2(\ddot{u}_2 - \ddot{u}_4)}{6} \right] - \\ & - a_f^2 \left[\frac{2(u_2 - u_1)}{6} + \frac{2(u_2 - u_3)}{6} + \frac{2(u_2 - u_4)}{6} \right] = 0 \end{aligned}$$

Esto es en función de la cantidad de capas de fibras analizadas.

Efectos dinámicos a considerar

El análisis de los efectos dinámicos, relacionados con el rompimiento de las fibras, permite a profundidad, y en muchos casos desde nuevas posiciones comprender y explicar el desarrollo de los procesos de fractura de los materiales compuestos a nivel micro estructural [14-16]. Por ejemplo, queda claro la probabilidad de fragmentación del filamento en trozos

significativamente menor a la longitud crítica y, por lo tanto, se explica la presencia de segmentos cortos de fibras cuando se lleva a cabo un análisis micro estructural de los especímenes ensayados [17-20]. La fragmentación de la fibra en el hueco de una micro grieta en desarrollo conduce a un incremento de la tenacidad de la fractura del compuesto a costa de una disipación adicional de la energía [21]. Contemplar la dinámica de la redistribución del esfuerzo permite explicar la presencia de discontinuidades en el frente mismo de los concentradores de esfuerzos generados por el desarrollo de macro grietas o agudas entalladuras.

Considerando el carácter dinámico de la redistribución del esfuerzo cuando se fracturan las fibras, es importante el estudio de estos efectos mediante el uso de computadores [22-24]. Sin embargo, en el caso general, simular la relación entre los micro mecanismos de fractura, conjuntamente con la variación dinámica de los campos de tensión, es un problema extraordinariamente complejo y requiere disponer de una enorme cantidad de memoria y de tiempo-máquina para su solución.

La sistematización de los estudios de los diferentes efectos por separado, y la sintetización de los resultados obtenidos cuando se desarrollan modelos estructurales para el estudio de los fenómenos de fractura, permite directamente pronosticar las propiedades de resistencia de los compuestos. Tales efectos, consecuencia del carácter dinámico de la redistribución del esfuerzo durante el rompimiento de la fibra, permiten entender los mecanismos de fractura a nivel micro estructural, y que deben ser considerados en el desarrollo de modelos computarizados de la fractura, y estos pueden ser formulados de la siguiente manera:

1. En las fibras, adyacentes a las fracturadas, surgen ondas de sobrecarga, las cuales, desplazándose a lo largo de ellas, puede ocasionar su ruptura en lugares significativamente alejados donde tuvo lugar

la fractura primaria. Esta circunstancia es empleada directamente en la construcción de modelos estructurales discretos de compuestos.

2. La sobrecarga dinámica de una fibra adyacente a una fracturada en el plano de ruptura es dos veces superior que en el análisis estático de redistribución del esfuerzo. Esto permite simular el proceso de fractura del compuesto, producido por las sobre cargas localizadas, y reproducir el laberinto de los procesos secuenciales que conducen a la fractura de la fibra en los cortes transversales del material compuesto.
3. El movimiento de los segmentos delaminados de la fibra fracturada tiene características dramáticamente decrecientes; los segmentos se encuentran bajo el efecto de las fuerzas de roce. La inserción de los segmentos desprendidos junto con los infrautilizados a una longitud efectiva de fibra, lo torna dependiente de la realización de tales o cuales micro mecanismos de fractura. La simulación del proceso de delaminación con el uso de computadores requiere la evaluación de la longitud del segmento delaminado.
4. Durante el desarrollo de los procesos de delaminación de las fibras fracturadas, se debilita la sobrecarga en las fibras adyacentes, reduciendo la probabilidad de fracturas posteriores por sobrecargas localizadas. Esto proporciona la llave para comprender la interacción de estos micromecanismos de fractura, permitiendo simular estos procesos.
5. En la fibra fracturada, después de la onda de relajación surge la onda de sobrecarga, la cual, desplazándose a lo largo de la fibra, puede causar posteriores fracturas. La simulación directa de la interacción de las ondas de tensión con zonas de defectos localizados, permite representar los efectos de la fractura de las fibras cuando interfieren las ondas de tensión, surgidas desde diferentes orígenes.

Conclusiones

La fragmentación de la fibra en el vértice de una macro grieta en desarrollo, conduce a un incremento de la tenacidad de la fractura del compuesto a costa de una disipación adicional de la energía.

En las fibras, adyacentes a las fragmentadas, surgen ondas de sobrecarga que, al propagarse por las fibras, conducen a su rompimiento en zonas distantes al lugar donde se produjo el rompimiento inicial. Esta circunstancia se emplea directamente para construir un modelo discreto estructural de compuesto.

La dinámica de sobrecarga de las fibras, vecinas a las fracturadas, en el plano de ruptura es doblemente superior que para el caso de un análisis estático de redistribución del esfuerzo. Considerar este factor permite simular el proceso de fractura de la fibra producido por una sobrecarga localizada, y reproducir la sinuosidad de los procesos de fracturamiento secuencial de la fibra en el plano perpendicular al material compuesto.

El deslizamiento de los segmentos desprendidos de fibras fracturadas presenta un carácter claramente decreciente, y resulta que se encuentran bajo el efecto de fuerzas de roce. La inclusión de los segmentos desprendidos, junto con las partes no cargadas en una longitud no efectiva de fibra, la hace dependiente de la ejecución de tal o cual mecanismo de fractura.

Con el desarrollo de los procesos de delaminación de las fibras fracturadas se reduce la sobrecarga de la fibra adyacente, lo que conduce a una disminución de la probabilidad de ulteriores rompimientos por sobrecargas localizadas. Esto permite comprender la interrelación de este micro mecanismo de fractura y permiten su simulación.

En el filamento fracturado, después de la onda de fractura se forma una onda de sobrecarga, que al aproximarse a la fibra, puede ser la causa de ulteriores fracturas.

Un significado relevante reside en el hecho de que el segmento desprendido de la fibra resulta encontrarse parcialmente bajo carga. La presencia de las fuerzas de roce que actúan sobre el segmento desprendido durante su desplazamiento, conduce al surgimiento de esfuerzos tangenciales que influyen sobre él, incluso hasta después de que este movimiento deja de actuar.

Agradecimientos

El presente trabajo fue posible dentro del marco del proyecto SIP N°20121012, y el proyecto SIP 20121014, Instituto Politécnico Nacional, Secretaría de Investigación y Posgrado; Proyecto CONACyT, N° 84309.

Referencias

1. I. Kopyov, A. Ovchinsky, N. Bilsagayev. "Computer Simulation of Various Fracture Mechanisms in Fibrous Composite Materials". *Fracture of Composite Materials*. 1^{er} ed. Ed. Martinus Nijhoff Publishers. A. A. Baikov Metallurgy Institute, Academy of Science Moscow. Moscow, Russia. 1982. pp. 45-52.
2. A. Ovchinsky, I. Kopyov, N. Bilsagayev. "El método de trazar la deformación de los materiales compuestos de acuerdo con la distribución estadística de la fuerza en las fibras de refuerzo". *Mecánica de polímeros (Механика полимеров)*. No. 6. Ed. Polimēru mehānikas institūts, Latvijas Universitāte. Riga, Letonia. 1975. pp. 1021-1031.
3. E. Hait. "Fracture dynamic in reinforced composites". *Conferences*. No. 3. Ed. Russian Academy of Science. Moscow, Russia. 1975. pp. 572-774.
4. M. Stepanenko. "Numerical experiment on the dynamics of destruction of composite material". *Mexanika Kompozitnij materialov*. No. 1. 1981. pp. 53-59.
5. C. Guo, C. Sun. "Dynamic Mode-I crack-propagation in a carbon/epoxy composite". *Composites Science and Technology*. Vol. 58. 1998. pp. 1405-1410.
6. L. Greszczuk. "Theoretical studies of the mechanics of the fiber-matrix interface in composites". *Interfaces in composites*. Ed. American Society for Testing and Materials. New York, USA. 1969. pp. 42-58.
7. J. Ivens, H. Albertsen, M. Wevers, I. Verpoest, P. Peters. "Interlaminar fracture toughness of CFRP influenced by fiber surface treatment: Part 2. Modelling of the

- interface effect”. *Composites Science and Technology*. Vol. 54. 1995. pp. 147-159.
8. L. Wu, D. Tjahjanto, G. Becker, A. Makradi, A. Jérusalem, L. Noels. “A micro-meso-model of intralaminar fracture in fiber reinforced composites based on a discontinuous Galerkin / cohesive zone method”. *Eng. Fract. Mech.* Vol. 104. 2013. pp. 162-183.
 9. H. Albertsen, J. Ivens, M. Wevers, I. Verpoest, P. Peters. “Interlaminar fracture toughness of CFRP influenced by fibre surface treatment: Part I. Experimental results”. *Comp. Sci. Tech.* Vol. 54. 1995. pp. 133-47.
 10. L. Broutman. “Measurement of the fiber polymer matrix interfacial strength”. *Interfaces in composites*. Ed. American Society for Testing and Materials, 1st, ed. New York, USA. 1969. pp. 27-41.
 11. P. Yang, H. Sue. “Effects of fiber forms on compressive strength after impact of composites”. *Polym. Mater. Sci.* Vol.70. 1993. pp. 61-63.
 12. H. Chai. “Observation of deformation and damage at the tip of cracks in adhesive bonds loaded in shear and assessment of a criterion for fracture”. *Int. J. Fract.* Vol. 60. 1993. pp. 311-326.
 13. E. Pietropaoli, “Progressive Failure Analysis of Composite Structures Using a Constitutive Material Model (USERMAT) Developed and Implemented in ANSYS ©”. *Appl. Compos. Mater.* Vol. 19. 2012. pp. 657-668.
 14. F. Greco, L. Leonetti, P. Lonetti. “A two-scale failure analysis of composite materials in presence of fiber/matrix crack initiation and propagation”. *Composite Structures*. Vol. 95. 2013. pp. 582–597.
 15. L. Lammerant, I. Verpoest. “Modelling of the interaction between matrix cracks and delaminations during impact of composite plates”. *Composites Science and Technology*. Vol. 56. 1996. pp. 1171–1178.
 16. M. Tamayo. *Evaluation of the Adherence Force of Aluminum Fibers in Composites Obtained by Plasma Deposition*. IPCM-89, Proceeding, University of Sheffield. Sheffield, UK. 1989. pp. 5-7.
 17. T. Cheng, R. Qiao, Y. Xia. “A Monte Carlo simulation of damage and failure process with crack saturation for unidirectional fiber reinforced ceramic composites”. *Composites Science and Technology*. Vol. 64. 2004. pp. 2251-2260.
 18. Z. Mikulika, D. Kellya, B. Prusty, R. Thomsonb. “Prediction of flange debonding in composite stiffened panels using an analytical crack tip element-based methodology”. *Composite Structures*. Vol. 85. 2008. pp. 233-244.
 19. A. Ayyara, N. Chawlab. “Microstructure-based modeling of crack growth in particle reinforced composites”. *Composites Science and Technology*. Vol. 66. 2006. pp. 1980-1994.
 20. S. Soni, R. Kim. “Delamination of composite laminates stimulated by interlaminar shear”. J. Whitney (editor). *Composite Materials: Testing and Design*. Ed. American Society for Testing and Materials. New York, USA. 1986. pp. 7-33.
 21. S. Pemberton, E. Oberg, J. Dean, D. Tsarouchas, A. Markaki, L. Marston, T. Clyne. “The fracture energy of metal fibre reinforced ceramic composites (MFCs)”. *Composites Science and Technology*. Vol. 71. 2011. pp. 266-275.
 22. Y. Zhang, C. Yang, “Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates.” *Journal of Composite Structures*. Vol. 88. 2009. pp. 147-157.
 23. Y. Taoling, L. Yunbo, J. Wang. “A study of the propagation of an embedded crack in a composite laminate of finite thickness”. *Composite Structures*. Vol. 59. 2003. pp. 473-479.
 24. J. Tan, J. Elliot, T. Clyne. “Analysis of tomography images of bonded fiber networks to measure distributions of fiber segment length and fiber orientation”. *Advanced Engineering Materials*. Vol. 8. 2006. pp. 495-500.