Una aproximación al proceso de comprensión de los numerales por parte de los niños: relaciones entre representaciones mentales y representaciones semióticas*

An Approach to the Process of Understanding Numerals by Children: Relationships between Mental Representations and Semiotic Representations

Recibido: marzo 11 de 2008 | Revisado: junio 27 de 2008 | Aceptado: julio 6 de 2008

JORGE CASTAÑO-GARCÍA**

Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia

ABSTRACT

With support in the works of Duval (2004) regarding the operation of conversion between semiotic registries, the studies of numerical “transcodification” are analyzed. It is stated that in the studies on the understanding process of the decimal system of numeration by children, it is convenient to relate the activity of conversion between the verbal and Hindu-Arabic registers to the operating activity of children, when they try to respond to the logical demands presented to them by the understanding of the syntax implied in the decimal system of numeration, as a form of revealing the mechanisms that govern the constructions built by the children in this field.

Key words author

Cognition in Mathematics, Semiotic Representations and Numeration, Numerical Representations , Learning of Mathematics, Decimal Numeration System.

Key words plus

Mathematics Education, Decimal System, Mappings (Mathematics).

RESUMEN

Con apoyo en los trabajos de Duval (2004) sobre la operación de conversión entre registros semióticos se analizan los estudios de transcodificación numérica. Se afirma que en los estudios sobre el proceso de compresión, por parte de los niños, del sistema decimal de numeración, conviene relacionar la actividad de conversión entre los registros verbal e hindú-arábigo, a la actividad operatoria de los niños, cuando ellos tratan de responder a las demandas lógicas que les hace la comprensión de la sintaxis del sistema decimal de numeración, como forma de develar los mecanismos que rigen las construcciones que ellos hacen en este campo.

Palabras clave author

Cognición en matemática, representaciones semióticas y numeración, representaciones numéricas, aprendizaje de las matemáticas, sistema decimal de numeración.

Palabras clave descriptor

Enseñanza de las matemáticas, sistema decimal, aplicaciones (matemáticas).

* Este artículo es un avance de la investigación que el Proyecto Cognición y Escuela, de la Facultad de Psicología de la Pontifica Universidad Javeriana, sede Bogotá, adelantada sobre la Construcción del Sistema Decimal de Numeración por parte del Niño. Este grupo, además de quien escribe este artículo, está conformado por Amparo Forero S., docente investigadora adscrita al proyecto. Al equipo se vinculan durante un año estudiantes practicantes de la facultad.

** Director del Grupo de Investigación Cognición y Escuela. Facultad de Psicología. Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá. Cra 5 # 39-00 Piso 2. Correo electrónico: jorgecastagno@yahoo.es

Gran parte del tiempo que la escuela invierte en la enseñanza de la matemática en el nivel de básica primaria es dedicado a desarrollar en los niños habilidades para manejar el sistema decimal de numeración. Se les enseña a contar, a leer y escribir los números, a ejecutar los algoritmos para calcular los resultados de las operaciones aritméticas elementales (adición, sustracción, multiplicación y división) y a resolver problemas que involucran estas operaciones. Para los niños representa un trabajo arduo, durante varios años, llegar a dominar el sistema de escritura de las expresiones numéricas y, a pesar de sus esfuerzos, se constata que aún en los últimos años de primaria hay un número importante que cometen errores al escribir los números; y aun cuando logran escribir y leer correctamente las expresiones numéricas, muchos no acceden a una comprensión adecuada de la sintaxis que rige el sistema. En parte estos resultados están relacionados con el escaso conocimiento que se tiene de los mecanismos cognitivos que están en la base de los procesos de comprensión del sistema de numeración. Al ignorar la escuela qué es lo que sucede en la mente de un niño cuando tiene que lidiar con esos signos, es escaso el apoyo que puede brindarles. La psicología encuentra aquí un rico campo problemático para indagar los mecanismos que rigen la apropiación de un sistema de signos, más específicamente, para investigar los mecanismos que rigen las formas como los niños se apropian de un sistema abstracto como es el de la escritura de los numerales, apoyándose en el sistema de signos del lenguaje común. Con toda seguridad, los estudios hechos y que se harán en esta línea son un apoyo importante para la didáctica de la matemática.

En este artículo se analiza el proceso de conversión que hacen los niños de los signos verbales (las expresiones que se usan al leer los numerales, por ejemplo “trescientos cuarenta y siete”) y los signos de escritura basados en las cifras (las expresiones que se usan para escribir los números, por ejemplo, 347). Se analizan los estudios realizados desde la perspectiva de la “transcodifcación numérica”, ligándolos a los procesos de composición y descomposición aditiva y aditiva-multiplicativa que, nos parece, están involucrados en la comprensión de las expresiones numéricas. Se pretende mostrar que esta relación podría llegar a ser un adecuado complemento de los resultados encontrados desde aquella perspectiva y que podría abrir caminos para reinterpretar algunos de los hallazgos obtenidos.

En un primer momento, se ofrece un análisis de las demandas cognitivas que hace al niño la comprensión del sistema decimal de numeración y las posibilidades que él tiene, de acuerdo con las construcciones operatorias logradas en el momento en que inicia el conocimiento de las expresiones numéricas. En un segundo momento, se establece un diálogo con algunos aportes de los estudios de transcodificación numérica y nuestras indagaciones. En la tercera y última parte, a manera de discusión de los planteamientos desarrollados a lo largo del artículo, y a partir de los trabajos de Duval (2004), se esbozan algunas preguntas que el estudio del sistema decimal de numeración permite formular cuando se interroga por las relaciones entre las representaciones externas y las representaciones mentales. El artículo es apenas una aproximación al problema, en tanto esboza el camino que, a nuestro parecer, conviene emprender para obtener datos más robustos.

Análisis de la demandas cognitivas del sistema decimal de numeración

Diremos que el sistema decimal de numeración (SDN) es un sistema semiótico de representación de la cantidad de elementos que tiene una colección. Este sistema tiene dos registros distintos: uno es el verbal (expresable de forma oral o escrita)[1] –como cuando se utiliza la expresión “trescientos cincuenta y cinco”–, y el otro es el registro hindú-árábigo –como cuando se escribe el numeral “345” (expresable únicamente de forma escrita)[2] –. Co-

[1] Este registro no es exclusivo del SDN; es el mismo del lenguaje “común”, pero sus componentes lexicales, fonéticos, sintácticos y semánticos comportan cierta especificidad propia del SDN.

[2] También se suele decir que el SDN se expresa en dos códigos: el verbal y el escrito, o el verbal y el hindú-arábigo (o simplemente arábigo).

mo en todo sistema semiótico, estos dos registros tienen un sistema de reglas sintácticas propias que posibilitan acceder al significado de las expresiones que se emiten dentro de él; aunque, digámoslo de una vez, el significado no se agota en ellas: el significado del numeral "345" no se agota en la expresión "trescientos cuarenta y cinco", ni éste en aquel. El significado depende no sólo de un signo y de su representante, sino también de un intérprete:

> un signo o presentante, es algo que está, para alguien, en lugar de algo en algún aspecto o capacidad. Está dirigido a alguien, es decir, crea en la mente de esa persona un significado equivalente, o quizá un signo más desarrollado. (Pierce, 1960, p. 228, como se cita en Bruner, 1998, p. 140).

Un análisis de la sintaxis de ambos registros del SDN permite establecer que se requiere de cierta capacidad del manejo de composiciones aditivas y multiplicativas[3] para asignarle algún significado a expresiones en este registro. Contar supone agrupar y, en el caso de un sistema decimal como el nuestro, estas agrupaciones son de diez unidades[4]. Un numeral expresado en el SDN es la escritura abreviada de un proceso de agrupaciones y reagrupaciones; por ejemplo, escribir el numeral que representa la cantidad de elementos que hay en una colección que posee "cuatrocientos treinta y cinco elementos" consiste en formar todos los grupos de diez que sea posible hacer (43 grupos de diez y 5 elementos sueltos), pero con los 43 grupos de diez se forma otro de orden mayor (compuesto por diez grupos de diez elementos cada uno) y quedan sobrando 3 grupos de diez. El resultado final de estas agrupaciones ese muestra en la figura 1.

De forma más general, puede decirse que contar la cantidad de elementos que componen una colección y escribir el numeral que representa su cantidad en base decimal consiste en un proceso de hacer grupos de diez. Además, que el numeral que representa el número correspondiente a esta cantidad se obtiene registrando la cantidad de grupos del mayor orden posible formados (ord n), y a su derecha (al menos en nuestro caso) la cantidad de grupos del orden inmediatamente inferior (ord

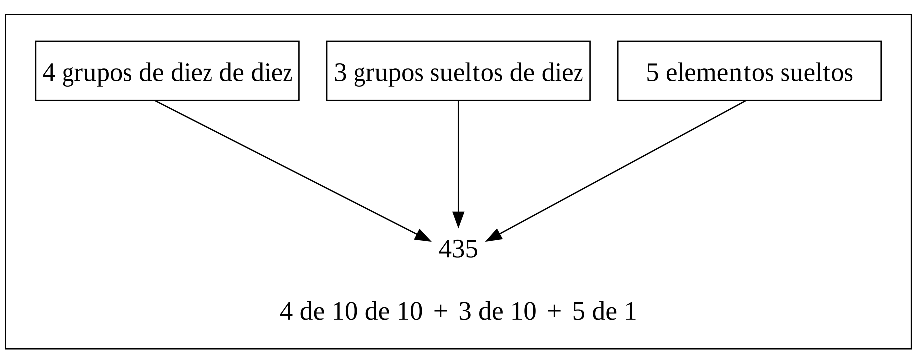

Figura 1
Los numerales en el sistema decimal de numeración y reagrupaciones de diez
Fuente: Castaño, Negret y Robledo (1991).

3 Incluso se requiere de la operación potenciativa para acceder a un significado profundo del carácter posicional de registro hindú-arábigo, pero para asignar un significado básico, suficiente para comprender los usos comunes de los números, basta cierto pensamiento de tipo aditivo y multiplicativo. En este artículo limitaremos el análisis a este significado elemental, que, como veremos, es suficientemente complejo para un niño que se inicia en el conocimiento de este sistema.

4 En la historia temprana de la humanidad se encuentran prácticas que prefiguran el conteo propiamente dicho, en las que no aparece la idea de agrupación, consistentes en establecer correspondencia uno a uno entre los elementos de la colección a contar y otros objetos o cosas semejantes a "signos". No obstante, no son estrictamente sistemas de numeración; de hecho, estas practicas son insuficientes para tener una representación mental en el caso de colecciones numerosas.

n-1) que quedaron sueltos, y nuevamente a la derecha los del orden inmediatamente inferior (ord n-2) que quedaron sobrando, y así sucesivamente hasta llegar a los elementos no agrupados (orden uno). En caso de que no quede sobrando ningún grupo o elemento en algún orden, se coloca "0" (cero) en el sitio correspondiente. Este algoritmo permite representar cualquier cantidad combinando únicamente diez cifras. El código hindú-arábigo es una forma simplificada de dar cuenta de un proceso largo y complejo, pero precisamente por eso para un niño su comprensión no es inmediata; exige contar por parte del intérprete con unas representaciones mentales previamente construidas que permitan realizar un proceso inverso de desagrupaciones.

El registro verbal-oral facilita este proceso de desagrupación, pero, debido a que la sintaxis de este sistema es distinta a la del hindú-arábigo, la operación de conversión (Duval, 2004) de un sistema al otro no es directa[5].

435
"cuatrocientos treinta y cinco"

Para asignarle un significado a esta expresión, más allá de un simple lugar en una sucesión de palabras para contar, es necesario representarse mentalmente esta expresión como algo que nosotros escribiremos como:

4 de 100 + 3 de 10 + 5 de 1

Representaciones verbales como éstas ("cuatrocientos treinta y cinco") cobran sentido para el niño (o para cualquier intérprete) si puede operar con las ideas de varias veces una unidad, pero no de unidades simples, sino también "unidades compuestas" (4 de 100, 4 de 10 y 5 de 1). Por otra parte, también necesita en algún nivel, así sea muy elemental, estar en capacidad de distinguir y coordinar en su pensamiento unidades diferentes (en un caso las unidades son de 100, en otro de 10 y en el otro de 1). Y, por último, requiere componer estos resultados parciales. En otras palabras, esta representación mental no será apropiada por el niño a partir de la expresión "cuatrocientos treinta y cinco" sin que cuente con las capacidades de coordinar operadores multiplicativos sobre unidades diferentes y de hacer composiciones aditivas. Estas operaciones, aunque están formuladas en la expresión verbal, no son realizadas por el registro semiótico; es el niño quien debe llevarlas a cabo en el proceso de interpretación, y esto le será posible si posee (en su pensamiento) la capacidad de hacer tales coordinaciones. ¿Pero qué sucede cuando el niño no tiene tales capacidades? Antes de ofrecer algunas respuestas, veamos que se presentan dos problemas adicionales para realizar la operación de conversión entre los dos registros, debido a la ausencia de una correspondencia exacta entre ellos.

Habíamos dicho que para asignarle significado a la expresión "cuatrocientos treinta y cinco" se hacía necesario interpretarla como "4 de 100 + 3 de 10 + 5 de 1". Destaquemos ahora que esta expresión es distante del significado de "4 de 10 de 10 + 3 de 10 + 5 de 1", que es lo que se estrictamente representa el numeral 435. Este significado es bastante complejo, ya que descansa sobre la posibilidad de componer correspondencia de correspondencias, significado éste que no está expresado en el registro verbal. En este artículo se excluirá del análisis tal nivel de interpretación.

Otra dificultad que surge para el niño al comprender los dos registros numéricos está en las contracciones que se hacen sobre el registro verbal: la interpretación de "cuatrocientos" como "4 de 100" supone una descomposición de este morfema en "cuatro/cientos". En el caso de "treinta", esta descomposición es menos clara; supone la descomposición "tre-inta" bastante distante de la idea de "3 de 10".

Retomemos la pregunta formulada. Debido a que las capacidades operatorias de coordinar y componer varios tipos de unidades resultan al-

[5] Para Duval, la operación de conversión es una de las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación semiótica, consistente en una transformación que hace pasar de un registro a otro, de manera que "las representaciones en el otro sistema permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado".

tamente complejas para quienes apenas se están acercando al número, como ocurre con los niños de preescolar y primeros grados de básica primaria, es de esperarse que para darle sentido a lo que se les enseña del SDN recurran a estrategias más elementales adecuadas a su capacidad operatoria. Esta afirmación no es más que la consecuencia inmediata de aceptar que el niño, en tanto sujeto cognoscente, es un dador de significado. Un posible camino que, podemos suponer, sigue el niño, consiste en que, en lugar de trabajar con unidades heterogéneas (de cien, de diez y de uno), recurra a la homogeneización (reducir todas las unidades a "unos"). Precisamente el registro verbal sugiere casi de forma directa esta homogenización: "cuatrocientos/treinta/cinco" como 400/30/5[6] (Kamii, 1986, 1987). Esta vía de interpretación será posible en el caso de que el intérprete (el niño) pueda representarse mentalmente "cuatrocientos" como algo que corresponda a "400 unidades", "treinta" como algo que corresponda a "30 unidades" y "cinco" como "5 unidades".

Aquí es lícito volver a preguntarse ¿qué sucede cuando el niño no posee significados de "cuatrocientos", de "treinta" y de "cinco"? Claramente las expresiones 435 y "cuatrocientos treinta y cinco" carecerán de significado, o el niño tratará de buscar otra u otras vías para asignarle un significado que a él le resulte razonable. En lo que sigue, afirmaremos que, efectivamente, el niño tiene otra vía: la de la sucesión numérica[7], que, a nuestro juicio, es la que prioriza, de forma casi exclusiva, la enseñanza (tanto la que se da en la familia como en la escuela). Intentaremos ilustrar dos aspectos considerados cruciales para nuestra argumentación. En primer lugar, que este recurso, por sí solo, es insuficiente para que la función de conversión entre los dos registros numéricos (el verbal y el hindú-arábigo) posibilite construir una representación mental de expresiones en estos registros basadas en composiciones aditivas y multiplicativas. En segundo lugar, que la enseñanza empobrece el significado de las expresiones numéricas al centrarse casi exclusivamente en la sucesión numérica, y este hecho obstaculiza que el niño construya representaciones mentales adecuadas de los registros numéricos. Debido la forma en que la enseñanza acerca al niño a la sucesión numérica, los significados de las expresiones numéricas descansan fundamentalmente en el lugar que tienen en una sucesión de signos (en cualquiera de los dos registros). En el registro verbal se hace con apoyo en una reglas fonéticas y morfológicas, semejante a lo que ilustra el niño de corta edad al enunciar oralmente la sucesión de palabras de un conteo numérico; al recitar la sucesión de las palabras-números, se detiene en "diecinueve" y pregunta "¿qué sigue?"; al decirle "veinte", continúa: "veintiuno, veintidós...". El registro hindú-arábigo funciona aquí de manera muy cercana a una abreviatura del registro verbal y tiene una regla de generación semejante a la de las expresiones en el registro verbal: los "veinte" se abrevian empezando con la cifra "2" y se van cambiando las cifras de la derecha (veintiuno es 21, veintidós es 22, etc.). La apropiación de estas reglas supone reconocer que las sucesiones de las palabras-número y de los numerales se componen de "sub-sucesiones" (la sucesión básica de 1 a 9, la siguientes de 10 a 19, la siguiente de 20 a 29 hasta llegar a la de 90 a 99); y a partir de 100, sub-sucesiones compuestas de las sub-sucesiones de 100 y de las anteriores, y así sucesivamente. Pero nos parece que esto, por sí mismo, no conlleva composiciones aditivas. Hay niños que saben contar, escriben y leen correctamente números; no obstante, al hacer sus cuentas tienen que agregar a 10 (o a 20, 30, etc.) una cantidad menor de 10, y llevan a cabo una agregación sucesiva de unos; dicen "11,12,13" (o "21,22,23, etc."), pero no logran anticipar que, por ejemplo, 10 y 7 es 17. También se observa a los niños contar de diez en diez (10,20, 30…) y con sus dedos controlar la cantidad de "dieces" contados, para establecer cuántos "dieces"

[6] En el caso de numerales de más de tres cifras, el proceso es un poco más complejo: el registro verbal agrupa de a tres ordenes decimales, como en el caso de 536.687, donde el punto precisamente cumple esta función. 536 miles y 687 unos: quinientos treinta y seis MIL seiscientos ochenta y siete (UNOS), que supondría poder comprender composiciones multiplicativas. Esto implicaría desarrollos del pensamiento multiplicativo relativamente complejos para un niño pequeño.

[7] Se refiere a la sucesión verbal utilizada para el conteo (uno, dos, tres, etc.).

hay en 100. Aunque muestran que se representan las sub-sucesiones de "dieces" y las sub-sucesiones de "cien", se les oculta la relación entre "dieces" y "cientos". Tales hechos pueden interpretarse como que el simple acto del aprendizaje de la sucesión numérica, en sus dos formas de registro, no conlleva la compresión de la composición aditiva inmersa en la construcción de un significado de estos registros. Y esto no es fruto de una condición necesaria derivada de la génesis de la construcción del SDN. Más bien es el resultado de una distorsión generada por las formas de enseñanza, ya que generalmente enfatizan en el aprendizaje de la sucesión verbal numérica y en su representación hindú-arábiga, sin hacer el esfuerzo adecuado para que el niño llegue a representarse mentalmente la idea de agrupaciones de unidades compuestas presentes en los signos verbales numéricos. Los trabajos de Kamii (1986) mostraron que, aunque cuenten, lean y escriban correctamente números de dos cifras, los niños pueden tener dificultad para entender el valor relativo de las cifras y operar con esta idea, debido, precisamente, a su incapacidad para comprender una unidad compuesta. Otros datos nos ayudan a entender los vacíos a que conduce esta forma de proceder

En experiencias de trabajo en el aula y en investigaciones que hemos realizado, constatamos, con alguna frecuencia, que al pedírsele a niños que saben leer y escribir correctamente los numerales que digan cuántas grupos de diez pueden formarse a partir de un numeral de dos cifras (expresado en los dos registros) no hacen las anticipaciones correctas (Castaño, Forero, Baldrich & Puestes, 2006; Castaño, Forero, Latorre & Ramírez, 2005)[8]. Algunos niños, en lugar de obtener la información de manera directa de la expresión, necesitan contar de 10 en 10 para establecer cuántas agrupaciones de 10 hay en una cantidad dada. Algo semejante ocurre cuando se repite la tarea con numerales de tres cifras y se les pide que digan cuántos grupos de 100 pueden formarse. En este caso muchos niños tienen que contar de 100 en 100 para establecer el número de agrupaciones. Sin embargo, esta última tarea es superada por los niños en el proceso de enseñanza-aprendizaje con menor esfuerzo al que hicieron cuando se enfrentaron a tareas en el rango del 1-99, probablemente por la experiencia ya ganada en el rango inferior. Aunque conviene ser cautelosos antes de tomar esta afirmación como válida, ya que también es probable que dicha adquisición resulte más fácil, no sólo por la experiencia acumulada, sino porque el niño encuentra en estos números un apoyo más directo en el registro verbal, hecho que no sucede, como ya se dijo, con los números de dos cifras (hay una diferencia clara entre lo que informan expresiones como "cuatrocientos" y lo que informan expresiones como "cuarenta").

Orozco y Hederich (1997, 2002), al intentar estudiar la relación existente entre las tareas de escribir numerales y dar cuenta de cuántos grupos de 10 o de 100 se necesitan para componer una cantidad expresada por números representados en el registro hindú-arábigo, que ellos llaman de equivalencia, no encuentran correlaciones significativas entre estas dos tareas[9]. Sin embargo, los autores encuentran índices de correlación más altos –que, aunque bajos, sugieren alguna relación posible entre estas dos tareas– en niños de los grados segundo y tercero que en los que cursan tercero a sexto, y proponen explicar este hecho por la interferencia del modelo de "valor de posición" que introduce la enseñanza escolar:

> las mayores correlaciones entre las dos tareas [la de escritura de numerales y de equivalencia] se presentan en segundo y tercer grados. Es difícil interpretar este resultado, si bien podríamos suponer que podría estar indicando que la tarea de equivalencia parece

[8] Se proponen como: se tienen 45 (456 para un rango mayor) osos que se desean empacar en cajas en las que caben 10 (o 100) osos (se muestra el dibujo de una caja en la que, en una de sus caras, aparece inscrito el número 10 –o 100–). ¿Cuántos cajas de éstas se necesitan? _____________. ¿Quedan sobrando osos?

[9] Ellos piden a los niños resolver tareas del tipo: ¿Para formar o tener 325, cuántos de 100 (cuántas centenas) necesitas? ¿Para formar o tener 325, cuántos de 10 (cuántas decenas) necesitas? ¿Para formar o tener 325, cuántos de 1, cuántas unidades necesitas? Por el modelo de "valor de posición" que introduce la enseñanza, los niños aprenden que en 325 hay 3 decenas, 2 decenas y 5 unidades, hecho que los lleva a contestar que para formar 325 se necesitan 2 decenas y no 32.

> estar relacionada con un cierto momento específico de la construcción del sistema de notación. Los niños de segundo y tercer grado se encontrarían en el momento crítico en el que se estructurarían las relaciones de inclusión entre las diferentes unidades del sistema. A partir del tercer grado, todos los niños estarían en capacidad de resolver de forma satisfactoria la tarea de equivalencia, si bien la interferencia del modelo de "valor de posición" haría cada vez más difícil que el niño expresara la respuesta esperada para esta tarea. (Orozco & Hederich, 1997, p. 12).

Hemos constatado en nuestras investigaciones y en procesos de enseñanza en segundo y tercero de básica primaria (edades entre 7 y 9 años), que niños capaces de contar, leer y escribir numerales en un rango al menos hasta 999, y que incluso ejecutan correctamente los algoritmos formales para sumar y restar, tienen gran dificultad para resolver tareas que requieren calcular cuántos grupos de 10 pueden formarse con una cantidad expresada por un numeral de tres cifras (¿cuántas cajas de 10 pueden llenarse con 426 osos?). Aquellos niños que logran resolver correctamente tareas como éstas, siempre muestran gran capacidad para manejar las expresiones numéricas (hacen cuentas con relativa facilidad componiendo y descomponiendo aditivamente expresiones como 347. Al hacer cuentas, las descomponen como 300 más 40 más 7; incluso, algunos lo descomponen como 3 de 100, más 4 de 10 y 7 de 1). Por el contrario, niños que muestran flaquezas en el manejo de estos significados no pueden resolverlas. Resulta muy ilustrativo describir los procedimientos por medio de los cuales los menores que tienen éxito resuelven tareas como éstas:

> E (entrevistador): "¿Cuántas cajas de 10 se pueden llenar con 456 osos?" N (niño): "diez, veinte, treinta… (mientras en sus dedos lleva las cuentas de cuántos "dieces" va sumando),…, cien. 10 cajas y llevo 100. 10 cajas más son 200, 30 cajas más son 300 y 40 cajas son 400 (se detiene, vacila), 50 cajas son 500; ¡ah!, no, me pasé. 40 cajas son 400, 41 cajas son 410, 42 cajas son 420…, 45 cajas son 450. Se necesitan 45 cajas". E. "¿Así se empacan todos los osos?" N. "No, quedan, sobran 6".

Este procedimiento básico puede variar un poco. Algunos niños, al establecer que con 40 cajas empacan 400, dicen de inmediato que necesitan 45, porque para 56 se necesitan 5 cajas más. Es muy diciente la forma como estos niños hacen cuentas. Al establecer que 10 cajas son 100 unidades muestran que pueden operar con unidades de 10 y con unidades de 100, y lo hacen de forma simultánea; pero, además, al mismo tiempo cuentan el número de cajas y los osos empacados sobre las unidades de 1. Algunos niños intentan este procedimiento sin éxito final: "40 cajas son 400, 50 cajas son 410, 60 cajas 420". Este error ilustra la dificultad enorme que encuentran algunos para coordinar los dos tipos de unidades de 10 y de 1. Saben que como al agregar 10 cajas sobrepasan 456, deben pasar a un nivel inferior (las decenas), pero, por falta de coordinación, se olvidan de que las unidades de las cajas son compuestas (de a 10). Los casos expuestos muestran la debilidad de los significados que los niños logran de las expresiones del SDN por el énfasis, a veces exclusivo, de hacer descansar la numeración en el aprendizaje de la sucesión numérica. Nos parece, como trataremos de mostrarlo más adelante, que este hecho puede vincularse con una posible explicación de algunos de los errores que los niños cometen al escribir numerales.

El análisis hecho hasta ahora devela la complejidad cognitiva involucrada en el ejercicio de asignar significado a las expresiones que se producen en el SDN. Muestra que no existe una correspondencia exacta entre los dos tipos de registros y que la conversión entre los dos registros del SDN requiere de operaciones cognitivas complejas, algunas de ellas también en proceso de construcción por parte del niño, a la par con el mismo SDN. Estudiar las producciones de los niños al margen de esta complejidad cognitiva conlleva el riesgo de "naturalizar" los esfuerzos de ellos por apropiarse de unas reglas de lectura y escritura de las expresiones numéricas que le son presentadas, ocultándole las reales reglas de conversión y, sobre todo, descuidando ofrecer el apoyo adecuado para que construya, en el nivel necesario, la capacidad de las composiciones y descomposiciones aditiva y multiplicativa requeridas en la comprensión de los significados de las expresiones numéricas. Pasemos ahora a presentar algunos resultados obtenidos a partir de los estudios de transcodificación numérica y a establecer algunas relaciones entre éstos y el análisis hecho hasta aquí.

Aportes de los estudios de transcodificación numérica

Los estudios de transcodificación numérica en niños consisten en investigar la forma como ellos procesan información numérica cuando hacen conversión del registro hindú-arábigo al registro verbal y viceversa. Estos estudios se asientan en la investigación neuropsicológica cognitiva, de la que son pioneros los trabajos de McCloskey y colaboradores (McCloskey, 1992; McCloskey, Aliminosa & Sokol, 1991; McCloskey, Caramazza y Basili, 1985). Silvia Jacubovich (2006) señala que actualmente las investigaciones en esta área toman como referencia principal los modelos teóricos de estos dos autores. El primero desarrolla un modelo de tipo funcional, y el segundo, además, aborda el sustrato neural de los componentes.

Orozco, Guerrero y Otálora (2007) consideran los trabajos de Power y Dal Martello como los primeros esfuerzos de aplicar los estudios de transcodifación en niños. Según Orozco et al. estos autores:

> proponen que el proceso de transcodificación requiere de la activación y aplicación de reglas relacionadas con la estructura semántica de la expresión verbal, que influyen en la producción del numeral arábigo (…) encuentran que a los 7 años, los niños transcodifican correctamente numerales menores de 100, pero al escribir números de 3 y 4 dígitos cometen preponderantemente errores sintácticos, caracterizados por la inserción de ceros extras. Por ejemplo, "trescientos sesenta y cinco" lo escriben como 30065 o 3065. Suponen que estos errores resultan de una aplicación errónea de la operación de concatenación y no de la regla de sobrescritura[10]. Por ejemplo, la transcodificación de "doscientos cinco" requiere aplicar la regla, según la cual el 5 se escribe sobre el último 0 del 200; sin embargo, los niños aplican el operador de concatenación y añaden el 5 al 200 y escriben 2005. (p. 3).

Orozco y colaboradores adelantan investigaciones en las que amplían la tipificación dada por Power y Dal Martello (Orozco et al., 2007; Orozco & Hederich, 2002). Orozco et al. (2007) concluyen que:

> desde la perspectiva del modelo ideal, el sistema de notación en base diez exige utilizar operaciones de composición y descomposición de tipo aditivo y multiplicativo. Sin embargo, *los niños no componen y menos aún descomponen las expresiones numéricas, ni los operadores de suma y multiplicación rigen la escritura de sus producciones erradas*. Parece ser que ellos fragmentan las expresiones que escuchan, probablemente en función de su experiencia, utilizando fragmentos reconocibles y al escribir el numeral correspondiente, utilizan dígitos, nudos o numerales compuestos en rango inferior para codificar fragmentos y relaciones variadas de contigüidad para unirlos[11] (Orozco et al., 2007, p. 6).. ()

El análisis minucioso de un amplio conjunto de datos empíricos les permite a estos autores afirmar que las escrituras de los niños no están orientadas por composiciones y descomposiciones de tipo aditivo y multiplicativo semejantes a las que hemos

10 "Los niños concatenan cuando solamente codifican dígitos que corresponden con las marcas de cantidad presentes en la expresión verbal. Por ejemplo, escriben ac por abc. En algunos casos, los niños escriben a0d por abcd, o sea, concatenan los dígitos que codifican las marcas de cantidad básica, presentes en la expresión verbal, con 'cero que indica mil'. En otros casos, escriben a(.)cd por abcd; igualmente concatenan los dígitos que codifican marcas de cantidad básica con 'punto que indica mil'. Como se verá más adelante, los niños tienden a concatenar numerales que presentan ceros intermedios en centenas o decenas" (Orozco et al., 2007, p. 6). Los niños sobrescriben cuando sobre uno o varios ceros del numeral correspondiente al fragmento de la unidad mayor escriben los fragmentos restantes (ej, "tres mil doscientos cuarenta y seis" se escribe como 300246 0 30246; sobre los ceros de 3000 se sobrescribe 246).

11 El énfasis es mío.

descrito, sino que fragmentan las expresiones que escuchan, probablemente en función de su experiencia. Nosotros hemos encontrado algunos de los errores que describen estos autores en nuestras indagaciones, pero consideramos que para explicarlos, además del factor de experiencia, es necesario introducir el componente operatorio. Más exactamente, al poner en relación los componentes operatorios involucrados en la compresión del número con las condiciones en las que los niños hacen sus producciones, se abren posibilidades distintas para entender los mecanismos que las rigen. Se llega a unas conclusiones cuando se asumen como una necesidad inherente al pensamiento de los niños, recurriendo, por ejemplo, a razones propias de procesamiento de información, y a otras si se tiene en cuenta cuál es la dirección que el niño da a sus producciones debido a las influencias de la enseñanza. Hemos dicho que el proceso de enseñanza en lugar de facilitar que el niño interprete los registros numéricos y haga las conversiones entre ambos registros en términos de composiciones aditivas y multiplicativas –que, como hemos argumentado, parece razonable admitir están en la base de estas expresiones numéricas–, enfatiza significaciones basadas en la sucesión numérica. Parece que este hecho es definitivo, ya que en lugar de poner al niño en una real actitud de construcción de conocimiento lo coloca en una simple actividad imitativa (reproductiva). Introducir las condiciones en las que los niños producen conversiones entre los dos registros numéricos hace posible reinterpretar las razones que los llevan a cometer algunos de los errores que los estudios citados describen. Como corolario de estas afirmaciones, se desprende que si se ofreciera una enseñanza a los niños que les facilitara construcciones de los registros numéricos basadas en las composiciones aditivas y multiplicativas, la tipología de errores encontrados seguramente tendría variaciones; algunos no aparecerían y quizá surgirían otros distintos. Identificar algunas constancias en los errores que cometen los niños al hacer conversiones de un registro a otro, en experiencias de enseñanza con claras diferencias estructurales, abre la posibilidad de identificar mecanismos más profundos inherentes a la comprensión de los registros numéricos. A continuación se presentan algunos hechos que hemos encontrado. Si bien todavía no son suficientemente amplios y no pueden considerarse como razones categóricas favorables las afirmaciones recién hechas, sí cumplen la función de ilustrar el sentido de lo dicho. Además, ofrecen indicios iniciales en favor de la plausibilidad de esta forma de abordar el problema de la explicación de los progresos de los niños al dar significado a los registros numéricos.

En experiencias de enseñanza en las que, en lugar de enseñar los algoritmos formales para ejecutar las operaciones aritméticas entre números, se estimula a los niños para que hagan cuentas siguiendo su propios procedimientos, se encuentra que ellos llevan a cabo operaciones basadas en las descomposiciones y recomposiciones aditivas o aditivas-multiplicativas, sugeridas por el registro verbal. Por ejemplo, al resolver un problema que requiere calcular la suma 47 + 25, los niños hacen sus cuentas siguiendo un procedimiento como: 40 + 20 = 60[12], después 60 + 7 = 67, y, por último, 67 + 5 = 72. Se encuentran pequeñas variaciones dependiendo de diferencias en las construcciones alcanzadas[13]. Este procedimiento muestra que los niños están asignado significado a los numerales sobre descomposiciones y composiciones aditivas. Hay otros que proceden de forma un poco distinta; al sumar 40 + 20, dicen "4 y 2 = 6, son 60". Estos niños muestran que no necesitan sumar "cuarenta unos" y "veinte unos", sino que además de reconocer la equivalencia entre "cuarenta unos" y "cuatro unidades de diez" y entre "veinte unos" y "dos unidades de diez", pueden operar con estas equivalencias, razón por la que convierten sumas de unidades de diez (4 y 2 son 6) en unidades de uno (son 60). Esta forma de hacer cuentas muestra que el niño empieza a asignar un significado

[12] La escritura que hacemos es nuestra. La presentamos para ilustrar el procedimiento seguido, pero no es la que el niño hace exactamente. Ésta es inferida por el investigador o el maestro al tratar de explicarse lo que hace el niño "en su mente" (como lo dicen algunos niños).

[13] Puede que el niño al agregar 7 a 60, cuente 61, 62…, 67, o simplemente anticipe que es 67. También puede suceder que no descomponga 47 sino que de una vez calcule 47 + 20 = 65….

aditivo-multiplicativo, hecho que supone un progreso con relación al procedimiento anterior.

Otros datos, ligados de manera directa a la tarea de escritura y lectura de numerales, pueden ser útiles para nuestro análisis. Los casos que a continuación se presentan corresponden a niños de segundo de primaria, con los que el equipo de investigación[14] había desarrollado una secuencia didáctica en la que se buscó fortalecer la comprensión del SDN en el rango de 0-999, que previamente había enseñando la profesora, y extenderla al rango inmediatamente superior. Se trabajó durante 20 sesiones de hora y media cada una, con una frecuencia de dos sesiones por semana. Se estimuló a los niños para que hicieran cuentas mediante procedimientos propios y se los invitó y apoyó para que inventaran sus propias formas de escribirlas. Insistentemente se les manifestó que cuando no supieran escribir los números, porque no se los habían enseñado o simplemente porque se les había olvidado, intentarán pensar cómo creían que debían escribirse. Los datos que se muestran corresponden a tres pruebas. Una elaborada y aplicada por la profesora en la semana anterior al inicio de nuestra intervención, en la que evalúa si los niños escriben y leen numerales hasta de tres cifras; la segunda aplicada en la segunda sesión de trabajo, en la que se indaga por la escritura y lectura de numerales hasta de cuatro cifras, para recoger información sobre las hipótesis que los niños se hacían sobre los numerales en el rango inmediatamente superior. En las tareas de escritura de numerales se les dictaba el numeral (verbalizando de forma lenta y se repetía, si algún niño lo requería). Estas tareas se presentaron de dos formas: una sin referente, en la que simplemente se pedía al niño que escribiera el numeral; y otra con referente, en la que se mostraba la escritura del número nodo (por ejemplo, se decía "si 'dos mil' se escribe 2000, ¿cómo cree que se escribirá 2345[15]?"). La tercera prueba se aplicó en la última sesión de trabajo, e incluyó tareas de escritura de numerales de hasta seis cifras, semejantes a la segunda prueba.

Tabla 1
Escritura de numerales dictado

SEGUNDA PRUEBA				TERCERA PRUEBA			
Escritura de numerales sin referencia		Escritura de numerales con referencia		Escritura de numerales sin referencia		Escritura de numerales con referencia	
2345	2300/45*	2024	20024	1200	1000/200	16345	16000/345
2009	C	2435	2400/35	2309	2000/309	162000	16000/200
3000	300	2004	C	4002	4000/2	16045	16000/45
		5007	5000/7	9345	9000/345	23789	23000/789
		5040	5000/40	7009	7000/9	234000	23000/400
		5048	5000/48	3000	30000	23007	23000/7
						9024	9000/24
						9435	9000/435
						9004	9000/4

Nota. * Se coloca "/" segmentando la escritura según nuestra interpretación. Escribiremos C en el caso de ser la escritura correcta.
Fuente: elaboración propia.

14 El equipo de Cognición y Escuela. Participaron, además del autor, Amparo Forero, coinvestigadora, y los estudiantes practicantes Francisco Paille, Natalia García, Claudia Flores, Yuly Lorena Ardila y Lindsey Balaguera.

15 Dado el momento en el que estaban los niños, se tomó la decisión de prescindir del punto de las unidades de mil.

El caso de Yury. En la primera prueba la niña muestra que escribe y lee correctamente numerales de dos y tres cifras.

Sorprende la coherencia con la que la niña hace sus producciones, al punto que podría decirse que están soportadas en una verdadera hipótesis. La niña la mantiene incluso en casos en que los números referencia son 45.000 y 119.000. Sus escrituras se caracterizan porque en los dos casos (escrituras sin y con referencia) el numeral se compone de dos segmentos, el nodo y el numeral de dos o tres cifras (numerales que la niña escribe y lee correctamente). Casos como el de Yury los encontramos en otros niños y niñas de este curso, y posiblemente son el resultado de la forma en que tuvo lugar el proceso de enseñanza. La escritura que nos presenta Yury es tipificada como un error de yuxtapoción (Nunes & Bryant, 1999; Scheuer, Sinclair, Merlo de Rivas & Tièche, 2000, como se citan en Lerner & Sadovsky, 1994; Orozco et al., 2007). Se considera que este error es cometido porque los niños segmentan en partes la expresión verbal; en este caso, una está compuesta por el nodo y la otra por los elementos restantes. Escrituras de este tipo podrían interpretarse como un simple acto de yuxtaposición, como si únicamente existiera la intención de pasar sucesivamente segmentos del registro verbal (cinco mil/siete) al registro escrito. Pero otra interpretación posible podría ser que estas escrituras se rigen por la intención de la niña de darle significado a las expresiones numéricas, y que en este caso están orientadas por composiciones aditivas. A partir de lo observado en experiencias de enseñanza, nos parece que hay casos en los que claramente los niños interpretan estas expresiones numéricas con base en composiciones aditivas, ya que cuando se los enfrenta a problemas aditivos simples directos[16], en los que deben hacer cuentas simples, las utilizan correctamente al hacer las cuentas.

[16] Que requieren situaciones en las que se pregunta "¿cuánto reúne?, ¿cuánto sobra?".

Discusión

Hemos afirmado que los registros numéricos tienen sintaxis diferentes. El hindú-arábigo tiene una sintaxis polinomial en la que están presentes composiciones de correspondencias; el verbal, por su parte, descansa en una sintaxis que requiere composiciones aditivas y aditivas-multiplicativas. Las aproximaciones iniciales de los niños al SDN se soportan en los significados que el registro verbal sugiere, y ellas son posibles en la medida en que el niño se va haciendo a estas capacidades operatorias; en un comienzo dan significados aditivos a los numerales, debido a la necesidad que tienen de trabajar con unidades homogéneas, precisamente por la dificultad de coordinar composiciones con varios tipos de unidades. Los significados aditivo-multiplicativos aparecen un poco después a medida que el niño se hace capaz de coordinar diferentes tipos de unidades. Las posibilidades de desplegar estas capacidades operatorias están ligadas a la extensión de la expresión, debido a que incluye más elementos por componer y más unidades por coordinar.

También hemos dicho que, debido a que fuerza al niño a trabajar de forma casi exclusiva sobre la sucesiones numéricas (tanto la verbal, como la hindú-arábiga), la enseñanza empobrece las relaciones posibles de establecer entre los dos registros numéricos. El registro hindú-arábigo se reduce a una especie de abreviatura del verbal, y así se simplifica las representaciones mentales que los niños logran hacerse de las expresiones numéricas a una especie de taquigrafía que da cuentas de puestos en una sucesión.

Si bien los niños "fragmentan las expresiones que escuchan al escribir los números", y en algunos casos intentan sobreponer sobre los ceros del número nodo los fragmentos correspondientes al orden inferior, estos errores pueden ser interpretados como resultados de intentos fallidos al tratar de imitar (sin entender realmente lo que esto representa) una regla de escritura posicional propia del registro hindú-arábigo, cuando aún ellos están trabajando con los significados aditivos y aditivo-multiplicativos sugeridos por el registro verbal, y que son los que están en condiciones de producir.

Duval (2004) muestra las grandes dificultades presentes en la conversión de registros heterogéneos, que es el caso de dos registros numéricos:

> se ha probado que cambiar la forma de representación es, para muchos, alumnos de los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible. Todo sucede como si para la mayoría de los alumnos la comprensión que logran de un contenido quedara limitada a la forma de la representación (p. 28).

El sistema decimal de numeración es un sistema semiótico que cumple la función de representación (en este caso de conceptos numéricos) y de herramienta para pensar y operar con estos conceptos. Estas dos funciones, aunque diferenciables, no son separables. Según Duval (2004):

> desde un punto de vista genético, las representaciones mentales y las representaciones semióticas no pueden oponerse como dominios totalmente diferentes. El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas de la misma manera que la imágenes mentales son una interiorización de los preceptos (Vigotski, 1985; Piaget, 1968, Denis, 1989) (…) las representaciones mentales nunca pueden considerarse independientemente de las representaciones semióticas (p. 15).

Duval (2004) señala, además, que hay tres formas diferentes de referirse a las representación mentales. En primer lugar, la propia del estructuralismo genético, la representación mental como interiorización de la acción: “La interiorización de las acciones supone también su reconstrucción sobre un nuevo plano; esta reconstrucción puede pasar por las mismas fases pero con un desfase mayor que la reconstrucción anterior de la acción misma” (Piaget, 1969, como se cita en Duval, 2004). Otra forma de entender la representación corresponde a la perspectiva de procesamiento de información; en este caso la representación es entendida como representación computacional, se trata de una codificación de la información, y hace referencia a la forma como ésta puede describirse y tomarse en cuenta en un sistema de tratamiento. La tercera forma es entendida como representación semiótica.

> La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos y en que pueden ser convertidas en representaciones “equivalentes” en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza. La noción de representación semiótica presupone, pues, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de las representaciones de un sistema semiótico a otro. (Duval, 2004, p. 27).

En lugar de oponer estos tres tipos de representación, Duval encuentra en ellas complementariedad. Las representaciones mentales son internas y conscientes y cumplen la función de objetivación; las computaciones son internas y no-conscientes y cumplen la función de tratamiento automático; por último, las semióticas son externas y conscientes y cumplen las funciones de objetivación, de expresión y de tratamiento intencional.

Ligar los esfuerzos de los niños al tratar de hacer conversiones entre los dos registros numéricos a las condiciones en las que se producen estos esfuerzos abre la posibilidad de entender mejor los mecanismos cognitivos implicados en esta operación. Es posible afirmar que las reglas que explican los errores identificados en los estudios de transcodificación numérica obedecen a construcciones que los niños van haciendo, relacionadas con unas formas particulares de acercamiento al tema, y que muy seguramente algunas de estas reglas podrían ser distintas en la medida en que se hicieran acercamientos diferentes. Puede resultar enriquecedor vincular los estudios de transcodificación numérica a los esfuerzos por parte de los sujetos para comprender esos significados, dando cuenta de los acompañamientos didácticos sistemáticos y adecuados, para develar en el análisis qué es lo propio de aprendizajes locales y qué es lo propio de aprendizajes amplios que permite producir explicaciones en términos de los significados que los aprendices van ganando y de sus capacidades cognitivas. Recorrer este camino ofrecerá información en este campo particular de la comprensión del sistema decimal de numeración sobre el inter-juego de las representaciones mentales y semióticas.

Referencias

Bruner, J. (1998). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Madrid: Alianza Editorial.

Castaño, J., Forero, A., Baldrich. D. & Puentes S. (2006). *Evaluación del pensamiento numérico en niños de segundo de primaria. Prueba Euler II. El sub-campo del sistema decimal de numeración*. Tesis de grado no publicada. Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia.

Castaño, J., Forero, A., Latorre, T. & Ramírez, D. (2005). *Exploración de niveles de competencia en el pensamiento numérico en niños de segundo de primaria. Validación de la prueba Euler II.* Tesis de grado no publicada. Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia.

Castaño, J., Negret, J.C. & Robledo, A.M. (1991). *Un marco para comprender la construcción del sistema decimal de numeración por parte del niño*. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana, Facultad de Psicología.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Jacubovich, S. (2006). Modelos actuales de procesamiento del número y el cálculo. *Revista Argentina de Neuropsicología*, *7*, 21-31.

Lerner, D. & Sadovsky, P. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En C. Parra & I. Saíz (Eds.), *Didáctica de matemáticas: aportes y reflexiones* (pp. 93-184). Buenos Aires: Paidós.

Kamii, C. (1986). *El niño reinventa la aritmética*. Madrid: Visor, Aprendizaje.

Kamii, C. (1987). *Reinventando la aritmética II*. Madrid: Visor, Aprendizaje.

McCloskey, M. (1992). Cognitive Mechanisms in Numerical Processing: Evidence from Acquired Dyscalculia. *Cognition, 44,* 107-157.

McCloskey, M., Aliminosa, D. & Sokol, S. (1991). Facts, Rules and Procedures in Normal Calculation: Evidence from Multiple Single-patient Studies of Impaired Arithmetic Fact Retrieval. *Brain and Cognition*, *17*, 154-203.

McCloskey, M., Caramazza, A. & Basili, A. (1985). Cognitive Mechanisms in Number Processing and Calculation: Evidence from Dyscalculia. *Brain and Cognition*, *4*, 171-196.

Orozco, M., Guerrero, D. & Otálora, Y. (2007). Los errores sintácticos al escribir numerales en rango superior. *Infancia y aprendizaje, 30* (2), 147-162.

Orozco, M. & Hederich, C. (1997). *Construcción de la operación multiplicativa y del sistema de notación en base 10: Una relación posible.* Santiago de Cali: Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados en Psicología, Cognición y Cultura, Universidad del Valle.

Orozco, M. & Hederich, C. (2002). *Errores de los niños al escribir numerales dictados*. Recuperado el 20 de enero de 2004, de http://www.univalle.edu.co/~cognitiv.