

Identificación con estimación para sistemas tipo caja negra

Black box systems identification with estimation

José de Jesús Medel Juárez^{1}, María Teresa Zagaceta Álvarez², Rosaura Palma Orozco³*

¹Centro de Investigación en Computación, Instituto Politécnico Nacional. Calle Venus S/N, Col. Nueva Industrial Vallejo. C. P. 07738. México D.F., México.

²Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Azcapotzalco, Instituto Politécnico Nacional. Av. De las Granjas N.- 682 Col. Santa Catarina. C. P. 02250. México, D.F., México.

³Escuela Superior de Cómputo, Unidad Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional. Calle Venus S/N, Col. Nueva Industrial Vallejo. C. P. 07738. México. D.F., México.

(Recibido el 08 de marzo de 2013. Aceptado el 16 de junio de 2014)

Resumen

En un sistema tipo caja de negra, los parámetros internos no son observables con respecto a su relación entrada-salida. Se desarrolla un estimador para describirlos, basado en el segundo momento de probabilidad. Los resultados obtenidos en la estimación en conjunto con el funcional de error y el proceso de innovación son necesarios para que funcione la estructura de identificación. Esto se conoce como el proceso de filtrado con adaptación. Con base a los resultados obtenidos se logró un buen nivel de convergencia con respecto a la señal de referencia, que ilustrativamente, se ejemplifica a través de la simulación, de forma tal, que el comportamiento dinámico de un motor de corriente continua (CC) se describe por el filtro adaptativo sin conocer su funcionamiento interno, resultados que fueron comparados con una metodología similar descrita en [1].

-----*Palabras clave:* Filtro digital, Estimador, Identificador, Funcional de Error, Gradiente Estocástico

* Autor de correspondencia: José de Jesús Medel Juárez, e-mail: jjmedelj@yahoo.com.mx; teléfono: + 01 52 57296000, ext. 56570, (J. Medel)

Abstract

In a black box system the internal parameters are not observables between input-output relationships. An approach is made knowing as estimation, based on the second probability moment. These results with a functional error and the innovation process are needed into identification structure. This process is known as an adaptive filter. Achieving a good convergence level with respect to the reference signal illustratively exemplified into simulation. The DC motor dynamical behavior is described by an adaptive filter without knowing the internal operation. Results compared with a methodology considered in [1].

-----**Keywords:** Digital Filter, Estimator, Functional Error, Identification, Stochastic Gradient

Introducción

Cuando se requiere modelar un sistema físico es necesario realizar una validación de modelos matemáticos de los diferentes procesos que en él intervienen. La diferencia del comportamiento entre el sistema de referencia y su representación matemática tiende a ser la mínima en algún sentido. Buscar un modelo matemático es encontrar una relación matemática entre la salida y la entrada del sistema. En particular la dinámica interna (descrita por los estados no observables del sistema) se relaciona matemáticamente con la salida y la entrada (estados observables del sistema) a través de la función de transferencia [1]. Los *sistemas* considerados como *cajas negras* solo permiten conocer a la función de transferencia sin la posibilidad de acceder a sus dinámicas internas de manera directa. Para ello se realiza el proceso de filtrado compuesto por la estimación e identificación, que de manera indirecta describen la dinámica de los estados a través de un estimador usando a la variable instrumental y la señal observable retardada, que afecta a la matriz de transición y así al identificador mediante la señal retardada del sistema de referencia [2]. La descripción del comportamiento de un sistema tipo caja negra se hace fuera de línea, comúnmente a través de ecuaciones diferenciales; sin que ello permita conocer que ocurre dentro del sistema y menos como se da una determinada evolución [3, 4]. La primera estructura recursiva de identificación

implementada dentro de un sistema computacional se presentó en [5]. La identificación de la dinámica interna del sistema tipo caja negra se basa en la función de la transición [6], que en su forma más simple corresponde a la primitiva de la ecuación diferencial del modelo de referencia [7]. Pero en ningún caso se conoce a la ganancia los coeficientes de la primitiva y en consecuencia la ganancia interna del sistema de referencia. Ilustrativamente la acción del filtro digital como identificador puede verse en la figura 1.

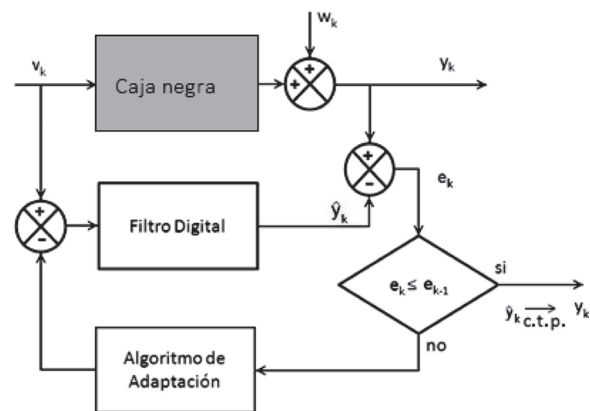


Figura 1 Esquema del Filtro digital adaptativo

La forma de describir la evolución externa del sistema de referenciase logra por los métodos de interpolación [8]. Una vez que se obtiene la convergencia en algún sentido predefinido, se cuenta con un modelo que describe la respuesta

del sistema; pero sin que ello signifique el haber descrito a su dinámica ni ganancias internas [9]. En la teoría de control, las ecuaciones en el espacio de estados describen la salida del sistema en función de los parámetros y estados internos; lo cual no es posible lograrlo en sistemas tipo caja negra, ya que los parámetros y estados internos son desconocidos [10]. En el caso de los sistemas tipo caja negra, descritos en espacio de estados, se considera que se pueden tener de manera explícita a los parámetros a través de sus señales de entrada como de salida [11]. La estimación de los parámetros internos dentro del espacio de estados de acuerdo con [11] fue el objetivo de ese trabajo para lograr que la señal del modelo converja a la del sistema [12]. Una vez estimado y observada la respuesta del modelo respecto del sistema tipo caja negra, por medio de un algoritmo de adaptación, se logra encontrar la mejor evolución de los parámetros internos y así lograr la convergencia de la respuesta del modelo a la del sistema de referencia [13]. Las técnicas de estimación se clasifican en recursivos y no recursivos. Las técnicas no recursivas procesan toda la información de entrada-salida disponible y posteriormente entregan un vector con los parámetros del sistema. Las técnicas recursivas a medida que van procesando la información calculan los parámetros del modelo [14]. Una vez obtenidos los parámetros, se desarrolla la función de transición correspondiente [15]. La dinámica interna del sistema de referencia en su forma más sencilla puede ser vista de manera lineal y estacionaria en el sentido de probabilidad [16] de acuerdo con [17, 18]; se logra observar sus propiedades de estabilidad en relación a la función de transición propuesta.

Como ejemplo de estimación recursiva [19], se puede mencionar a la predicción de las trayectorias de navegación para lograr el control de una nave espacial, con la tarea de llevarla a un objetivo específico. El proceso de estimación tradicional resulta no realizable si la función de transición no está acotada [20, 21]. Para el desarrollo de la estimación se consideran: 1) *las condiciones estacionarias*, 2) *el error de seguimiento*, 3)




el criterio para ajustar al estimador y, 4) *el observar a la función de transición* [22]. El error de seguimiento se obtiene entre la diferencia de la respuesta del sistema de referencia y la emitida por el estimador dentro del modelo. Para lograr la identificación es necesario conocer la función de transición y en ella los parámetros a través del segundo momento de probabilidad ya que nos permite conocer la varianza. Una vez estimados los parámetros internos, se procede a construir la función de transición a usarse en la identificación del estado interno del sistema de referencia. En el caso presente al usar un modelo de referencia, se compara la señal del identificador y se encuentra un funcional del error construido en base al segundo momento de probabilidad, que permite corregir al estimador y al propio identificador de manera dinámica, logrando que la interacción lleve al filtro a una región de convergencia y así llegar al valor de identificación deseado. El estimador e identificador se relacionan por el funcional del error, lo cual permite obtener un filtro digital dinámico, descrito a través de este trabajo para un sistema mono-variable y estacionario de una sola entrada y salida SISO, de acuerdo al siguiente orden: el estimador obtenido es del tipo gradiente estocástico teniendo acceso a la salida del sistema, el identificador es descrito por el modelo de salida recursivo propuesto, el funcional del error se expresa de manera recursiva y afecta a ambos procesos [23]. La simulación considera un ejemplo detallado de la ganancia de un motor de CC, que a través de un modelo de referencia se logra observar las fronteras entre la estimación y la identificación, así como su interacción dinámica; se presentan las conclusiones. En general se destaca la importancia de la función de transición dentro de la identificación y el desarrollo de un filtro estimador adaptativo.

Experimentación

El proceso de adaptación en el estimador queda descrito a través del funcional del error entre el sistema de referencia y el sistema es estudio. Tal que en este trabajo se desarrolla un estimador para posteriormente integrarlo dentro de un

identificador usando el modelo de referencia de primer orden estocástico, invariante en el tiempo, descrito en diferencias finitas, utilizando la simbología mostrada en la tabla 1.

Tabla 1 Símbolos usados en los diagramas de bloques

Símbolos usados en los diagramas a bloques	
→	Vector de señal de entrada o salida del sistema
	Retardo de la señal, $x_{k-1} := x_k z^{-1}$
	Sumador algebraico de señales
	Multiplicador algebraico de señales

El sistema de referencia, de acuerdo con [24] es descrito por el proceso ARMA(1,1) (Auto

Regresvie Moving Average, acrónimo por sus siglas en inglés) de forma recursiva y que en espacio de estados de acuerdo con [25] tiene la forma $x_{k+1} = a_k x_k + b_k v_k$ con salida: $y_k = c_k x_k + d_k w_k$, como se observa en la figura 2, en donde $\{w(k), k \geq 0\}$ es un proceso estocástico discreto y representado de forma simbólica por $\{w_{k_i}, k_{i=0}, k_{i=1}, k_{i=2}, \dots\}$. Tal que para cualquier conjunto arbitrario de puntos $\{k_i\}$ se tiene la distribución asociada a la variable aleatoria w_{k_i} con $i=0, 1, 2$ hasta $n \in \mathbb{Z}_+$. El proceso se considera Gaussiano, si para cualquier conjunto finito de puntos $k_{i=0}, k_{i=1}, k_{i=2}, \dots, k_{i=n}$ y sus variables aleatorias correspondientes w_{k_i} son mutuamente excluyentes con distribución normal para todo k_i ; llamándose así *Proceso Estocástico Gaussiano*, expresado como $N(\mu=k, \sigma^2 < \infty)$. De igual forma para $\{v_k, k \geq 0\}$, es un *Proceso Estocástico Gaussiano* $N(\mu=k, \sigma^2 < \infty)$.

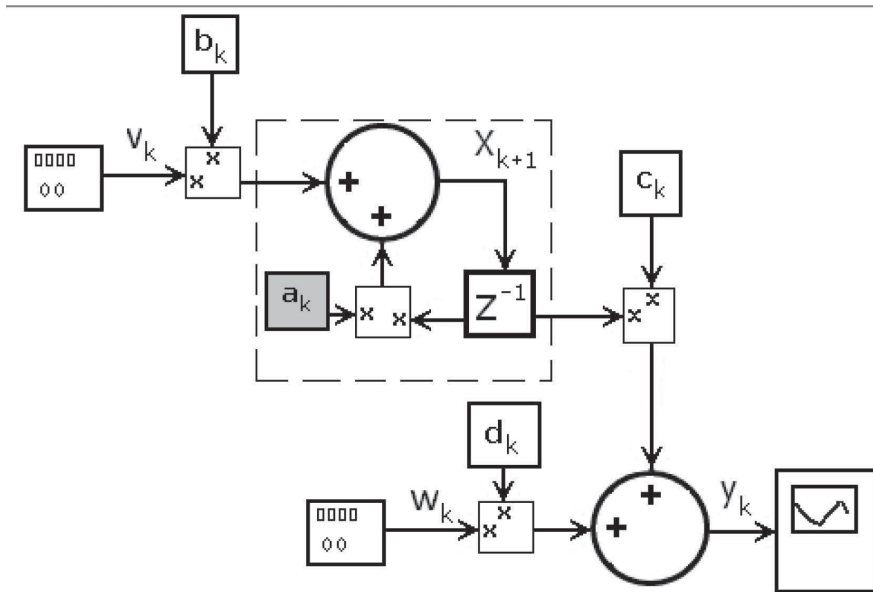


Figura 2 Diagrama de Bloques del sistema de referencia

En la figura 2 se describe por diagrama a bloques el espacio de estados del sistema, incluyendo las perturbaciones que lo alteran, tanto internas (v_k), como externas (w_k). Dentro de la caja con línea discontinua, se encuentra lo que se conoce como

dinámica interna del sistema descrito en espacio de estados en su forma recursiva. En la figura 3, se muestra el diagrama del modelo propuesto en este trabajo, en donde la salida del sistema de referencia y el sistema aproximado, se utilizan

para conocer el funcional del error considerando la varianza de los ruidos $J(k)$ ya que respecto al gradiente estocástico del funcional ∇J_k , es posible obtener el estimador de parámetros internos del sistema \hat{a}_k . El identificador se obtiene a través del funcional del error, estimador de parámetros y el estado observable retardado.

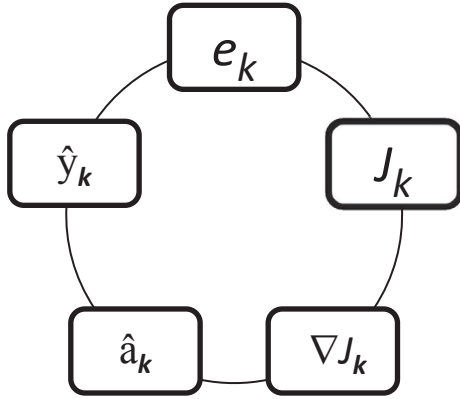


Figura 3 Filtro digital adaptativo: estimador - identificador

Como puede observarse en la figura 3, el filtro de identificación, requiere conocida o estimada la matriz de parámetros internos del sistema. A continuación se describe como se integran la estimación y la identificación implementada en el filtro [26].

Resultados

Teorema 1. (Estimación de parámetros adaptativo SISO). Considérese que un sistema es descrito por el modelo estocástico de primer orden expresado en diferencias finitas en (1).

$$x_{k+1} = a_k x_k + b_k v_k; \dots y_k = c_k x_k + d_k w_k. \quad (1)$$

Tiene un tiempo de evolución acotado $\tau_k < \infty$ de acuerdo con [27] en donde f_{max_k} es la frecuencia representativa del sistema y está acotada $f_{max_k} < \infty$ [28] respecto de $\{w(k), k \geq 0\}$ y $\{v(k), k \geq 0\}$ como procesos estocásticos discretos descritos acotados [29] por $N(\mu_w = k_w, \sigma^2 < \infty)$, $k_w \in \mathbb{R}_+$, $N(\mu_v = k_v, \sigma^2 < \infty)$, $k_v \in \mathbb{R}_+$ y que cumplen con x_k, x_{k+1}

$\in \mathbb{R}_+^{[n \times 1], k}$ así como con los parámetros $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}_+^{1, k}$. Su estimador en función del estado identificado \hat{y}_k es descrito en (2).

$$\hat{a}_k = \langle y_{k-1}, \hat{y}_k \rangle \langle y_{k-1}, y_{k-1} \rangle^+ \quad (2)$$

Donde $(\cdot)^+$ describe la pseudo-inversa.

Prueba. Considérese a [30] que el funcional del error de manera recursiva descrito es descrito en (3).

$$J_k = \frac{1}{k} (E\{e_k^2\} + (k-1)J_{k-1}) \quad (3)$$

Con error $e_k := y_k - \hat{y}_k$, despejando el estado x_k de la salida del sistema (1) se tiene (4):

$$x_k = y_k c_k^{-1} - d_k w_k c_k^{-1} \quad (4)$$

Sustituyendo en el estado no observable x_k del sistema (1) a (4) se obtiene (5)

$$x_{k+1} = a_k (c_k^{-1} y_k - c_k^{-1} d_k w_k) + b_k v_k \quad (5)$$

Considerando los ruidos $\varepsilon_k = b_k v_k - a_k c_k^{-1} d_k w_k$. Retrasando (5) y sustituyendo en (1) se tiene (6)

$$y_k = \tilde{a} y_{k-1} + \omega_k \quad (6)$$

Donde $\tilde{a} = c_k a_{k-1} c_{k-1}^{-1}$, $\omega_k = c_k \varepsilon_{k-1} + d_k w_k$ que al sustituir la salida (6) en el error de identificación se tiene la forma (7).

$$e_k = \tilde{a} y_{k-1} + \omega_k - \hat{y}_k \quad (7)$$

Al desarrollar el cuadrado de e_k de acuerdo con (3), se tiene (8)

$$e_k^2 = \tilde{a}^2 y_{k-1}^2 + \omega_k^2 + \hat{y}_k^2 + 2(\tilde{a} y_{k-1} \omega_k - \tilde{a} y_{k-1} \hat{y}_k - \omega_k \hat{y}_k) \quad (8)$$

Sustituyendo en (8) en el funcional (3), se tiene (9).

$$J_k = \frac{1}{k} (\tilde{a}^2 E\{y_{k-1}^2\} + E\{\omega_k^2\} + E\{\hat{y}_k^2\} + 2(\tilde{a} E\{y_{k-1} \omega_k\} - \tilde{a} E\{y_{k-1} \hat{y}_k\} - E\{\omega_k \hat{y}_k\})) + (k-1)J_{k-1}). \quad (9)$$

El gradiente estocástico de (9) respecto de \tilde{a} se describe en (10).

$$\nabla J_k|_{\tilde{a}} = 2\tilde{a}E\{y_{k-1}^2\} + 2(E\{y_{k-1}\omega_k\} - E\{y_{k-1}\hat{y}_k\}) \quad (10)$$

Lo que genera un punto de equilibrio en el origen como se ve en (11).

$$2\tilde{a}E\{y_{k-1}^2\} + 2(E\{y_{k-1}\omega_k\} - E\{y_{k-1}\hat{y}_k\}) = 0 \quad (11)$$

Quedando el estimador con perturbaciones en el tiempo k (12).

$$\tilde{\tilde{a}}_k = (E\{y_{k-1}\hat{y}_k\} - E\{y_{k-1}\omega_k\})(E\{y_{k-1}^2\})^+ \quad (12)$$

La descripción (12) de acuerdo con las propiedades de Hilbert, el operador de esperanza matemática queda descrita a través del producto punto (13)

$$\tilde{\tilde{a}}_k = \langle y_{k-1}, \hat{y}_k - \langle y_{k-1}, \omega_k \rangle \rangle \langle y_{k-1}, y_{k-1} \rangle^+ \quad (13)$$

(13) está en función del estado identificado \hat{y}_k y con ruidos ortogonales con el estado observable, tiene la forma (14).

$$\tilde{\tilde{a}}_k = \langle y_{k-1}, \hat{y}_k \rangle \langle y_{k-1}, y_{k-1} \rangle^+ \blacksquare. \quad (13)$$

Teorema 2 (Estimación recursiva). El modelo (2) con las propiedades de invarianza, tiene la forma recursiva, como se observa en (14).

$$\tilde{\tilde{a}}_k = m_k \tilde{\tilde{a}}_{k-1} + \tilde{\mathcal{S}}_k \quad (14)$$

Donde $\tilde{\tilde{a}}_k$ es descrita en (2).

Prueba. Al considerar que (2) es un proceso estacionario y por las propiedades de los espacios de Hilbert se tiene (15).

$$\tilde{\tilde{a}}_k = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{i-1} \hat{y}_i \right) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{i-1}^2 \right)^+ \quad (15)$$

En donde el numerador de (15), se describe en (16) como P_k .

$$P_k := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{i-1} \hat{y}_i \quad (16)$$

En (17) se cuenta con el retardo de P_k .

$$P_{k-1} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} y_{i-1} \hat{y}_i \quad (17)$$

Al considerar a (17) en (16) se obtiene (18) como una forma recursiva de P_k .

$$P_k = \frac{1}{k} \left(y_{k-1} \hat{y}_k + (k-1) P_{k-1} \right) \quad (18)$$

La expresión (18) en (15) da como resultado (19):

$$\tilde{\tilde{a}}_k = \frac{1}{k} \left(y_{i-1} \hat{y}_i + (k-1) P_{k-1} \right) q_k^+ \quad (19)$$

Multiplicando en (19) por $q_{k-1} (q_{k-1})^+$ donde q_k^+ es el denominador de (15). Al considerar a (15) con un retardo se define $\tilde{\tilde{a}}_{k-1} := P_{k-1} (q_{k-1})^+$. Y que ambas consideraciones usadas en (20):

$$\tilde{\tilde{a}}_k = \frac{1}{k} \left[y_{k-1} \hat{y}_k + (k-1) \tilde{\tilde{a}}_{k-1} q_{k-1} \right] q_k^+ \quad (20)$$

Separando términos en (20) se obtiene (21):

$$\tilde{\tilde{a}}_k = \frac{(k-1)}{k} q_{k-1} q_k^+ \tilde{\tilde{a}}_{k-1} + \frac{y_{k-1} \hat{y}_k q_k^+}{k} \quad (21)$$

Cuyos estados son descritos en (22):

$$m_k := \frac{(k-1)}{k} q_{k-1} q_k^+, \tilde{\mathcal{S}}_k = \frac{1}{k} y_{k-1} \hat{y}_k q_k^+ \quad (22)$$

Y que reducen a (22) a la estructura de (14) \blacksquare .

Una vez que se obtiene el parámetro recursivo de acuerdo a la identificación, ese resultado, sin que el sistema de referencia cuente con otra evolución, es posible realizar la identificación por segunda ocasión.

Teorema 3 (Identificación de estados internos para sistemas tipo SISO). El estado interno del sistema (x_k) descrito en (1), tiene como identificador a (23):

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{\tilde{a}}_k \hat{x}_k + \tilde{\mathcal{S}}_k \hat{w}_k \quad (23)$$

Y es óptimo si $\tilde{\gamma}_k$ está descrito en (24).

$$\tilde{\gamma}_k = \hat{\alpha}_k J_k c_k (c_k^2 J_k + R_k)^{-1} \in \mathbb{R}_+^{1,k} \quad (24)$$

Con error descrito en (11) y funcional del error basado en el segundo momento de probabilidad así como la varianza del ruido descritos en (25).

$$J_k := E\{e_k^2\}, R_k := E\{w_k^2\}, a_k, c_k, J_k, R_k \in \mathbb{R}_+^{1,k} \quad (25)$$

Prueba. El identificador expresado en (23) en relación a los estados internos (x_k) y su identificador (\hat{x}_k), descritos en (1) tienen como error de identificación la forma descrita en (26).

$$e_{k+1} = a_k x_k + b_k v_k - (\hat{\alpha}_k \hat{x}_k + \tilde{\gamma}_k \hat{w}_k) \quad (26)$$

El proceso de innovación es definido en (27).

$$\hat{w}_k := \hat{y}_k - c_k \hat{x}_k \quad (27)$$

Al sustituir (27) en (26), se obtiene (28).

$$e_{k+1} = a_k x_k + b_k v_k - (\hat{\alpha}_k \hat{x}_k + \tilde{\gamma}_k (\hat{y}_k - c_k \hat{x}_k)) \quad (28)$$

En donde la señal observable (y_k) en (27) es sustituida por (1) así como $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{w}_k \xrightarrow{c.d.p} w_k$. Al agrupar por términos el error (e_{k+1}) se describe en (29).

$$e_{k+1} = (a_k - \tilde{\gamma}_k c_k) x_k + b_k v_k - (\hat{\alpha}_k - \tilde{\gamma}_k c_k) \hat{x}_k - \tilde{\gamma}_k w_k \quad (29)$$

Los valores propios del parámetro cumplen $\{\lambda_i(\hat{\alpha}_k)\} \subseteq (0,1,k)$, que son las condiciones de estabilidad desde un punto de vista robusto para sistemas discretos variantes. Considerando que $(\hat{\alpha}_k - \tilde{\gamma}_k c_k)$, es factor común en los estados internos del sistema de referencia (x_k) y sus estados identificados (\hat{x}_k), como se ve en (30).

$$e_{k+1} = (\hat{\alpha}_{k,k} - \tilde{\gamma}_k c_k)(x_k - \hat{x}_k) + b_k v_k - \tilde{\gamma}_k w_k \quad (30)$$

El error del estado interno $e(x_k) := (x_k - \hat{x}_k)$, que es proporcional al error de los estados observables $e(x_k) \equiv e_{k^*}$, de acuerdo con (30) se describe en (31).

$$e_{k+1} = (\hat{\alpha}_k - \tilde{\gamma}_k c_k) e_k + b_k v_k - \tilde{\gamma}_k w_k \quad (31)$$

Al ser $\tilde{\alpha}_k := (\hat{\alpha}_k - \tilde{\gamma}_k c_k)$, la expresión (31) aplica el segundo momento de probabilidad y se obtiene (32).

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha}_k^2 E\{e_k^2\} + E\{v_k^2\} b_k^2 + E\{w_k^2\} \tilde{\gamma}_k^2 + \\ & 2(\tilde{\alpha}_k b_k E\{e_k v_k\} - \tilde{\alpha}_k \tilde{\gamma}_k E\{e_k w_k\} - b_k \tilde{\gamma}_k E\{v_k w_k\}) \end{aligned} \quad (32)$$

Con ruidos independientes (32), se reduce a (33).

$$J_{k+1} = J_k \tilde{\alpha}_k^2 + Q_k b_k^2 + R_k \tilde{\gamma}_k^2 \quad (33)$$

Remplazando en (33) a $(\tilde{\alpha}_k)$ se obtiene (34).

$$J_{k+1} = J_k (\hat{\alpha}_k - \tilde{\gamma}_k c_k)^2 + Q_k b_k^2 + R_k \tilde{\gamma}_k^2 \quad (34)$$

Desarrollando (34) el funcional J_{k+1} se describe recursivamente en (35).

$$J_{k+1} = J_k \hat{\alpha}_k^2 - 2\tilde{\gamma}_k c_k J_k \hat{\alpha}_k^2 - \hat{\alpha}_k^2 J_k c_k \tilde{\gamma}_k^2 + J_k c_k^2 \tilde{\gamma}_k^2 + Q_k b_k^2 + R_k \tilde{\gamma}_k^2 \quad (35)$$

El gradiente estocástico $(\nabla J_{k+1} |_{\tilde{\gamma}_k})$ para (35) se presenta en (36).

$$\nabla J_{k+1} |_{\tilde{\gamma}_k} = -\hat{\alpha}_k J_k c_k + \tilde{\gamma}_k [J_k c_k^2 + R_k] \quad (36)$$

De (36) al ser un óptimo la ganancia (\tilde{K}_k) se resume a la forma de (37).

$$\tilde{\gamma}_k = \hat{\alpha}_k J_k c_k (J_k c_k^2 + R_k)^{-1} \blacksquare \quad (37)$$

Simulación

Los resultados obtenidos en la ecuación (12) para estimar los parámetros internos de un sistema visto como caja negra. Se propone describir el comportamiento dinámico de un motor de Corriente Continua (CC) tipo serie descrito en la ecuación (34) y esquemáticamente representado en la figura 4.

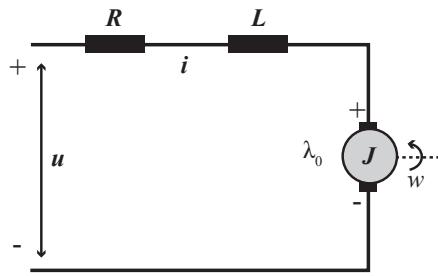


Figura 4 Diagrama esquemático del motor de CC

Quedando descrito cada uno de sus estados en la tabla 2.

Tabla 2 Designación de variables dentro del esquema de motor de CC

Estados	Constantes
i = Corriente de la armadura	R = Resistencia de armadura
u = Voltaje entre terminales	L = inductancia de armadura
w = Velocidad del eje del rotor	λ_0 = Constante de la fuerza electromotriz
TL = Par de carga	M = Momento de inercia del rotor y la carga

Una vez representado el modelo matemático del comportamiento dinámico del motor expresado por las ecuaciones eléctrica (38) y mecánica (39), de manera diferencial.

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \lambda_0 w(t) \quad (38)$$

$$M(t)w(t) = T_m(t) - T_L(t) \quad (39)$$

Donde (38) y (39) se describen en diferencias finitas en (40) y (41).

$$u(k) = Ri(k) + L(i(k) - i(k - \delta)) + \lambda_0 w(k) \quad (40)$$

$$u(k) = (R + L)i(k) - L(i(k - 1) + \lambda_0 w(k)) \quad (41)$$

δ es el de retardo entre un estado y otro dentro un sistema computacional. La ecuación (38) tiene la forma recursiva de la ecuación (12) expresada en el teorema 2; haciendo posible estimar los

parámetros internos del sistema tipo caja negra (motor de CC). Despejando a $i(k)$ de la ecuación (41) se obtiene (42)

$$\frac{u(k)}{(R + L)} = i(k) - \frac{L}{(R + L)}(i(k - 1) + \frac{\lambda_0}{(R + L)}w(k)) \quad (42)$$

La reactancia inductiva X_L ya que $X_L = L\alpha$ siendo $L\alpha$ un factor de proporcionalidad (43):

$$i(k) = \frac{1}{(R + X_L)}u(k) + \frac{X_L}{(R + X_L)}(i(k - \delta) - \frac{\lambda_0}{(R + X_L)}w(k)) \quad (43)$$

Entonces la ecuación (43) toma la forma (44) al considerar que de manera simbólica $i(k)$ queda descrita por i_k , $i(k - \delta)$ por $i_{k-\delta}$, $u(k)$ por u_k y $w(k)$ por w_k . Permitiendo que (43) se describa a través de (44)

$$i_k = \frac{X_L}{(R + X_L)}i_{k-\delta} + \frac{1}{(R + X_L)}u_k + \frac{\lambda_0}{(R + X_L)}w_k \quad (44)$$

La ecuación (44) se reescribe en (45).

$$i_k = ai_{k-\delta} + b_k u_k - c_k w_k \quad (45)$$

Considerando las condiciones iniciales cero, se obtiene (46)

$$i_k = ai_{k-\delta} - c_k w_k \quad (46)$$

Que de acuerdo a [23] haciendo $\tilde{w}_k = c_k w_k$ se tiene (47):

$$i_k = ai_{k-\delta} - \tilde{w}_k \quad (47)$$

de tal forma quede (47) se obtienen los parámetros descritos en (48).

$$a_k = \frac{X_L}{(R + X_L)}; \quad a_k(R + X_L) = X_L. \quad (48)$$

Donde la reactancia inductiva se define en (49).

$$X_L = \frac{a_k R}{a_k - 1} \quad (49)$$

Para el caso mono-variable (1) en diferencias finitas; el estimador (2), de acuerdo a la figura 2, es graficado respecto a una referencia.

Encontrando que la estimación óptima en un sentido de probabilidad fue de 0.3 unidades, como puede verse en la figura 5.

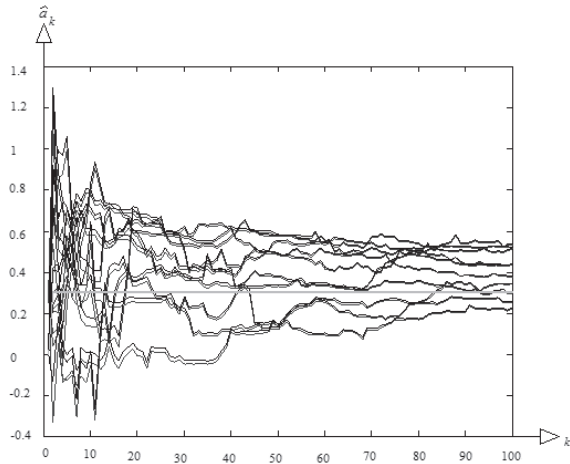


Figura 5 Estimación óptima en relación con el parámetro de referencia, con diferentes condiciones iniciales

La estimación en línea sustituida en (3), considerando el desarrollo del algoritmo de acuerdo con la figura 3. La identificación observada en la figura 6, requirió de la matriz de ganancias descrita en (17) y, del segundo momento de probabilidad del error de identificación.

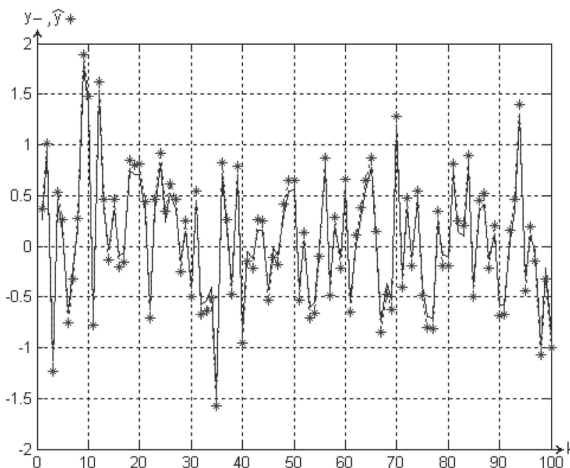


Figura 6 Identificación de los estados observables con respecto a la señal de referencia

En la figura 7 el funcional del error (25) del proceso de adaptación en el identificador (23) es descrito para diferentes parámetros, dentro del intervalo $[-1, 1]$.

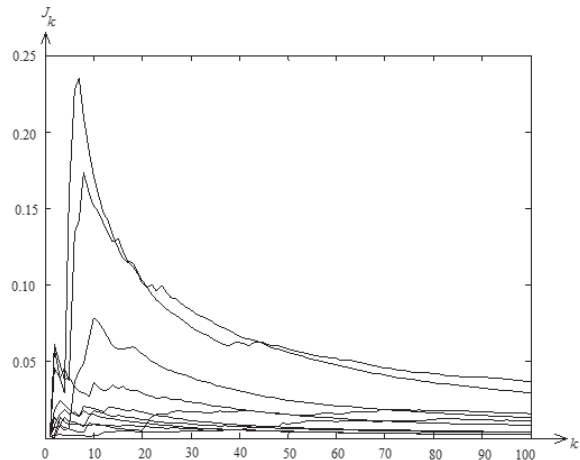


Figura 7 Funcional del error J_k para diferentes parámetros dentro del intervalo de $[-1, 1]$

En la figura 7 se observa un decaimiento exponencial a partir de las 20 unidades y llega a ser estacionario a partir de las 80 unidades, que corresponde al 12% de varianza de error.

En la figura 8, se presentan la estimación de los parámetros de acuerdo con (21) y a [2], en donde se comparan ambos resultados.

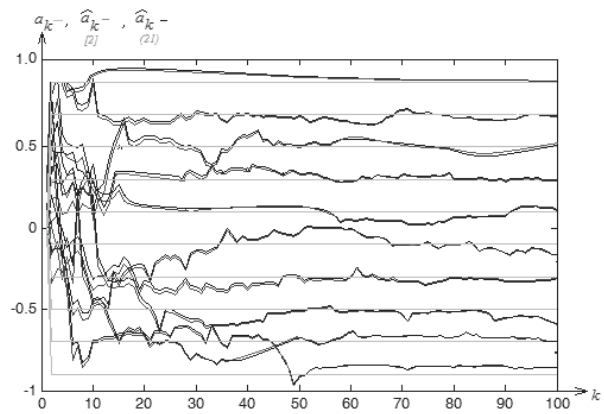


Figura 8 Estimación de parámetros dentro del intervalo $[-1, 1]$ de acuerdo con (21) y son comparados con [2]

Los resultados entre ambos estimadores son muy parecidos y llegan a converger con respecto sus referencias. Los resultados obtenidos de acuerdo con (21) son utilizados en (23) y [2], lo que conlleva a que se tengan los resultados que se observan en la figura 9.

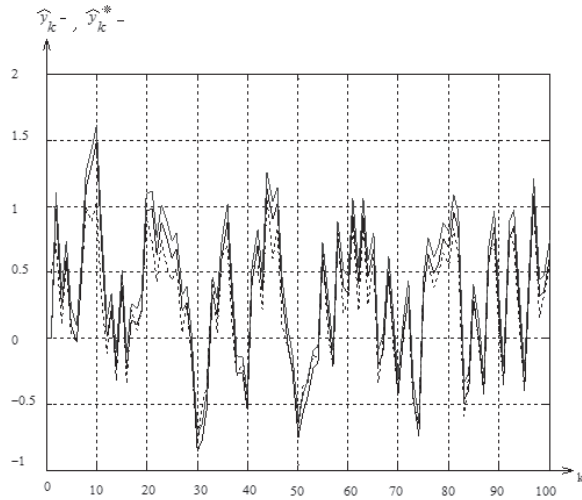


Figura 9 Identificación de los estados observables (23) y comparación con [2]

La comparación de los resultados del filtro identificador (23) y [2], su diferencia es descrita por $\tilde{e}(x_k) := (\hat{y}_k - \hat{y}_k^*)$ donde \hat{y}_k es la respuesta del identificador propuesto (23) y \hat{y}_k^* es la respuesta del identificador propuesto en [2]. Con funcional de error descrito de acuerdo con (25), ahora desarrollado con respecto al error entre ambos identificadores, descrito ahora como I_k

Como puede observarse desde la figura 7 a la 9, los resultados entre ambos procesos de identificación y estimación son muy similares; y explícitamente en la figura 9 se observa quien finalmente fue el mejor bajo las mismas circunstancias de operación, correspondiendo al filtro adaptable con los procesos de estimación y adaptación al identificador.

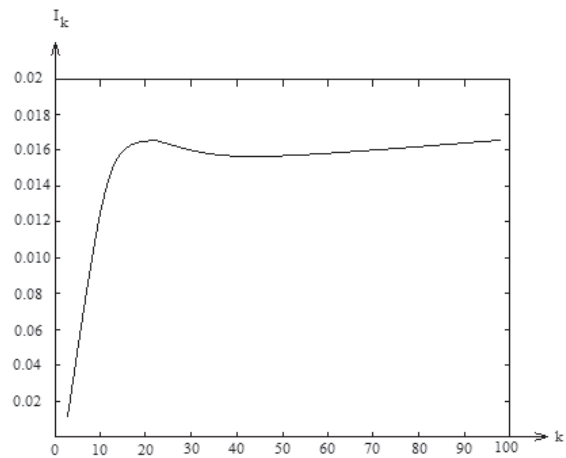


Figure 10 Funcional de error de la diferencia del identificador propuesto en (23) y el filtro descrito en [2]

Conclusiones

La teoría de identificación en el filtrado digital permite conocer la dinámica de los estados internos en relación con un sistema de referencia, al cual comúnmente se le considera caja negra. El identificador requiere: de la excitación y de la señal de salida del sistema, de la función de transición, del retardo del estado del identificado, de la ganancia y del proceso de innovación. Por otra parte, dentro de la caja negra, los parámetros internos son desconocidos; es decir, no se pueden medir directamente y menos aún construir o usar la función de transición requerida en el identificador. En este trabajo se propuso que el estimador construya la función de transición que el identificador requiere y que conjugadas ambas operaciones de filtrado se tiene el proceso de adaptación usado en el identificador, ajustando a la función de transición en evolución, llegando a contar con una convergencia de 0.12 unidades como se observa en la figura 7.

Referencias

1. J. Medel, R. Parrazales, R. Palma. "Estimador Estocástico para un Sistema tipo Caja Negra". *Revista Mexicana de Física*. Vol. 57. 2011 pp. 204-210.

2. J. Rodríguez, M. Gutiérrez, D. Duarte, J. Mendiola, M. Santillán. "Design and Implementation of an Adjustable Speed Drive for Motion Control Applications". *Journal of Applied Research and Technology*. Vol. 10. 2012. pp. 227-241.
3. F. Casco, R. Medina, M. Guerrero, "A New Variable Step Size NLMS Algorithm and its Performance Evaluation Echo Cancelling Applications". *Journal of Applied Research and Technology*. Vol. 9. 2011. pp. 302-313.
4. M. Bazdresch, J. Cortez, O. Longoria, R. Parra, "A Family of Hybrid Space-Time Codes for MIMO Wireless Communications". *Journal Applied Research and Technology*. Vol. 10. 2012. pp. 122-142.
5. M. Joham, M. Zoltowski. *Interpretation of the Multi-Stage Nested Wiener Filter in the Krylov Subspace Framework*. Technical report TR-ECE-00-51, Purdue University. West Lafayette, USA. 2000. pp. 1-18.
6. M. Koo, H. Choi, J. Lim. "Output feedback regulation of a chain of integrators with an unbounded time-varying delay in the input". *Automatic Control, IEEE Transactions*. Vol. 57. 2012. pp. 2662- 2668.
7. J. Zhou, W. Changyun, L.Tieshan. "Adaptive Output Feedback Control of Uncertain Nonlinear Systems with Hysteresis Nonlinearity". *Automatic Control, IEEE Transactions*. Vol. 57. 2012. pp. 2627-2633.
8. S. Herrera, J. Vázquez. "Unbalance Sources Identification in Non-Sinusoidal Electric Power Systems". *International Review of Automatic Control*. Vol. 5. 2012. pp. 35-44.
9. O. Momcilovic. "Discrete-Time Variable Structure Controller Synthesis Using Model in Canonical Subspace". *International Review of Automatic Control*. Vol. 5. 2012. pp. 1-10.
10. M. Petraglia, P. Batalheiro. "Projeto de Banco de Filtros para Estruturas Adaptativas em Sub-bandas". *Sba Controle & Automação*. Vol. 14.2003. pp. 187-197.
11. T. Oliphant. "On Parameter Estimates of the Lossy Wave Equation". *Signal Processing, IEEE U. S. A.* Vol. 56. 2008. pp. 49-60.
12. A. Frizera, R. Ceres, J. Pons. "Filtrado Adaptativo Componentes Involuntarias en Marcha Asistida por Andador para Detección de Intenciones". *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial*. Vol. 8. 2011. pp. 71-80.
13. J. Gallegos, R. Álvarez, J. Moreno, G. Espinosa. "Control Vectorial de un Motor de Inducción con Carga Desconocida Basado en un Nuevo Observador no Lineal". *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial*. Vol. 7. 2010. pp. 74-82.
14. A. Romero, R. Sanchis. "Metodología para la Evaluación de Algoritmos de Aut-ajuste de Controladores PID". *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial*. Vol. 8. 2011. pp. 112-117.
15. D. Fernando, D. Gómez, P. Thompson. "Implementación de un sistema de control activo para disminuir las vibraciones producidas por personas en una tribuna". *Rev. Fac. Ing. Univ. Antioquia*. N° 61. 2011. pp. 83-92.
16. A. Escobar, C. Hernández, J. Arguello. "Control difuso adaptativo aplicado a un sistema de fermentación de flujo continuo de alcohol". *Rev. Fac. Ing. Univ. Antioquia*. N° 58. 2011. pp. 105- 113.
17. S. Haykin. *Adaptive Filter Theory*. 4th ed. Ed. Prentice Hall. New Jersey, USA. 1996. pp. 89-125.
18. A. Shiryaev. *Theory of Probability*. 2nd ed. Ed. Nauka. Moscow, Russia. 1984. pp. 22-78.
19. M. Wasan. *Stochastic Approximation*. 2nd ed. Ed. Cambridge University Press. Cambridge, UK. 1964. pp. 64-70.
20. U. Narayan, G. Miller. *Elements of Applied Stochastic Processes*. 3rd ed. Ed. John Wiley & Sons. Inc. New Jersey, USA. 2002. pp. 365-380.
21. K. Ogatta. *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. 2nd ed. Ed. Prentice Hall. 1995. pp.7-50
22. F. Moreno, J. Duitama, E. Ospina. "A method for estimating the position and direction of a leader of a set of moving objects". *Rev. Fac. Ing. Univ. Antioquia*. N° 62. 2012. pp. 11-20.
23. J. Medel, M. Zagaceta. "Estimación-identificación como filtro digital integrado: descripción e implementación recursiva". *Revista Mexicana de Física*. Vol. 56. 2010. pp. 1-8.
24. I. Estrada. "Filtrado Adaptativo para Sistemas AR de 1^{er} Orden". Centro de Investigación en Computo IPN. *Revista Computación y Sistemas*. Vol. 46. México. 2010. pp. 1-30.
25. C. Duarte, J. Quiroga. "Algoritmo PSO para identificación de parámetros en un motor DC". *Rev. Fac. Ing. Univ. Antioquia*. N.º 55. 2010. pp. 116-124.
26. E. Toro, H. Ruiz, R. Gallego. "Identificación de errores de difícil detección en estimación de estado en sistemas

- eléctricos usando algoritmos de optimización”. *Rev. Fac. Ing. Univ. Antioquia*. Vol. 56. 2010. pp. 182-192.
27. J. Medel, J. García, R. Urbieto. “Identificador con comparación entre dos estimadores”. *Revista Mexicana de Física*. Vol. 57. 2011. pp. 414-420.
28. T. Roinila, M. Huovinen, M. Vilkkö. “Application Possibilities of Non Parametric Identification Techniques in On-line Process Monitoring”. *International Review of Automatic Control*. Vol. 4. 2011. pp. 1-10.
29. J. Sarmavuori, S. Särkkä. “Fourier – Hermite - Kalman Filter”. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 10. 2010. pp. 1-5.
30. J. Qin, H. Gao. “A Sufficient Condition for Convergence of Sampled-data Consensus for Double-integrator Dynamics with Non-uniform and Time-varying Communication Delays”. *Automatic Control, IEEE Transactions*. Vol. 57. 2012. pp. 1-4.