

Teoría de colas en la práctica investigativa: generación de modelos probabilísticos para líneas de espera

Queuing theory in research practice: generation of probabilistic models for waiting lines

Artículo de Investigación

Recibido: diciembre 10 de 2023

Aceptado: abril 23 de 2024

Publicado: julio 15 de 2024

Cómo citar este artículo: Burbano-Pantoja, V. M. Á., Valdivieso-Miranda, M. A., & Burbano-Valdivieso, Á. S. (2024). Teoría de colas en la práctica investigativa: generación de modelos probabilísticos para líneas de espera. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 14 (2), 9-24.

doi: <https://doi.org/10.19053/uptc.20278306.v14.n2.2024.17811>

Víctor Miguel Ángel Burbano-Pantoja*

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.

E-mail: victor.burbano@uptc.edu.co

Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-3561-1886>

Margoth Adriana Valdivieso-Miranda

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.

E-mail: margoth.valdivieso@uptc.edu.co

Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-3617-928X>

Ángela Saray Burbano-Valdivieso

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.

E-mail: angela.burbano@uptc.edu.co

Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-1392-1306>

Resumen

La generación y aplicación de modelos probabilísticos son requeridas para tomar decisiones asertivas basadas en datos asociados con los tiempos de acceso y servicio de usuarios en diversas organizaciones. El objetivo consistió en analizar el sistema de líneas de espera de la biblioteca central de una universidad, mediante parámetros destinados a medir su desempeño. La metodología incluyó técnicas cuantitativas centradas en un diseño de tipo transversal. La información fue recolectada con una rejilla de observación y el conteo del número de estudiantes que entraban a la biblioteca en lapsos de 10 minutos para realizar actividades de consulta. Con los datos se ajustaron modelos de probabilidad para describir la operación del sistema. Los resultados evidenciaron que éste operaba establemente, con tiempos de espera cortos y tiempos de servicio pertinentes. Se pudo concluir que el sistema de biblioteca analizado logra un porcentaje alto (89.06%) de uso por parte del estudiantado en el horario observado.

Palabras clave: teoría de colas, modelos de probabilidad, medidas de desempeño, pronóstico.

Abstract

The generation and application of probabilistic models are required to make assertive decisions based on data associated with user access and service times in various organizations. The objective was to analyze the waiting line system of the central library of a university, using parameters designed to measure its performance. The methodology included quantitative techniques focused on a cross-sectional design. The information was collected with an observation grid and counting the number of students who entered the library in 10 minutes periods to carry out consultation activities. Probability models were adjusted with the data to describe the operation of the system. The results showed that it operated stably, with short waiting times and relevant service times. It was concluded that the analyzed library system achieved a high percentage (89.06%) of use by the students during the observed hours.

Keywords: queuing theory, probability models, performance measures, forecast.

1. Introducción

Los orígenes de la Teoría de Colas (TECO), también reconocida como líneas de espera, se remontan al siglo pasado. La TECO posibilita la gestión de sistemas y eventos en los que las personas deben hacer filas o colas para acceder a un determinado servicio o adquirir un producto específico. Con frecuencia, en la vida diaria las filas, colas están presentes en los diversos campos de acción de los individuos, por ejemplo, se hace fila para tomar el autobús, pagar en los supermercados y bancos, entrar al estadio, al cine o a la biblioteca universitaria, entre otros (Vergara, 2019); en estas actividades también transcurren unos tiempos que han de optimizarse (Naranjo *et al.*, 2022). Esta teoría permite elaborar modelos matemáticos no deterministas mediante los cuales se optimiza el comportamiento de un sistema de colas, al analizar tanto los tiempos de espera como de servicio para minimizar costos operacionales y mejorar la eficiencia (Aarthi & Shanmugasundari, 2023). Actualmente, aprender a modelar este tipo de sistemas mediante distribuciones de probabilidad pertinentes (Linares *et al.*, 2020), se constituye en una necesidad apremiante tanto a nivel universitario como del ejercicio profesional.

Una etapa del análisis de una cola específica está asociada con el hecho de cuantificar el tiempo de espera y el de servicio, a través de diversas medidas de desempeño (Taha, 2011). Es necesario tener en cuenta que una amplia capacidad de servicio generalmente ocasiona costos altos de operación. Una forma de alcanzar el equilibrio entre la calidad de un servicio que se ofrece a determinados clientes y su respectivo costo, consiste en diseñar e implementar modelos de líneas de espera adecuados (Alcívar *et al.*, 2022). En

este contexto, las bibliotecas universitarias prestan un servicio primordial al estudiante, quien consulta libros, revistas y diversas fuentes de información para acrecentar sus aprendizajes. Los universitarios esperan ser atendidos en el menor tiempo posible. Así entonces, el interrogante que direccionó el trabajo investigativo fue ¿Cuáles modelos matemáticos pueden aplicarse en un análisis del sistema de colas presente en la biblioteca central de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC)?

En seguida se exponen los aspectos conceptuales que soportan este trabajo. Un sistema con líneas de espera (colas) puede describirse como una estructura organizada y conformada por clientes, quienes arriban al sistema en búsqueda de un determinado servicio, ellos han de esperar en el evento que tal servicio no sea inmediato, y una vez han sido atendidos, abandonan el sistema (Canyakmaz & Boyaci, 2023). Desde una mirada administrativa y de gestión, en un sistema de colas, uno de los principales problemas por abordar consiste en determinar la tasa de servicio (capacidad) que ha de proporcionar el balance adecuado entre los costos y los tiempos de espera, teniendo en cuenta que, de antemano no se conoce con exactitud, en cuál instante o tiempo preciso los clientes pueden llegar y tampoco se opera con un tiempo de servicio que sea constante (Jiménez, 2011). En este sentido, el objetivo consiste en establecer modelos aleatorios regidos por ciertas distribuciones de probabilidad para describir las líneas de espera específicas y mejorar la gestión del sistema de colas.

Según Neuts (2021), y Quinde y Ramírez (2022), un sistema de líneas de espera ha de incluir elementos como: i) clientes que se espera sean atendidos por un servidor,

ii) las llegadas que se corresponden con el número de clientes, quienes llegan hasta puntos específicos para ser servidos, iii) una tasa de servicio que ha de evidenciar la capacidad instalada para atender al cliente, tal servicio puede ofrecerse por medio de un servidor o varios de ellos, iv) una tasa promedio de servicio calculada como la media aritmética de clientes atendidos por unidad de tiempo (μ) con una expectativa de tiempo de servicio ($1/\mu$), v) un número especificado de servidores, organizados de una forma predeterminada, y vi) dos componentes fundamentales: la cola y un protocolo de servicio. La tasa promedio de llegadas se denota λ y al tiempo esperado entre llegadas con $1/\lambda$.

Para denotar sistemas de líneas de espera suele utilizarse la notación de Kendall (1953), la cual puede escribirse así: $A/B/C$, donde: A representa la distribución de probabilidad de las llegadas, B la de servicio y C es el número de líneas (canales) requeridos para brindar el servicio. Para modelar el número de individuos (clientes) que llegan a una cola específica, se puede usar el modelo probabilístico de Poisson u otros, mientras que para estimar los tiempos de servicio se puede recurrir al modelo exponencial o al de Erlang (Choi *et al.*, 2020). En particular, se modelan sistemas con una sola cola y un servidor único, los cuales se denotan con $M/M/1$; este tipo de estructura se aplicó para analizar la línea de espera en la biblioteca Central de la UPTC. Además, los clientes son administrados mediante una disciplina de colas, la más común es la primero en llegar, primero en ser atendido (Canyakmaz & Boyaci, 2023). De acuerdo con la capacidad instalada en el sistema, las colas pueden ser de carácter finito o infinito (Entriger, 2020; Linares *et al.*, 2020). A efectos del modelaje, se ha de iniciar suponiendo que la cola es infinita.

Cabe resaltar que la TECO se ha expandido a diferentes campos del saber humano, como: la administración de procesos productivos, la ingeniería, la informática o los aspectos industriales. Para efectuar los modelamientos a través de la TECO, se han utilizado modelos de probabilidad específicos y los denominados de propósito general (Ross, 1999). En este sentido, la revisión de literatura permitió focalizar trabajos investigativos elaborados en el contexto internacional que generaron ideas fuerza para desarrollar esta investigación, por ejemplo, los de Jáuregui *et al.* (2017), Wang *et al.* (2020), Gaviláñez *et al.* (2021), León y Vivanco (2023), Do *et al.* (2023), entre otros. En el ámbito colombiano, resultaron de interés los trabajos de Jiménez (2011), Arroyo *et al.* (2014) y Vergara (2019), que ofrecieron luces para analizar los servicios de biblioteca proporcionados por una organización educativa. En estas circunstancias, también se justifica utilizar la TECO para elaborar un análisis tanto de los tiempos de espera como de servicio, en la biblioteca central de la UPTC sede Tunja.

2. Metodología

Este estudio fue soportado con elementos del enfoque cuantitativo de investigación (Burbano *et al.*, 2019), y se ha involucrado un diseño de tipo transversal destinado a elaborar un análisis del comportamiento de las colas (líneas de espera) presentes en la biblioteca Central en la UPTC sede Tunja. En este sentido, se utilizaron métodos estadísticos para ajustar algunos modelos de probabilidad para explorar y describir tanto los tiempos de espera en la cola que los estudiantes hacían para acceder a la biblioteca, como para los tiempos de servicio dentro de ésta. Los modelos involucraron

variables aleatorias tanto de tipo discreto como continuo. Se consideraron variables como: 'el número de estudiantes que ingresan a la mencionada biblioteca en periodos de diez minutos' en una franja horaria que se eligió al azar en un día aleatorio de la semana y el número de estudiantes que salían de la biblioteca en el mismo periodo de tiempo. Además, se estimaron los tiempos de espera y de servicio en consonancia con los aspectos conceptuales de la teoría de colas.

Con frecuencia, en la aplicación de la teoría de colas en problemas reales, se recomienda tener en cuenta dos aspectos (Taha, 2011): i) escoger un modelo matemático pertinente para representar al sistema real y establecer algunas medidas de desempeño, ii) implementar un modelo de decisión basado en dichas medidas a fin de analizar la operación del mismo. En este trabajo se tuvieron en cuenta estos aspectos, ya que el sistema de la biblioteca central se encontraba en operación continua, regida por su propia dinámica. En este escenario, se calculó un tamaño muestral pertinente para este estudio (Burbano *et al.*, 2019), el cual resultó ser de 108 periodos de diez minutos para la entrada y salida de estudiantes en la biblioteca; la muestra fue asumida como proveniente de una población no finita de periodos de tiempo, por estar en continuo funcionamiento. Se continuó con la etapa de la recogida y registro de datos mediante una rejilla elaborada para tal propósito, en la cual participó un grupo de 10 estudiantes (seleccionados a conveniencia) quienes estaban interesados en aprender a modelar este tipo de fenómenos aleatorios.

Respecto a la parte operativa del trabajo investigativo, en primera instancia, se orientó a los estudiantes para recolectar de manera

pertinente la información mediante una rejilla de registro. Luego, se les explicó que con la información ya disponible había que realizar el siguiente proceso: i) Proponer un modelo de probabilidad (Poisson) para ajustar la variable 'número de llegadas a la entrada de la biblioteca', ii) se sugirió una distribución de Poisson para el número de servicios y una exponencial negativa para ajustar los tiempos de servicio (Gao *et al.*, 2023); iii) Obtener los estimadores máximo verosímiles para las distribuciones propuestas (Burbano *et al.*, 2019); iv) efectuar las pruebas de hipótesis referidas al ajuste de los datos a los modelos propuestos con significación de 0.05 (Restrepo & González, 2007, Taha, 2011); v) determinar medidas de eficacia o de desempeño (Hillier & Lieberman, 2010; Gross & Harris, 2014); vi) elaborar una descripción de los pronósticos resultantes de aplicar los modelos probabilísticos.

Respecto a la vida de un sistema de colas y a las medidas de desempeño, se mencionó que hay dos periodos básicos: en el primero el sistema es susceptible de operar de forma anormal o transitoria hasta alcanzar el flujo suficiente de clientes, y en el segundo el sistema se regulariza o se estabiliza con un flujo casi constante de clientes. Por ello, es recomendable analizar el desempeño de tal sistema cuando se encuentre en un estado estable a fin de explorar las características de operación de este (Salas, 2022, p. 696). Además, es conveniente determinar algunas medidas de desempeño como: uso medio del sistema (ρ), número esperado de clientes dentro del sistema (L), tiempo previsto de espera (W), tiempo promedio por esperar en la cola (W_q), promedio de clientes en la cola (L_q) y probabilidad de que un *wait* supere un tiempo t , entre otras, solo cuando $\rho < 1$ (Hillier & Lieberman, 2010). En otras circunstancias,

el servidor ya no ha de poseer la suficiente capacidad para atender de manera adecuada a los clientes en la cola, así entonces, el sistema se desestabiliza.

También se enfatizó que debido a que los modelos planteados pueden resultar imperfectos por la presencia de incertidumbre en la línea de espera (Taha, 2011), los resultados obtenidos en este estudio describirían de forma aproximada el comportamiento del sistema de colas de la biblioteca en los lapsos de tiempo considerados y permiten hacer inferencias sobre eventos asociados con los procesos de llegada y atención en la biblioteca para horarios o temporadas similares. Estos obstáculos son comunes en modelos de líneas de espera y pueden atribuirse a: i) la diversidad de modelos probabilísticos por usar para modelar la complejidad del sistema, ii) la adaptabilidad y flexibilidad de los modelos planteados.

Finalmente, se les indicó que el análisis de la información se realizaría por medio del software SPSS en su versión de prueba a 30 días disponible en internet. Este paquete permitió la elaboración de diversas tablas que incluyen medidas estadísticas como: promedios, desviaciones estándar (DE), otras medidas estadísticas y el cálculo de distintas probabilidades realizado sobre los modelos propuestos. La información fue recopilada durante los meses de abril y mayo de 2023 bajo consentimiento informado y usada solo con fines académico-investigativos. La biblioteca analizada es una edificación con cuatro pisos que cuenta con dos registros electrónicos para

la entrada de estudiantes, 12 terminales de computador para la consulta de libros, revistas u otros materiales, la cual se puede hacer dentro de la biblioteca o solicitar los libros para hacerlo en casa.

3. Resultados y discusión

A continuación, se presentan los resultados correspondientes a las líneas de espera de la biblioteca Central de la UPTC, los cuales se han organizado en tres apartados: en el primero, se analizan los datos referidos a la llegada de los usuarios a la entrada de la biblioteca; en el segundo, se describen los datos asociados con la salida de los estudiantes una vez han efectuado las consultas requeridas o han pedido los libros para llevar a casa, y en el tercero, se obtienen las principales medidas de rendimiento.

3.1 Cola en la entrada a la biblioteca central

Inicialmente, mediante pilotaje se determinó un tamaño de muestra (Pantoja et al., 2021, p. 446) mediante la expresión $n = (Z^2 S^2) / e^2$. Para este propósito, la muestra piloto estuvo constituida por 12 datos correspondientes al número de estudiantes que arribaron a la entrada de la biblioteca e hicieron su registro electrónico en uno de los dos dispositivos existentes para tal fin, estos datos se contabilizaron para cada intervalo de 10 minutos. Con los 12 datos se obtuvo un promedio de 60 y una desviación estándar corregida cuyo valor fue $S = 11.14$, se asumió $Z = 1.96$, un error 0.035 ($60: \text{media muestral}$) $= 2.1$. Los cálculos se presentan en la ecuación (1).

$$n = \frac{Z^2 S^2}{e^2} = \frac{(1.96)^2 (11.14)^2}{(2.1)^2} = \frac{478.43}{4.41} = 108.48 \cong 108 \quad (1)$$

Por consiguiente, para los 108 lapsos de tiempo, se definió la variable X : # de estudiantes que ingresan a la biblioteca en lapsos de diez minutos. Los datos recogidos se indican en la Tabla 1. Mediante un análisis exploratorio de datos se estableció que la variable X era

susceptible de ajustarse a un modelo de Poisson. En este sentido, siguiendo a Burbano et al. (2019), se determinó que el estimador del parámetro λ es el que se indica en la ecuación (2).

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{108} x_i = \frac{6992}{108} = 64.74 \quad (2)$$

Tabla 1. Número de estudiantes que llegan a la entrada de la biblioteca en cada lapso de 10 minutos.

	No. Estud.	No. Estud.	No. Estud.	No. Estud.	No. Estud.	No. Estud.	No. Estud.
1	80	28	54	55	66	82	68
2	78	29	68	56	58	83	64
3	60	30	70	57	64	84	22
4	52	31	68	58	48	85	68
5	68	32	70	59	52	86	66
6	56	33	84	60	68	87	74
7	62	34	50	61	70	88	58
8	66	35	82	62	64	89	68
9	26	36	66	63	58	90	48
10	66	37	60	64	80	91	62
11	62	38	68	65	60	92	62
12	80	39	48	66	112	93	58
13	76	40	54	67	62	94	80
14	64	41	70	68	60	95	52
15	70	42	84	69	80	96	106
16	70	43	66	70	60	97	76
17	76	44	76	71	62	98	52
18	80	45	50	72	58	99	56
19	72	46	64	73	48	100	72
20	78	47	58	74	60	101	82
21	70	48	60	75	72	102	54
22	70	49	60	76	84	103	62
23	64	50	60	77	56	104	50
24	68	51	70	78	64	105	70
25	26	52	58	79	66	106	60
26	66	53	78	80	74	107	58
27	62	54	62	81	56	108	56

También se determinaron las siguientes estadísticas: DE = 12.7626, mínimo = 22, y máximo = 112, las cuales indican que el número de estudiantes que llegaron a la entrada de la biblioteca y se registraron para realizar sus consultas osciló desde 22 hasta

112, con una media de 64.74. Se prosiguió a usar la prueba K-S para analizar si los datos se ajustaban a la distribución propuesta con parámetro $\lambda = 64.74$, como se expresa en la ecuación (3).

i) Modelo propuesto,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & \text{Si } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{Para otros valores} \end{cases} \quad (3)$$

ii) Hipótesis

H_0 : los datos ajustan a $f(x)$ con $\lambda = 64.74$

H_1 : los datos ajustan a $f(x)$ con $\lambda = 64.74$

iii) Por medio del software SPSS, se obtuvo un $p_valor = 0.317$, el cual indica que se acep-

ta la hipótesis nula; luego los datos pueden modelarse con una distribución de Poisson con parámetro estimado λ de 64.74. Además, las llegadas a la biblioteca pueden representarse con el proceso de Poisson de parámetro λt indicado en la ecuación (4) (Gross y Harris, 2014):

$$P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} = \frac{(64.74t)^x e^{-64.74t}}{x!} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

De acuerdo con Gross y Harris (2014), como las llegadas del estudiantado sigue un proceso Poisson con parámetro λt , entonces la variable 'tiempos entre llegadas' sigue

una distribución de probabilidad exponencial con parámetro λ , como se denota en la ecuación (5).

$$f(t, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 64.74 e^{-64.74t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

Con base en estos hallazgos, resulta que $\lambda = 64.74$ corresponde a la tasa de llegadas de los usuarios participantes en este estudio. Por lo tanto, en promedio 64.74 estudiantes aproximadamente llegan a la entrada de la biblioteca cada diez minutos. Además, como una hora equivale a seis lapsos de

tiempo, $\lambda t = 64.74 (6) = 388.44$, indica que 388 individuos entran entre las 10:30 y las 11:30 a.m. para acceder a los servicios de la biblioteca. En concordancia con Taha (2011) y Gross & Harris (2014), el tiempo esperado (medio) entre llegadas se calcula mediante la ecuación (6).

$$E(t) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{64.74} = 0.01545 \quad (6)$$

El valor proveniente de la ecuación (6) es un indicativo de que tal tiempo medio equivale a 0.01545×10 minutos de tiempo, es decir, $0.1545 \times 60 = 9.27$ segundos. Así entonces, en promedio el tiempo entre llegadas a la biblioteca central es muy pequeño.

3.2 Salidas de la biblioteca central

Simultáneamente con el proceso de registro de la entrada de estudiantes a la biblioteca, se registraron los datos correspondientes a la variable Z: # de estudiantes que salen

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{108} z_i = \frac{7850.52}{108} = 72.69 \quad (7)$$

También se determinaron las estadísticas: DE = 14.521, mínimo = 31, máximo = 155, las cuales evidencian que el número de estudiantes que abandonaron la biblioteca varió entre 31 y 155, con una media de 72.69. Se prosiguió a

de la biblioteca en lapsos de diez minutos, éste corresponde al # de individuos atendidos (servidos) dentro de la mencionada biblioteca, quienes han dedicado un lapso determinado de tiempo acorde a sus necesidades de consulta. Los datos recogidos se observan en la Tabla 2. Por medio de otro análisis exploratorio de datos, se determinó que la variable Z era susceptible de ajustarse a un modelo de Poisson. En este sentido, siguiendo a Burbano *et al.* (2019), se estableció que el estimador del parámetro μ se podía determinar mediante la ecuación (7).

usar la prueba K-S para analizar si los datos se ajustaban a la distribución propuesta con parámetro $\mu = 72.69$, la cual corresponde a la ecuación (8).

Tabla 2. Número de estudiantes atendidos en cada lapso de diez minutos.

No.	Servidos	No.	Servidos	No.	Servidos	No.	Servidos
1	79	28	49	55	73	82	73
2	79	29	53	56	67	83	89
3	89	30	57	57	67	84	81
4	81	31	57	58	69	85	91
5	81	32	39	59	69	86	65
6	71	33	35	60	61	87	69
7	69	34	31	61	61	88	71
8	71	35	63	62	63	89	69
9	77	36	63	63	69	90	67
10	67	37	63	64	69	91	77
11	77	38	65	65	69	92	75
12	75	39	65	66	77	93	77
13	73	40	85	67	77	94	75

14	73	41	79	68	79	95	75
15	75	42	85	69	85	96	65
16	71	43	87	70	59	97	65
17	79	44	87	71	59	98	65
18	79	45	91	72	61	99	81
19	77	46	91	73	63	100	81
20	85	47	135	74	63	101	83
21	77	48	155	75	67	102	85
22	75	49	63	76	75	103	77
23	67	50	65	77	67	104	69
24	75	51	59	78	71	105	71
25	77	52	67	79	71	106	69
26	67	53	71	80	71	107	75
27	77	54	77	81	73	108	75

i) Modelo propuesto,

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\mu^z e^{-\mu}}{z!} & \text{Si } z = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{Para otros valores} \end{cases} \quad (8)$$

ii) Hipótesis

Ho: los datos ajustan a $g(z)$ con $\mu = 72.69$

H₁: los datos ajustan a $g(z)$ con $\mu = 72.69$

iii) Con el SPSS, se obtuvo un $p_valor = 0.747$. Este valor indica que se acepta la hipótesis

nula; luego los datos pueden modelarse con una distribución de Poisson con parámetro estimado μ de 72.69. Adicionalmente, las salidas de la biblioteca pueden representarse con el proceso de Poisson de parámetro μt presentado en la ecuación (9) (Gross & Harris, 2014):

$$P_z(t) = \frac{(\mu t)^z e^{-\mu t}}{z!} = \frac{(72.69t)^z e^{-72.69t}}{z!} \quad \text{para } z = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

De acuerdo con Gross y Harris (2014), como las salidas del estudiantado sigue un proceso Poisson con parámetro μt , entonces el mo-

delo probabilístico asociado con los tiempos de salida concuerda con la distribución exponencial con parámetro μ de la ecuación (10).

$$g(t, \mu) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 72.69 e^{-72.69t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Con fundamento en estos hallazgos, se establece que $\mu = 72.69$ corresponde a la tasa de salida de los usuarios de la biblioteca. Por consiguiente, en promedio han salido 73 estudiantes aproximadamente de la biblioteca. Además, como una hora equivale a seis lapsos de tiempo, $\mu t = 72.69(6) = 346.14$,

$$E(t) = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{72.69} = 0.01375 \quad (11)$$

El valor obtenido mediante la ecuación (11), es un indicativo de que el tiempo medio equivale a 0.01375×10 minutos de tiempo, es decir, $0.01375 \times 60 = 8.25$ segundos. Así entonces, en promedio el tiempo entre salidas de la biblioteca central es de 8.25 segundos, aproximadamente.

3.3 Medidas de rendimiento en las colas de la biblioteca

Para el análisis del sistema de colas de la biblioteca, inicialmente se observó que el

indica que 436 estudiantes han salido de la biblioteca por hora una vez fueron atendidos. En concordancia con Taha (2011) y Gross & Harris (2014), el tiempo esperado (medio) de servicio (salidas) se ha calculado mediante la ecuación (11).

sistema se encontraba operando con una dinámica propia con estabilidad y capacidad suficiente para atender a los usuarios (Taha, 2011). Además, los hallazgos reflejaron que el parámetro asociado con la tasa de servicio en la biblioteca fue superior al que representa a la tasa de entrada a la biblioteca, este hecho garantiza la estabilidad del sistema correspondiente a la biblioteca central de la UPTC. Con base en el comportamiento de las variables discretas X y Z , se determinaron las medidas de eficiencia (desempeño) que se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3. Medidas de eficiencia de la biblioteca.

Medida	Valor	Medida	Valor
λ	64.74	W_q	0.11202
μ	72.69	L_q	7.25
ρ	0.8906	P_2	0.0867
L	8.1433	P_1	0.0974
W	0.12578	$P(\Psi > t = 1)$	0.00031

Con base en la Tabla 3, se establece que, i) el uso medio en las colas de la biblioteca fue de un 89.06%. Dicho porcentaje indica la fracción media de tiempo requerida por los servidores en la atención a los estudiantes (Hillier & Lieberman, 2010). Asimismo, se observa que $\rho < 1$, lo cual refleja que la biblioteca si tiene la capacidad suficiente para atender a todos los estudiantes que han entrado en

ella; ii) el # esperado de usuarios cada diez minutos fue de aproximadamente 8; iii) el tiempo medio transcurrido en la biblioteca resultó ser de 0.12578; iv) el tiempo medio de espera en la cola excluido el de servicio fue de 0.11202; v) la media de clientes en la fila de espera fue de 7.25; vi) la probabilidad de tener dos estudiantes en la biblioteca en cada lapso de tiempo fue de 8.67%, entre otros.

3.4 Discusión

Con la realización de este trabajo se ha alcanzado el objetivo de analizar las colas de la biblioteca Central de la UPTC. Para ello se siguió un proceso metodológico que involucró las variables aleatorias discretas X y Z , asociadas con el número de usuarios que entran a la biblioteca a efectuar determinadas consultas y salen de la misma en un determinado lapso de tiempo. También se hizo la determinación de modelos específicos de probabilidad que describen la dinámica de los tiempos tanto de espera como de servicio asociados con el fenómeno de estudio, el cual correspondió a una línea de espera ajustada a la notación $M/M/1$, aspectos que guardan relación con los elementos conceptuales expuestos por Gao *et al.* (2023), Restrepo y González (2007), Taha (2011) y se han determinado medidas de eficacia y estabilidad del sistema biblioteca. Los hallazgos concuerdan con los resultados de Hillier y Lieberman (2010), Gross y Harris (2014) y Vergara (2019), para sistemas de colas semejantes.

Los procedimientos desarrollados han hecho posible que un grupo de estudiantes que se involucraron voluntariamente en el estudio se apropiara tanto de los aspectos teóricos como metodológicos de la implementación de modelos probabilísticos, a partir de datos reales provenientes del contexto donde con frecuencia asisten para realizar sus consultas bibliográficas. En este sentido, los participantes interactuaron constantemente con los investigadores y manifestaron su interés y satisfacción por llevar los saberes teóricos a la práctica investigativa. Así mismo se ha entendido que, pueden existir otros modelos para ajustar datos asociados con problemas de líneas de espera, por ejemplo, Piratelli *et al.* (2015) lo han hecho con la distribución de Weibull en otros sistemas de espera y

Kochetkova *et al.* (2023) en pronóstico del tráfico de redes móviles con modelos de series de tiempo.

Adicionalmente, para el sistema analizado se establece que, en promedio, aproximadamente 436 estudiantes son atendidos por hora en la biblioteca, a quienes se les prestan los libros requeridos o se les asesora en sus temas de consulta, siempre y cuando la biblioteca se encuentre funcionando de manera normal en el horario de 10:30 a 11:30 a.m. los días laborables. La observación directa de los investigadores permitió establecer que hay periodos de mayor concurrencia de estudiantes en la biblioteca y el flujo no es uniforme. Sin embargo, si se describe la operación del sistema bajo el supuesto de relativa uniformidad, la biblioteca Central al trabajar 14 horas por día con un porcentaje de eficacia de un 89.06%, puede atender a unos 5436 individuos diariamente y a más de 27000 por semana, aproximadamente. Este porcentaje contrasta con los resultados de Vergara (2019), debido a la inclusión de otras variables contextuales.

El proceso de modelación ha generado efectos positivos de aprendizaje en los estudiantes universitarios que decidieron participar en el mismo, en tanto que directamente han vivido y han sido copartícipes de las experiencias investigativas que paulatinamente fueron implementadas en un contexto real, en las cuales, de acuerdo con Burbano-Pantoja *et al.* (2022), se han de utilizar métodos estadísticos para ajustar los modelos probabilísticos requeridos, además de recurrir a estrategias de aprendizaje basado en proyectos colaborativos en el sentido mencionado por Barrera *et al.* (2017) para recolectar y procesar los datos. Estos aspectos dinamizan los procesos de modelaje y de aprendizaje teórico-práctico

en los individuos que interactuaron para aplicar el método científico en el escenario real. Como lo mencionan García *et al.* (2017), la implementación de modelos teóricos en entornos familiares para el estudiantado, potencian sus competencias académicas e investigativas.

Para terminar, los modelos probabilísticos que se han construido aportan aspectos tanto de carácter cognitivo como didáctico, que podrían utilizarse en el modelaje de problemas semejantes en contextos reales. Este tipo de estrategias posibilitan un aprendizaje enriquecedor provisto de más significados, como lo mencionan Vesga y Escobar (2018). Asimismo, los participantes construyen nuevo conocimiento que posteriormente podrían aplicar en su entorno inmediato o en otras disciplinas, en el sentido expresado por Hernández-Gil y Jaramillo-Gaitán (2020). Este trabajo no solamente ha involucrado aspectos teóricos de la ciencia transferidos al modelaje probabilístico, sino que a través de actividades planeadas se ha capturado la atención del estudiantado y mejorado su empatía para seguir intentando este tipo de prácticas investigativas, las cuales amplían paulatinamente las maneras de comprender el mundo.

4. Conclusiones

En el sistema de colas de la biblioteca Central de la UPTC, el proceso de llegada de los estudiantes a la misma ha correspondido a un proceso Poisson con parámetro λt , mientras que los tiempos entre las llegadas se modelan con una exponencial negativa con $\lambda > 0$. Asimismo, las salidas del estudiantado en la biblioteca después de ser atendidos fueron modeladas mediante otro proceso Poisson con parámetro μt , donde μ corresponde la tasa de servicio en cada lapso de tiempo.

Los resultados permiten concluir que el sistema biblioteca puede modelarse con una estructura denotada como sigue: $M/M/1$, y se encuentra operando de manera estable. Las medidas de desempeño indican que la tasa media de llegada está alrededor de los 65 estudiantes cada 10 minutos, la tasa media de servicio es de 73 estudiantes para el mismo lapso de tiempo, los tiempos de espera del estudiantado en las colas que se forman son relativamente cortos, los tiempos de servicios son pertinentes. Este sistema de biblioteca es altamente eficiente con un porcentaje de uso del 89.06%; no obstante, todavía es susceptible de ser optimizado.

Los modelos probabilísticos elaborados fueron construidos a partir de datos reales y se constituyen en una estrategia didáctica posible de ser replicada en otros escenarios. Tales modelos permiten aplicar una metodología específica donde se contrasta lo experimental con la teoría y la práctica a través de la aplicación del método científico. En este contexto, este trabajo hace posible la proyección de futuras investigaciones centradas en: i) modelar otras líneas de espera utilizando diversas distribuciones de probabilidad, ii) involucrar directamente a más estudiantes y semilleros de investigación para desarrollar procesos investigativos similares, y iii) acrecentar el uso del modelaje de fenómenos caracterizados por la presencia de incertidumbre, solo por mencionar algunos.

Agradecimientos

Al Grupo Interdisciplinario en ciencias - GICI y a los estudiantes que voluntariamente colaboraron con el registro en la rejilla de una parte de la información correspondiente a la cola de entrada a la biblioteca.

Contribución de los autores

Víctor Miguel Ángel Burbano-Pantoja:

Administración del proyecto, conceptualización, metodología, análisis formal, revisión, redacción y edición del manuscrito final.

Margoth Adriana Valdivieso-Miranda:

conceptualización, curación de datos, análisis formal, manejo de software, redacción del borrador original, revisión final del artículo.

Ángela Saray Burbano-Valdivieso:

conceptualización, investigación, visualización, validación, redacción del borrador original, revisión final del artículo.

Implicaciones éticas

No existen implicaciones éticas por declarar en la escritura o publicación de este artículo.

Financiación

Artículo derivado del proyecto de investigación: "Modelos estocásticos en teoría de colas y líneas de espera", Financiado por la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, con código SGI-2265.

Conflictos de interés

No existen conflictos de interés de parte de los autores en la escritura o publicación de este artículo.

5. Referencias

Aarthi, S., & Shanmugasundari, M. (2023). Comparison of single server queuing performance measures using fuzzy queuing models and in-

tuitionistic fuzzy queuing models with infinite capacity. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 44 (3), 4733-4746.

Alcívar, G. P., Merchán, S. M., Vásquez, O. S., & Alcívar, B. L. (2022). Teoría de colas y optimización de proceso de atención al usuario. *AlfaPublicaciones*, 4 (3), 22-38. <https://doi.org/10.33262/ap.v4i3.221>

Arroyo, I., Bravo, L. C., Llinás, H., & Muñoz, F. L. (2014). Distribuciones Poisson y Gamma: una discreta y continua relación. *Prospectiva*, 12 (1), 99-107.

Barrera, M. M., Fernández, F. H., & Duarte, J. E. (2017). Aprendizaje basado en proyectos colaborativos mediados por TIC para el desarrollo de competencias en estadística. *Saber, Ciencia y Libertad*, 12(2), 220-232.

Burbano, V., Valdivieso, M., & Burbano, A. (2019). *Confiabilidad: un enfoque paramétrico en la práctica investigativa*. Tunja, Colombia: Editorial UPTC.

Burbano-Pantoja, V. M. Á., Valdivieso-Miranda, M. A., & Burbano-Valdivieso, Á. S. (2022). Modelos estadísticos no paramétricos en los libros de texto del nivel universitario. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 12 (2), 265-278. <https://doi.org/10.19053/20278306.v12.n2.2022.15270>

Canyakmaz, C., & Boyaci, T. (2023). Queueing systems with rationally inattentive customers. *Manufacturing & Service Operations Management*, 25 (1), 266-287.

Choi, T. M., Guo, S., Liu, N., & Shi, X. (2020). Optimal pricing in on-demand-service-platform-operations with hired agents and risk-sensitive customers in the blockchain era. *European Journal of Operational Research*, 284 (3), 1031-1042.

Do, Q. H., Kim, T. Y., & Wang, X. (2023). Effects of logistics service quality and price fairness on customer repurchase intention: The moderating role of cross-border e-commerce experiences. *Journal of Retailing and Consumer Services*, 70, 103165.

- Entriger, T. C. (2020). Simulation and analysis of queues in banks: A case study of an agency in the Southern State of Rio de Janeiro. *Independent Journal of Management & Production*, 11 (3), 892-907. <https://doi.org/10.14807/ijmp.v11i3.1074>
- Gao, S., Kobayashi, T., Tajiri, A., Liu, H., & Ota, J. (2023). Throughput evaluation of AGV transportation systems based on queueing modeling and AGV route decomposition. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, 237 (6-7), 1024-1035.
- García, B., Coronado, A., & Giraldo, A. (2017). Implementación de un modelo teórico a Priori de competencia matemática asociado al aprendizaje de un objeto matemático. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 7 (2), 301-315. <https://doi.org/10.19053/20278306.v7.n2.2017.6072>
- Gaviláñez, H. R. L., Peña, I. E. N., & Yaguar, E. R. A. (2021). Propuesta de mejora para reducir los tiempos de espera mediante un modelo Matemático-Computacional de Líneas de Espera. *Ecuadorian Science Journal*, 5 (2), 83-99.
- Gross, D., & Harris, C. M. (2014). *Fundamentals of queueing theory*. New York: John Wiley & Sons.
- Hernández-Gil, C., & Jaramillo-Gaitán, F. A. (2020). Laboratorio de innovación social: hibridación creativa entre las necesidades sociales y las experiencias significativas de los estudiantes de administración de empresas. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 10 (2), 267-281. <https://doi.org/10.19053/20278306.v10.n2.2020.10518>
- Hillier, F., & Lieberman, G. (2010). *Introducción a la investigación de operaciones*. México: Mc Graw Hill.
- Jáuregui, G. R. R., Pérez, A. K. G., González, S. H., & Ripalda, M. D. H. (2017). Análisis del servicio de urgencias aplicando teoría de líneas de espera. *Contaduría y Administración*, 62 (3), 719-732.
- Jiménez, F. A. G. (2011). Aplicación de teoría de colas en una entidad financiera: herramienta para el mejoramiento de los procesos de atención al cliente. *Revista Universidad EAFIT*, 44 (150), 51-63.
- Kendall, D. G. (1953). Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of imbedded Markov chains. *Annals of Mathematical Statistics*, 24, 338-354.
- Kochetkova, I., Kushchazli, A., Burtseva, S., & Gorshenin, A. (2023). Short-Term Mobile Network Traffic Forecasting Using Seasonal ARIMA and Holt-Winters Models. *Future Internet*, 15 (9), 290.
- León, L. S., & Vivanco, L. P. (2023). Modelo para la mejora del servicio de atención al cliente mediante la teoría de colas: caso de estudio de una agencia bancaria. *Interfases*, 17, 146-168.
- Linares, J., Vilalta, J. A., & Garza, R. (2020). La teoría de colas aplicada a una Oficina Comercial de Telecomunicaciones. *Ingeniería Industrial*, 41 (2), e4118.
- Naranjo, F. G., Carrión, L. H., & Bosmediano, F. G. (2022). Gestión administrativa en las pymes del sector comercial en la ciudad de Santo Domingo en Ecuador. *Universidad y Sociedad*, 14 (3), 504-513.
- Neuts, M. (2021). *Structured stochastic matrices of M/G/1 type and their applications*. CRC Press.
- Pantoja, V. M. B., Miranda, M. A. V., & Valdivieso, Á. S. B. (2021). Estrategia didáctica para aprender modelaje probabilístico en sistemas de colas. *Boletín Redipe*, 10 (6), 441-456.
- Piratelli, C. L., Achcar, J. A., & Sandrim, R. R. (2015). Análise dos tempos entre chegadas de lotes em uma indústria alimentícia. *Ingeniare, Revista Chilena de Ingeniería*, 23 (4), 569-578.
- Quinde, Y. N., & Ramírez, A. C. (2022). Diseño de un modelo de gestión Financiera aplicable a la mipymes de la ciudad de Guayaquil. *Polo del Conocimiento*, 7 (8), 193-213.
- Restrepo, L. F., & González, J. (2007). De Pearson a Spearman. *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias*, 20 (2), 183-192.

Ross, Sh. (1999). *Simulación*. USA: Prentice Hall.

Salas, H. G. (2022). *Inventarios: manejo y control*. ECOE ediciones.

Taha, H. (2011). *Investigación de operaciones*. México: Addison-Wesley.

Vergara, A. M. (2019). Aplicación de la Teoría de líneas de Espera en el servicio de Biblioteca de una Organización Educativa en Cartagena–Colombia. *Saber, Ciencia y Libertad*, 14 (1), 171-178.

Vesga, G. J., & Escobar, R. E. (2018). Trabajo en solución de problemas matemáticos y su efecto sobre las creencias de estudiantes de básica secundaria. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 9 (1), 103-114. <https://doi.org/10.19053/20278306.v9.n1.2018.8270>

Wang, X. L., Wen, Q., Zhang, Z. J., & Ren, M. (2020). The optimal queuing strategy for airport taxis. *IEEE Acces*, 8, 208232-208239.