

Información de la revista
 Título abreviado: *Sophia*
 ISSN (electrónico): 2346-0806
 ISSN (impreso): 1794-8932

Información del artículo
 Recibido: Enero 25 de 2015
 Revisado: Febrero 03 de 2015
 Aceptado: Julio 30 de 2015

¿Es el cuadrado un rectángulo?*

Is the square a rectangle?

Orlando Aya Corredor**
 Armando Echeverry Gaitán***
 Carmen Samper****

**Magister en docencia de la Matemática, profesor auxiliar Universidad Pedagógica Nacional. oaya@pedagogica.edu.co. Bogotá, Colombia.

***Magister en docencia de la Matemática, profesor Secretario de Educación del Distrito. armandoech@gmail.com. Bogotá, Colombia.

****Magister en Matemáticas, profesora Emérita Universidad Pedagógica Nacional. csamper@pedagogica.edu.co. Bogotá, Colombia.

Cómo citar: Aya, O; Echeverry, A. & Samper, C. (2016) ¿Es es el cuadrado un rectángulo? *Sophia* 12(1):139-158.

Resumen

El concepto de un objeto geométrico está mediado, entre otras cosas, por las experiencias que se tienen con él. La hipótesis de este estudio es que realizar un proceso de conceptualización de un objeto, con el uso de un entorno de geometría dinámica, ayuda no solo a formular, formalizar y estructurar definiciones jerárquicas y económicas de los objetos, sino además a hacer ostensible la definición con la que los estudiantes trabajan en un contexto de actividad demostrativa. Para sustentar la hipótesis se analizaron sesiones de clases de dos espacios académicos consecutivos de un programa de formación inicial de profesores, y un cuestionario aplicado a los estudiantes. Se buscaron así evidencias que permitieran, sustentado en el marco teórico que orientó el estudio, determinar el impacto de trabajar en un entorno donde se usa un software de geometría dinámica como mediador para el aprendizaje. Los resultados permitieron establecer, entre otras cosas, que el trabajo realizado con geometría dinámica debe ir acompañado de acciones intencionadas orientadas por la docente. Se evidenció que se continúan presentando, aún después de usar geometría dinámica, varias dificultades respecto al concepto del objeto geométrico cuadrado, como el predominio de los aspectos figurales sobre los conceptuales, y la dificultad para modificar las definiciones personales del concepto y las imágenes conceptuales, que surgen cuando los estudiantes realizan actividad demostrativa.

Palabras Clave: Conceptualización, construcción de definiciones, geometría dinámica, definiciones jerárquicas, aprendizaje

*El presente artículo es producto de una tesis de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, inscrito en la línea de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría.

The concept of a geometric object occurs, among other things, because of experiences on such object. The hypothesis of this study, is that performing a conceptualization process of an object, using a surrounding of dynamic geometry, helps not only to state, formalize and structure hierarchic and economic definitions of objects, but also to establish the definition used by the students working in a context of demonstrative activity. In supporting the hypothesis, sessions of classes of two consecutive academic spaces, of a teacher initial formation program, and a questionnaire applied to the students, were analyzed. The study sought evidences which lead, supported on the theoretic framework that guided the study, to determine the impact of working in a surrounding, where a software of dynamic geometry is used, as a mediator for learning. The results led to establish, among other things, that the work performed with dynamic geometry should be accompanied by intentioned actions guide by the teacher. It was proved that, even after using dynamic geometry, difficulties continue appear regarding the concept of the square geometric object, as predominance of figure aspects on conceptual ones, and difficulty to modify personal definitions of the concept and conceptual images, surged when the students realize any demonstrative activity.

Keywords: Conceptualization, construction of definitions, dynamic geometry, hierarchic definitions.

Introducción

La construcción de definiciones en matemáticas escolares ha sido un problema estudiado con relativa amplitud en la educación matemática. Respecto a aspectos esencialmente teóricos, investigadores como Tall y Vinner (2002) formularon su conceptualización del “*concept image*” y “*concept definition*”, Fischbein (1993) planteó, para la geometría, la teoría de los conceptos figurales, y de Villiers (1998) una categorización para la forma como pueden introducirse las definiciones en el aula, ya sean definiciones constructivas o descriptivas. También, establece el tipo de definiciones que pueden construir los estudiantes, jeraquicas o no, económicas o no. En el campo de estudios aplicados, la producción es aun más amplia, y reseñarla rebasa el espacio en un artículo de esta naturaleza. Es de relevancia para este trabajo mencionar que desde la aparición de software de geometría dinámica, se han desarrollado estudios para determinar su relación con la construcción de clasificaciones jerárquicas (de Villiers 2004, Jones 2000), o para poner a prueba si los estudiantes elaboran definiciones conceptuales o simples representaciones figurales (Furinghetti 2002). Los autores mencionados proveen elementos importantes para estudios interesados en realizar un análisis interpretativo, no cognitivo, de lo que sucede en el aula de geometría cuando se trabaja con definiciones.

En el presente artículo, reportamos un estudio desarrollado para verificar la hipótesis: “el uso de geometría dinámica, incide significativamente en el proceso de conceptualización”. El objetivo principal del estudio fue analizar si el uso de geometría dinámica propicia la construcción y formulación de definiciones jerárquicas y económicas. El contexto de la investigación fue la actividad realizada en torno a dos conceptos particulares, rectángulo y cuadrado, en dos cursos de geometría, durante dos semestres consecutivos, para contar con la misma población, de un programa de formación inicial de maestros de matemáticas, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. En dichos cursos se había elaborado un diseño para la conceptualización apoyado en geometría dinámica.

En el primer curso se enfatiza, primordialmente, el estudio de definiciones y se desarrollan competencias para que, usando geometría dinámica, se puedan realizar procesos de conjeturación, donde a partir de la exploración de una situación, se establezca una conjetura; en el segundo, el propósito es la formulación de demostraciones de conjeturas establecidas con el uso de la geometría dinámica. La introducción del uso de la geometría dinámica era, en ese momento, una innovación. Por ello, estos cursos se volvieron el escenario propicio para validar nuestra hipótesis. Para verificarla, tomamos registros de audio y video de las clases de los dos espacios mencionados. Adicionalmente, contamos con las respuestas de los estudiantes, en el segundo semestre,

a un cuestionario (ver sección 3.3.2) diseñado para examinar los aspectos que no eran visibles en los registros de audio y video de las interacciones. A partir de la revisión teórica realizada, se construyeron categorías de análisis, especialmente apoyadas en de Villiers (1986, 1998, 2004). Con estas como marco de análisis, se estudiaron las interacciones y las respuestas dadas por los estudiantes al cuestionario.

Perspectiva teórica

Investigadores como Tall y Vinner (2002) han estudiado el proceso de construcción de definiciones; su hipótesis es que para que los estudiantes accedan a definiciones matemáticas se requiere emular el proceso histórico: pasar de la construcción de definiciones en contextos empíricos al establecimiento de una definición formal mediante refinamiento. Para los estudiantes, el conflicto entre las aproximaciones y la definición formal constituye un obstáculo real que puede incidir en la comprensión del concepto. Así, la forma cómo se realiza el proceso de conceptualizar constituye un aspecto crucial en la educación matemática de una persona.

Para Tall y Vinner (2002), el proceso de formación de un concepto involucra la interacción entre la *definición del concepto*, que corresponde a la que se da desde la matemática y la *imagen conceptual* o la definición existente en la mente del estudiante, la cual no siempre coincide con la del concepto. Tal interacción se realiza por un largo periodo durante el cual las experiencias con el concepto deben ir transformando la imagen conceptual y la definición personal. Los resultados de su investigación muestran que, habitualmente, los profesores creen que el estudiante forma la *imagen conceptual* a través de la *definición del concepto*. En consecuencia, esperan que esta última controlará a la primera, y que, en cualquier tarea con el uso del concepto, el estudiante recurrirá a la definición del concepto. La práctica ha mostrado que el camino seguido es diferente, pues generalmente los estudiantes solo hacen uso de su *imagen conceptual*.

Fischbein (1993) introduce el término *concepto figural* para destacar la naturaleza dual que tienen los conceptos en geometría, pues involucran aspectos tanto teóricos como figurales (usualmente asociados

a las imágenes conceptuales). Suele ocurrir que lo figural prime sobre lo conceptual; esto es, que la *imagen conceptual* prime sobre la *definición del concepto*, lo que puede explicar muchos errores en el razonamiento geométrico de un estudiante (Mariotti & Fischbein, 1997; Fischbein, 1993).

De Villiers (1986, 1998) caracteriza el proceso de construcción de definiciones; para él, existen dos procesos asociados a la tarea de definir conceptos en matemáticas: *descriptivo* (a posteriori) y *constructivo* (a priori). Las *definiciones descriptivas* se logran cuando se han tenido experiencias, durante algún tiempo, con las propiedades del objeto, y se escogen, de estas, aquellas a partir de las cuales las demás pueden ser verificadas o deducidas lógicamente. El subconjunto así determinado constituye la definición y las demás propiedades pasan a ser teoremas. El papel de estas definiciones es sistematizar el conocimiento existente. Las *definiciones constructivas* surgen cuando una propiedad dada en una definición se cambia por medio de algún proceso lógico (exclusión, generalización, especialización, reemplazo o adición de propiedades a la definición) para formar un nuevo concepto; su papel es producir nuevo conocimiento.

De Villiers (1998) presenta una categorización para la elaboración de clasificaciones asociadas al proceso de definir: la *jerárquica* y la *particional*. *Clasificar jerárquicamente* significa organizar conceptos de manera tal que los más particulares sean subclases de otros más generales (inclusión de clases). En una *clasificación particional* las diferentes subclases del concepto son consideradas como disjuntas unas de otras. Por ejemplo, en el primer caso se puede definir un cuadrado como un caso particular de rectángulo, y este a su vez como un paralelogramo particular; en la segunda, un cuadrado no es un rectángulo y un rectángulo no es un paralelogramo. Las clasificaciones jerárquicas usualmente están vinculadas con definiciones que contienen únicamente las propiedades suficientes y necesarias para definir el objeto, denominado por de Villiers como *definiciones correctas y económicas*. Las clasificaciones particionales con frecuencia están asociadas a definiciones que, aunque no son incorrectas, contienen información no esencial, lo que de Villiers nombra como *definiciones correctas no económicas*.

Otro constructo que jugó un papel importante en nuestro estudio es el de *actividad demostrativa*. Según Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006), este va más allá de la demostración e involucra dos procesos el: “Conformado por acciones tendientes a producir una conjetura y el conformado por las acciones tendientes a producir una justificación” (p. 397). En el primero, tienen un papel importante acciones como la visualización, la exploración, la elaboración de conjeturas, y la verificación; el segundo, involucra acciones como explicar, justificar y sistematizar resultados.

Las definiciones de los objetos geométricos juegan un papel importante en la actividad demostrativa debido a que, como lo reportan varios investigadores, una de las dificultades asociadas al proceso deductivo radica en la escasa comprensión de la naturaleza y el papel de las definiciones, y en la dificultad para discernir las condiciones suficientes y necesarias de las mismas. Si una *definición personal del concepto* no concuerda con la *definición del concepto*, la posibilidad de tener éxito en la justificación se verá afectada.

Respecto al uso de geometría dinámica en el proceso de definir, consideramos, coincidiendo con Mariotti (1997) y Govender (2002), que un entorno de geometría dinámica permite que las restricciones figurales, es decir, aquellas que se asignan equivocadamente a la definición por la limitante de su representación figural, surjan en el momento de construirla o validarla. Así, usar geometría dinámica en el marco de un proceso de conceptualización, puede ayudar a superar las dificultades que las representaciones restringidas y prototípicas suelen generar.

Para Mariotti las imágenes que se producen en el micromundo de un programa de geometría dinámica están controladas de manera lógica por los comandos de los diferentes menús; es decir, en la figura hay componentes tanto preceptuales como lógicos ligados a los aspectos figurales y conceptuales del objeto. Por lo anterior, la geometría dinámica resulta de gran utilidad, no solo para que se dé la disyuntiva dialéctica entre ellos, sino para lograr una adecuada integración de los mismos dentro de los procesos relacionados con el razonamiento lógico. De Govender retomamos su propuesta didáctica, en

la que las definiciones no son suministradas por el profesor sino obtenidas tras un proceso constructivo y una actividad creativa que aporta a la comprensión del uso y del papel de las definiciones. La exploración de figuras en un entorno de geometría dinámica permite que, al usar el arrastre, se develen los invariantes del objeto para así poder determinar cuáles son realmente las condiciones necesarias y suficientes que permiten definirlo. Adicionalmente, Furinghetti & Paola (2002) consideran que el trabajo de construcción en geometría dinámica permite hacer ostensiva la definición que los estudiantes usan.

Materiales y métodos

El presente estudio aborda “desde el contexto didáctico y pedagógico” la intervención de una docente en un espacio de enseñanza y de aprendizaje donde se analiza, desde los referentes teóricos presentados anteriormente, el potencial del uso de un mediador como la geometría dinámica, y la adecuada intervención de la docente, en la conceptualización del objeto geométrico cuadrado.

Caracterizamos este estudio como descriptivo e interpretativo, con un modelo de diseño emergente (Calvo 2001), pues no solo se analizan producciones escritas de los estudiantes, sino también sus interacciones verbales en el aula. Es de diseño emergente pues los instrumentos para la recolección de los datos se fueron diseñando en el curso del trabajo, y las categorías de análisis, para examinar los resultados, enmarcadas en los aspectos teóricos que sirvieron de referencia, fueron diseñadas por los autores. Los elementos cuantitativos realizados son conteos simples de frecuencias que sirven de referente para el análisis de tipo cualitativo.

Los datos del estudio fueron tomados durante el desarrollo de los cursos *Elementos de Geometría* y *Geometría Plana*, dirigidos por la misma profesora, cursos que hacen parte de la línea de geometría del programa de formación inicial de profesores de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. El seguimiento se realizó a la misma población (25 estudiantes de edades entre 16 y 20 años) durante un año. Se escogieron los dos cursos ya que en el primero se trabaja el proceso de construcción de definiciones usando geometría dinámica y en el segundo estas se emplean en el marco de la actividad demostrativa.

En el curso *Elementos de geometría* se tomaron registro de audio y video de 7 clases en las cuales los estudiantes desarrollaron tres actividades: 1. Definiendo el rectángulo, 2. El rectángulo y el cuadrado y 3. El rectángulo y el paralelogramo. En el curso de *Geometría Plana* se tomaron registros de audio y video de 5 clases, en las cuales los estudiantes desarrollaron un conjunto de actividades alrededor de una situación que se de denomina “El cuadrilátero de Saccheri”. En ese mismo curso se aplicó un cuestionario con cinco preguntas relativas al objeto geométrico cuadrado. De la transcripción del audio y video de las clases, se hizo un análisis cualitativo a la luz del marco teórico de referencia. Las respuestas a las preguntas del cuestionario fueron clasificadas de acuerdo con las categorías que se formulan más adelante, establecidas a la luz del marco teórico.

En la tabla 1 relacionamos los aspectos generales del análisis, los instrumentos de recolección de información, la finalidad de la recolección de esos datos, y la acción investigativa sobre los datos producidos.

Tabla 1. Momentos de análisis e instrumentos de recolección de los datos

Momentos	Instrumentos	Finalidad	Acción investigativa sobre la información
1. Proceso de introducción de la definición	Registros de audio y video de siete clases de <i>Elementos de Geometría</i> , (primer semestre) en las cuales los estudiantes hicieron el desarrollo de las tres actividades en torno a la definición de cuadrado.	Caracterizar el proceso de conceptualización del objeto geométrico cuadrado.	Análisis cualitativo de las transcripciones, a la luz de la teoría que enmarca la investigación
2. Uso del concepto en contexto de la demostración	Registros de audio y video de cinco clases de <i>Geometría Plana</i> (segundo semestre) en las cuales los estudiantes abordaron el desarrollo de la situación “El cuadrilátero de Saccheri”	Analizar imágenes conceptuales y definiciones personales de cuadrado. Analizar el concepto usado en el contexto de actividad demostrativa.	
3. Aplicación cuestionario	Cuestionario a estudiantes de <i>Geometría Plana</i> (5 preguntas).	Evaluar retrospectivamente el proceso y determinar si hay influencia del uso de geometría dinámica.	Clasificación de las respuestas a la luz de las categorías establecidas producto del marco teórico. Conteo simple de frecuencia de categorías para un análisis global de los resultados

Fuente: Los autores

Con el fin de no perder continuidad entre los datos y su análisis, los reportes sobre lo hallado en los registros de audio y video de tres actividades del curso de *Elementos de geometría* y la situación del curso de *Geometría Plana*, junto con su objetivo y lo que arrojaron, se plantean en la secciones de resultados y su discusión.

Las preguntas propuestas en el cuestionario y su intencionalidad fueron las siguientes:

Pregunta uno: *Para cada pregunta, determine si la respuesta a la pregunta es Sí, No, o No se sabe:*

a) *ABCD es paralelogramo. ¿Es rectángulo?*

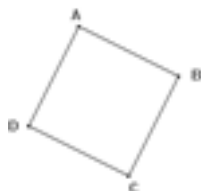
b) *ABCD es un rombo. ¿Es rectángulo?*

Se busca establecer si los estudiantes han construido *definiciones jerárquicas o particionales* de rectángulo respecto a la de paralelogramo y a la de cuadrado, y si estas son *económicas*.

Pregunta dos: *Escriba todas las definiciones que pueda de cuadrado y explique por qué sabe que cada una define cuadrado.*

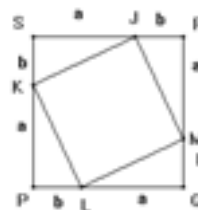
Se busca de una parte establecer si los estudiantes formulan, entre las que proponen, una definición *económica y jerárquica* en la que establezcan las condiciones necesarias y suficientes; de otra parte, se quiere analizar la variedad de definiciones presentadas pues está ligado al *espacio personal de ejemplos*. Solicitar varias definiciones no solo una, abre la posibilidad de que algunas no sean *económicas y jerárquicas*, y que emerjan algunas *definiciones personales del concepto* que evidencien el impacto de las representaciones figurales del mismo. Por último, se quería encontrar evidencias del impacto del uso de la geometría dinámica en la construcción de la definición de cuadrado.

Pregunta tres: En la pantalla de una calculadora se ve la siguiente figura: ¿Qué tipo de cuadrilátero es ABCD y cómo puede asegurarlo?



Esta pregunta se propone en el contexto de la geometría dinámica esperando que los estudiantes mencionen su uso directamente para así obtener evidencia del posible impacto en la formación de la *imagen conceptual*. Se busca determinar si la representación figural sugiere al estudiante una relación específica entre la *definición del concepto*, la *definición personal del concepto* y la *imagen personal del concepto*. Además, se quiere detectar el conocimiento de los estudiantes sobre las condiciones requeridas para establecer si la representación, en un entorno de geometría dinámica, es la de un cuadrado; deben referirse a la definición y mencionar que la perpendicularidad y la congruencia de segmentos deben mantenerse bajo el arrastre.

Pregunta cuatro: Datos: cuadrilátero PQRS es un cuadrado. Los puntos J, K, L, M determinan segmentos en los lados, como en la figura, de longitudes a y b. ¿Cuáles son los pasos claves para demostrar que el cuadrilátero JKLM es un cuadrado?



En particular este problema es una adaptación de uno presentado por Moise & Downs (1986). La intención es analizar las concordancias y discrepancias entre la *imagen conceptual*, la *definición personal del concepto* y el *concepto usado* con la *definición del concepto* cuando los estudiantes lo usan en el proceso de justificación.

Categorías de análisis

A partir de lo propuesto por de Villiers (1986, 1998, 2004) y Govender (2002), se establecieron las categorías de análisis que permitieron la interpretación de las justificaciones y constituir planteamientos acerca de la relación entre *imagen conceptual* y *definición del concepto*. El criterio de *jerarquía* se considera presente si se expresa alguna relación de inclusión correcta de los objetos geométricos rectángulo y cuadrado entre ellos y con respecto a paralelogramo. Para el criterio de *economía*, se considera que está presente si se manifiesta algún tipo de relación entre los invariantes del concepto que haga que las condiciones expresadas en la definición sean mínimas; por ejemplo, cuando se manifiesta como respuesta a la pregunta 4 del cuestionario: “parecería un cuadrado” y argumenta que “Me aseguraría tomando la medida de \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{CD} y del $\angle ABC$ ”, su respuesta está en la misma categoría, en cuanto a jerarquía, pero no de economía, de la expresada por Adriana ante la misma pregunta: “Si determino con la calculadora el paralelismo entre sus lados opuestos, tomo la distancia entre cada uno de los vértices con la opción distancia y longitud para verificar la congruencia entre lados, así mismo constato que el $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ con la opción perpendicularidad, y, si lo es puedo afirmar que determinan un ángulo recto y por ende los demás también lo son. Con un buen uso de este proceso puedo determinar si satisface las condiciones que a simple vista me llevaron a determinar a la figura ya sea como un rectángulo-cuadrado-rombo.”.

Se considerarán definiciones no *económicas* ni *jerárquicas* de cuadrado y rectángulo, respectivamente, “*cuadrilátero con cuatro lados congruentes y cuatro ángulos rectos*” y “*cuadrilátero con cuatro ángulos rectos*”, puesto que en el curso se llegó a definir rectángulo como cuadrilátero con tres ángulos rectos y cuadrado como cuadrilátero con tres ángulos rectos y dos lados adyacentes congruentes. Una definición es *jerárquica* si presenta la inclusión del cuadrado en los rectángulos y *económica* si reduce las condiciones en el número de lados congruentes o de ángulos rectos. Las categorías establecidas son:

Jerárquica, económica y expresando la definición

(JED): En la justificación expresada se encuentran elementos para afirmar que la imagen conceptual de rectángulo o cuadrado está asociada a una definición *jerárquica* y *económica* y se presentan definiciones explícitas de estos cuadriláteros. Un ejemplo es la justificación de Nora al definir la relación entre paralelogramo y rectángulo en la pregunta 1 (b): “*Para que un cuadrilátero sea rectángulo debe ser paralelogramo y que uno de sus ángulos internos sea recto; y en este caso nos dan la primera condición pero no la segunda, así que puede que tenga un ángulo recto o no y así mismo puede o no ser rectángulo*”.

Económica y jerárquica (EJ): La justificación expresada evidencia elementos para afirmar que la imagen conceptual de rectángulo está asociada a una *definición jerárquica* y *económica*, pero en ella no se presenta explícitamente una definición de rectángulo o cuadrado; un ejemplo es la justificación de Lucas a la pregunta 1(b): “*Faltaría un ángulo recto para determinarlo*”.

Jerárquica no económica (JNE): En la justificación se evidencian elementos para afirmar que la imagen conceptual de rectángulo o cuadrado está asociada a una *definición jerárquica*, y presenta información que indica que la *imagen conceptual* de estos conceptos obedece a una *definición no económica*. Un ejemplo es la justificación de Orlando en la pregunta 1(b): “*Porque todo rectángulo es paralelogramo pero no todo paralelogramo es rectángulo. Ya que el paralelogramo tiene dos pares de lados paralelos al igual que el rectángulo, pero el paralelogramo no necesariamente debe tener sus ángulos rectos, en tanto el rectángulo si*”.

Simplemente jerárquica (SJ): Se ofrecen elementos para afirmar que la *imagen conceptual* de rectángulo o cuadrado está asociada a una *definición jerárquica*, pero no provee información que permita afirmar que su *imagen conceptual* está asociada a una *definición económica* o no. La explicación de Francisco en 1(b) es un ejemplo: “*Ya que la definición de paralelogramo es cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos y esto deja cabida a contemplar muchos cuadriláteros con estas propiedades; el rectángulo es tan solo uno de ellos*”.

Simplemente económica (SE): La definición expresada es *económica* si establece las condiciones suficientes y necesarias para definir el objeto pero no permite establecer si es *jerárquica* o no. Dora brinda un ejemplo para cuadrado al expresar: “*Cuadrilátero con todos sus lados congruentes y un ángulo recto*”.

No aporta información (NA): En la justificación expresada no se encuentran elementos para afirmar que su imagen conceptual de rectángulo o cuadrado está asociada a una *definición jerárquica* o *económica*, o no se da justificación alguna. La definición de Johann para rectángulo, al responder 1(b), ilustra lo anterior: “*Solo podríamos decir que son cuatro puntos unidos por rectas. Para ser rectángulo debe tomar los cuatro ángulos interiores rectos*”.

No jerárquica ni económica pero correcta (NJEC):

En la justificación no se encuentran elementos para afirmar que su *imagen conceptual* de rectángulo o cuadrado esten asociadas a una *definición jerárquica* o *económica* con respecto al objeto mencionado en la pregunta, pero cita una *definición correcta*. Como ejemplo, está la expresada por Patricia al definir cuadrado: “*Cuadrilátero con 4 ángulos rectos y todos sus lados congruentes*”.

Resultados

En esta sección se ilustran las interacciones que se producen entre los estudiantes y con la profesora, en cada una de las actividades mencionadas en la sección anterior. Se ilustra una ruta en el desarrollo de la conceptualización que los estudiantes expresan del cuadrado y el rectángulo, destacando lo que hace la profesora para que dicho desarrollo esté apoyado en la geometría dinámica. El proceso, según lo

formulado en nuestra hipótesis, debe conducir a la formulación de definiciones jerárquicas y económicas.

Proceso de introducción de la definición

Como se mencionó en la anterior sección, en este apartado se presentan y analizan los resultados de los registros de audio y video del desarrollo de las tres actividades del curso *Elementos de Geometría*.

Definiendo el rectángulo

Se desarrolló la siguiente tarea diseñada para ser abordada con geometría dinámica:

- i) *Realice una representación gráfica en papel de rectángulo.*
- ii) *Construya la figura en la calculadora¹.*
- iii) *Escriba la definición.*

Se buscaba que el estudiante explicitara su *definición personal del concepto* rectángulo, y la *imagen conceptual* que tiene del mismo, mediante una representación figural del objeto geométrico. Se quería determinar cómo emplea los elementos expresados en su definición para construir un rectángulo con geometría dinámica; es decir, si hace ostensible su definición.

En la tabla 2 se reportan las definiciones de rectángulo dadas por algunos grupos de estudiantes, seleccionadas por la profesora para promover la discusión en clase.

Tabla 2. Definiciones de rectángulo dadas por los grupos de estudiantes

Grupo	Definición
1	Figura plana con dos pares de lados paralelos y dos congruentes no adyacentes.
2	Figura plana, cerrada con cuatro segmentos. Cada par de segmentos opuestos son congruentes. Tiene cuatro ángulos rectos.
3	Cuadrilátero, con dos pares de segmentos congruentes y sus ángulos son rectos.
4	Cuadrilátero con dos pares de lados paralelos y congruentes y sus lados adyacentes perpendiculares.

Fuente: los autores

Todos mencionan la congruencia de los pares de lados opuestos, la presencia de ángulos rectos y la no congruencia de los lados adyacentes, lo que corresponde a la representación prototípica del objeto que excluye al cuadrado como un tipo de rectángulo (Fischbein, 1993; de Villiers, 2004). Los grupos 1 y 2 excluyen la palabra cuadrilátero sin percatarse que su definición puede referirse a figuras con más lados; esto es, establecen condiciones necesarias pero no suficientes lo que puede reflejar incomprensión del papel de las definiciones en matemáticas (Zaskis y Leikin, 2008).

En el desarrollo del curso *Elementos de Geometría* se había usado la geometría dinámica, pero esta es la primera tarea en la que se examina la correspondencia entre la definición escrita y la construcción realizada. En la tabla

¹ La calculadora cuenta con el software Cabri Geometry, pero puede ser realizada en un portátil u otro dispositivo y con otro software de geometría dinámica como, por ejemplo, Geogebra.

3, se muestra cómo la profesora destacó la correspondencia que debe existir, haciendo ostensiva la definición que subyace a la construcción elaborada por uno de los grupos. Así busca apoyar la comprensión de lo que es una definición matemática.

Tabla 3. Acción de correspondencia construcción- definición

Definición	Descripción de la construcción	Interpretación profesora de la relación construcción- definición
Figura plana, cerrada con cuatro segmentos. Cada par de segmentos opuestos son congruentes. Tiene cuatro ángulos rectos.	Mercedes: Hicimos primero la que ellos pusieron como [segmento] BD [refiriéndose a la realizada por otro grupo], hicimos recta perpendicular, y empezamos a poner perpendicular [al segmento] BC , perpendicular [al segmento] CA .	O sea que la definición no concuerda con lo que hicieron. Ustedes no hicieron un par de segmentos opuestos congruentes [señala sobre el texto de la definición]. Ustedes no hicieron cuatro... ah hicieron solamente tres ángulos rectos.

Fuente: los autores

Se abordó el asunto respecto a la inclusión jerárquica del cuadrado como rectángulo cuando un estudiante cuestiona una de las definiciones propuestas. A continuación se presentan apartes de los protocolos de la clase donde se discutió la definición.

Julián: Pero cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y con un par de lados opuestos congruentes; puede referirse a un cuadrado, ¿no? Le faltaría especificar muchas otras cosas para llegar a la definición correcta de rectángulo, porque esa definición en sí, se podría confundir con la de cuadrado.

Profesora: Si yo tengo una figura que cumple esas condiciones, ¿podría ser cuadrado?

Julián: Sí, eso es lo que yo estoy diciendo.

Profesora: ¿Qué se está diciendo de la relación entre cuadrado y rectángulo?

Julián: Que los dos tienen cuatro ángulos rectos. Que un cuadrado es un rectángulo.

Profesora: Depende como defina rectángulo. Si lo defino así parecería, según la imagen que tenemos, que un cuadrado es un rectángulo. Si se quiere que el cuadrado no sea rectángulo, entonces toca cambiar la definición.

Como se evidencia Julián considera claramente que el conjunto de rectángulos y el de cuadrados no son disyuntos, pero es explícita su imagen de una relación particional (de Villiers, 2004) entre estas dos figuras

por lo expresado: “*Le faltaría especificar muchas otras cosas para llegar a la definición correcta de rectángulo*”.

El rectángulo y el cuadrado

Esta tarea también requirió el uso de geometría dinámica: *Para cada numeral, construya un cuadrilátero y con el arrastre obligue a la figura a cumplir la condición exigida. Decida si la figura es un cuadrado.*

1. Cuadrilátero con cuatro segmentos congruentes.
2. Cuadrilátero con cuatro segmentos que determinan cuatro ángulos rectos.
3. Cuadrilátero con cuatro segmentos congruentes que determinan cuatro ángulos rectos.
4. Cuadrilátero con cuatro segmentos congruentes y un ángulo recto.

La actividad buscaba determinar cuáles propiedades son suficientes y cuáles necesarias para definir un cuadrado, discutir la definición particional o jerárquica (de Villiers, 1998) de cuadrado respecto al rectángulo, y dar lugar a la definición económica de cada objeto geométrico.

La actividad anterior aborda la economía en las definiciones. Tras establecer que cuatro lados

congruentes y cuatro ángulos rectos son condiciones que definen un cuadrado, se estudia la situación de cuatro segmentos congruentes que fue aceptada por algunos, producto del arrastre en una construcción blanda (Healy 2000). En el siguiente episodio, la profesora presenta un contraejemplo para descartarla, usando geometría dinámica, y un ejemplo en el que destaca las condiciones necesarias y suficientes para que la figura sea cuadrado.

Profesora: La idea era comenzar con cualquier cuadrilátero, arrastrar hasta que los lados dieran congruentes [proyecta construcción]. Ahí mas o menos son congruentes; a veces las medidas no las da exactas. ¿Cuántos dicen que si es un cuadrado? Muchos dijeron que si, pero ahí tengo un ejemplo de una figura que tiene los cuatro lados congruentes y no es un cuadrado. Entonces, ¿qué sucede? Fíjense que puedo arrastrar de manera que se conviertan, no solamente los lados congruentes, sino que den perpendiculares [arrastra construcción] que fue lo que hicieron; le pusieron dos condiciones, arrastraron obligando a que las cumpliera.

Finalmente, surge la discusión sobre la jerarquía de las definiciones de rectángulo y cuadrado, cuestión que inicialmente no es clara para los estudiantes, como se puede apreciar en el siguiente episodio de la clase. Es importante recordar que los estudiantes no están trabajando aún con un sistema axiomático geométrico y solo tienen un acercamiento informal a conceptos y hechos geométricos.

Dora: Profé, tú estabas diciendo que el cuadrado también era rectángulo.

Profesora: Depende de la definición que se dé. Si defino rectángulo como: cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y cuadrado como cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y cuatro lados congruentes, veríamos que el cuadrado es rectángulo al cual le he puesto otras condiciones. Pero si defino cuadrado como: cuadrilátero con cuatro lados congruentes y un ángulo recto, no puedo decir que el cuadrado es un rectángulo, a pesar de que ya nos convencimos de que estas condiciones obligaban a los cuatro ángulos ser rectos; pero no tengo como demostrarlo.

Jaime: Por decir algo, en el rectángulo escribimos es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y sus lados adyacentes desiguales...

Profesora: Ahí viene la pregunta, si añadido

aquí, lados adyacentes desiguales [escribe en el tablero] entonces el cuadrado no es un rectángulo. Cuando demos la definición, si se quiere que los cuadrados sean subconjunto [de los rectángulos], entonces se quita la condición de lados desiguales.

Este tipo de tarea está sustentada en el apoyo que constituye la geometría dinámica para la aceptación de una clasificación jerárquica para los cuadriláteros (de Villers, 1998).

El rectángulo y el paralelogramo

La tercera tarea fue el análisis de las construcciones propuestas por los estudiantes ante la siguiente situación planteada para el entorno de geometría dinámica: *Construya un cuadrilátero que cumpla las condiciones dadas a continuación. Determine si cada una de ellas puede ser considerada como una definición de rectángulo.*

- paralelogramo con un ángulo recto.*
- cuadrilátero con un par de ángulos consecutivos rectos y un par de lados opuestos congruentes.*

El objetivo era ver cómo el uso de geometría dinámica potencia el proceso de conceptualización y la identificación de propiedades relevantes. Esta actividad se constituye en una de *definición constructiva*, (de Villiers, 2004), ya que aborda la reformulación de la definición de rectángulo como una clase de paralelogramo; es decir, busca establecer una definición jerárquica de rectángulo con respecto al paralelogramo.

Se abordan dos aspectos del trabajo con definiciones en un contexto de uso de geometría dinámica. Primero, la profesora analiza la correspondencia construcción-definición; en segundo lugar, expresa la necesidad de evidencia empírica y la necesidad de una definición de referencia. La profesora, como se evidencia en el siguiente aparte de clase, enfatiza en la necesidad de hacer una construcción robusta (Healy, 2000) que cumpla las condiciones establecidas (se mantengan bajo el arrastre), y no una representación que perceptualmente cumpla las condiciones (construcción blanda) como lo hicieron.

Profesora: Cuando se trabaja con definiciones, así como lo estamos haciendo, realmente no está ligado a nada teórico. La definición puede ser cualquiera que nos dé las condiciones suficientes que reconocemos debe tener una figura para ser un rectángulo. Todos tenemos una idea de lo que es un rectángulo, porque no es la primera vez que nosotros trabajamos con él. La primera decía: paralelogramo con un ángulo recto. Así cuando miro en sus calculadoras para ver qué han hecho ¿qué debo ver?.. Lo que hago en la calculadora es desocultar todo lo que han ocultado y ver cómo fue la construcción. Si dicen paralelogramo, comienzo con un segmento AB y sé que debo construir una paralela a él, pues, por la definición, necesito dos pares de lados opuestos paralelos. Pero sé que necesito un ángulo recto, y como no puedo usar el arrastre, porque ante el arrastre cumple las condiciones momentáneamente, debo hacer una construcción robusta, que mantenga las condiciones que estoy pidiendo. Debo hacer la perpendicular [traza la perpendicular a , por A] y ustedes hacen el segmento que quieren. Pero debe tener dos pares de lados opuestos paralelos. Entonces, ¿Qué sigue?

Posterior a la intervención de la profesora, y una vez lograda la construcción con las condiciones establecidas, indaga a los estudiantes por las condiciones para determinar si el cuadrilátero construido es realmente un rectángulo y muestra cómo determinar si lo reportado como aceptación o no de la definición fue a partir de información obtenida desde la construcción. A continuación se reportan los diálogos con los estudiantes:

Profesora: Tengo: ángulo recto y un par de lados opuestos paralelos. Pero decía paralelogramo, esto exige dos pares de lados opuestos paralelos, o sea que eso me falta, la paralela a por B. Y entonces completo la figura. Pues la única forma que tenemos para ver si es rectángulo es... ¿cómo?

Varios: Midiendo.

Profesora: Midiendo los ángulos, ¿por qué? [Pidiendo la explicación a una estudiante.]

Carla: Porque tenemos una definición; rectángulo: cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.

Profesora: Es lo único que tenemos para usar;

esa definición. Este ya está [señala el vértice A]. ¿Luego que tenían que hacer?.. Medir y medir [escribe 90 en cada vértice] y después usar el arrastre. Pero yo no vi esas medidas...

Julián: Profe, y ¿ahí con el arrastre se mantienen los 90 grados?

Carla menciona la definición establecida para rectángulo; en su *definición personal del concepto* se manifiesta un cambio respecto a las definiciones expresadas por los estudiantes anteriormente; deja de ser descriptiva para centrarse en las condiciones que se deben cumplir. Cuando Julián indaga acerca de si las características se mantienen bajo el arrastre, muestra confianza, de alguna manera, en la evidencia empírica que aportan las herramientas del software. Esta parte de la tarea confirma que el trabajo en geometría dinámica contribuye a la construcción de definiciones jerárquicas en los cuadriláteros (de Villiers, 2004). En este caso se debe a que los estudiantes construyen las condiciones que determinan un paralelogramo y agregan condiciones para obtener un rectángulo.

Uso del concepto en contexto de demostración

Se introdujo una situación problema en el curso *Geometría Plana*, en la cual se describe el *cuadrilátero de Saccheri*, cuando ya se ha abordado lo relativo a congruencia de triángulos y desigualdades en triángulos. El Postulado de las Paralelas no ha sido enunciado aún y los teoremas relacionados con paralelismo no se han demostrado. La intención de esta situación es confrontar al estudiante con la imposibilidad de demostrar que el cuadrilátero es un rectángulo si previamente no se establece dicho postulado. El problema fue:

“Dado el cuadrilátero ABCD, con ángulo C y ángulo D rectos y el segmento AD congruente con el segmento BC. ¿Qué se puede decir sobre los ángulos A y B?”.

Se pide a los estudiantes que construyan, con geometría dinámica, el cuadrilátero descrito. Con esto, la profesora busca suscitar el estudio de cuadriláteros, las definiciones y teoremas relacionados con ellos. Como era previsible, la primera afirmación de los estudiantes, al ver la representación del *cuadrilátero*

de Saccheri, fue decir que es un rectángulo. Pero demostrar que lo es implica usar la definición de este. El objetivo de nuestro análisis era confrontar la *imagen conceptual* del estudiante con la *definición del concepto*. Así la profesora inicia, como se presenta en el siguiente extracto de la clase, discutiendo la definición de rectángulo, para poder avanzar sobre las definiciones jerárquicas y económicas.

Profesora: Estábamos analizando una figura que tenía las siguientes características: era un cuadrilátero, con ángulo *C* y ángulo *D* rectos y segmento *AD* congruente a *BC*. Y a partir de esa figura, llegamos a varias conjeturas. Una era que el ángulo *B* era congruente con el ángulo *A*. ¿Cierto? Entre otras ¿qué tipo de figura resulta?

Varios: Un rectángulo

Profesora: ¿Por qué?

Sandra: Cuadrilátero con cuatro ángulos rectos

Mercedes: Tres, tres

Profesora: Tres, ¿por qué?

Mercedes: Porque si hay tres el otro ya es recto.

Profesora: ¿Y cómo lo sabemos? ...Que yo recuerde habíamos definido cuatro, un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos, ¿Por qué dices que tres, Mercedes?

Mercedes: Creo que la calculadora nos mostró que bastaba con tres ángulos; que no era necesario los cuatro ángulos.

Profesora: Nosotros el semestre pasado [evocando lo abordado en el curso de Elementos de Geometría] habíamos definido rectángulo con cuatro ángulos rectos, pero ... Mercedes tiene razón. Concluimos que cada vez que hacíamos tres de los ángulos rectos nos daba un rectángulo, y decidimos transformar la definición y decir que rectángulo [Escribe en el tablero] es, cuadrilátero con tres ángulos rectos. Pero la figura que yo les di, tiene dos ángulos rectos. Entonces ¿por qué me dicen que es un rectángulo?

Nora: No sabemos que figura es; lo estamos comprobando.

Profesora: O sea, lo que nosotros logramos es mostrar que teníamos ángulo *C* y ángulo *D* rectos, y y congruentes, y ¿tú vas a demostrar que son rectos los otros ángulos?

La anterior intervención constituye una evidencia explícita del resultado del proceso de construcción de la definición con geometría dinámica, pues la estudiante fue enfática al afirmar que tres ángulos rectos bastaban para definir rectángulo, obteniendo una definición más económica. Esto nos permite concluir que el uso de la geometría dinámica en procesos de conceptualización incide en la *definición personal* de los estudiantes. Definir rectángulo de esta manera reduce las condiciones que hay que validar en el curso de la demostración.

El cuestionario

Pregunta 1(a)

De los resultados obtenidos presentados en la tabla 4 no se puede claramente inferir si los estudiantes usan la definición en la justificación pues no se solicitaba, explícitamente, dar una definición. Presentamos en la tabla, como ejemplo, dos de las justificaciones dadas por los estudiantes con su respectiva categorización. En la primera se explicita la *definición personal del concepto* y en la segunda no. Se aprecia que los estudiantes plantean una condición suficiente y necesaria para que un paralelogramo sea un rectángulo y pueden establecer relaciones entre las definiciones de los objetos involucrados distinguiendo condiciones suficientes y necesarias. Esto guarda relación con el *espacio personal de ejemplos*, en la medida que, junto con las representaciones figurales, le permite al estudiante brindar ejemplos y no ejemplos de un objeto geométrico. Se concluye que las actividades desarrolladas en relación con construcción de definiciones, han tenido un impacto positivo en la estructuración de su pensamiento formal, puesto que uno de los aspectos esenciales en la comprensión de la definición de un concepto es la posibilidad de ofrecer ejemplos y no ejemplos del mismo. En la tabla 4 se reportan las definiciones encontradas y su categorización así como algunos ejemplos puntuales de las mismas que permiten ilustrar lo hallado en las respuestas a la pregunta 1(a).

Tabla 4. Categorías de definiciones dadas por los estudiantes y ejemplos de las mismas

Cat.	E	%	Roberto	Un paralelogramo es un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos, pero no necesariamente dos lados adyacentes forman un ángulo recto y un rectángulo es un paralelogramo con al menos un ángulo recto.	JED
JED	5	20			
EJ	11	44			
SJ	5	20	Julián	Porque para ser rectángulo necesitaría un ángulo recto y la definición de paralelogramo solo exige ser cuadrilátero con dos pares de lados no consecutivos paralelos	EJ
JNE	2	8			
NA	2	8			

Fuente: Los autores

Fuente: los autores

Pregunta 1(b)

Para esta pregunta se asumió una hipótesis de interpretación sustentada en de Villiers (2004) relacionada con la aceptación de una clasificación jerárquica cuando se trabaja en un entorno de geometría dinámica: si en la justificación presentada hay argumentos que permitan reconocer elementos de economía o jerarquía (*EJ*, *JED* o *SJ*), entonces existe evidencia indirecta de la contribución de la geometría dinámica en la ampliación del espacio de ejemplos y de la imagen conceptual de rombo. Para la economía, se tiene que si es rombo y tiene un ángulo recto, entonces es cuadrado; si bien esto puede ser verificado deductivamente, haciendo uso de teoremas y postulados de paralelismo, cuadriláteros y congruencia, se considera que, por la forma en que se desarrollaron las actividades, es más probable que la argumentación provenga de la evocación de la actividad con geometría dinámica que del proceso deductivo dentro del sistema axiomático desarrollado. En la tabla 5 se encuentran dos ejemplos ilustrativos de las definiciones dadas por los estudiantes así como una clasificación general de las mismas desde las categorías propuestas.

Tabla 5. Respuestas a la pregunta 1(b) y categorización de las mismas

Est.	Resp.	Justificación
Andrea	No se sabe	Depende del ángulo porque si tiene un ángulo recto entonces sería un cuadrado y el cuadrado es rectángulo.
Lola	No se sabe	Si el rombo tiene al menos un ángulo recto entonces si, porque $ABCD$ sería un cuadrado y todo cuadrado es rectángulo, pero si ningún ángulo es recto entonces no sería un rectángulo. Pero como no nos dice nada de los ángulos y, por la definición de rombo solo podemos deducir que $ABCD$ es un paralelogramo, entonces no se sabe si $ABCD$ es un rectángulo o no.
		Categoría
		JED
		EJ
		SJ
		NJEC
		NA
Est.		1
		5
		8
		5
		6
%		4
		20
		32
		20
		24

Fuente: los autores



El hecho de que solo seis estudiantes dieran en su justificación un argumento que evidencia la presencia de una *definición económica* (sea *jerárquica* o no), parece estar asociado con una dificultad relacionada con la *definición personal* de rombo; si esta no se corresponde con la *definición del concepto*, la posibilidad de establecer una jerarquía entre rombo y cuadrado e, igualmente, determinar las condiciones necesarias y suficientes para que un rombo pueda ser cuadrado, se ve truncada. Esto se ve en algunas de las respuestas y justificaciones dadas, en la tabla como es el caso de la de Roberto:

Est.	Resp.	Justificación
Roberto	No	Un rombo es un paralelogramo con dos pares de lados adyacentes congruentes, y un rectángulo no tiene esas características.

Fuente: los autores

Pregunta 2: Los estudiantes dieron en total 86 definiciones; todos entregaron más de una definición donde al menos una fue correcta. La categorización realizada aparece en la tabla 6.

Tabla 6. Categorización y ejemplos de las definiciones dadas para el objeto cuadrado

Est.	Definiciones	Explicación																					
Amanda	D1: Cuadrilátero con 4 lados congruentes.	E1: Es la primera noción de cuadrado como una figura con todos sus lados congruentes.																					
		E2: Porque al construir una figura poligonal cerrada partiendo de un ángulo																					
	D2: Cuadrilátero con un ángulo rectángulo por lo tanto sus cuatro ángulos son rectos (congruentes)																						
																							
		<table><tr><th>Cat.</th><th>JED</th><th>SE</th><th>NJEC</th><th>NA</th><th>JNE</th><th>Total</th></tr><tr><td>No.</td><td>38</td><td>10</td><td>19</td><td>17</td><td>2</td><td>86</td></tr><tr><td>%</td><td>44</td><td>12</td><td>22</td><td>20</td><td>2</td><td></td></tr></table>	Cat.	JED	SE	NJEC	NA	JNE	Total	No.	38	10	19	17	2	86	%	44	12	22	20	2	
Cat.	JED	SE	NJEC	NA	JNE	Total																	
No.	38	10	19	17	2	86																	
%	44	12	22	20	2																		

Fuente: los autores

50 definiciones tenían características de economía y/o jerarquía, y 19 fueron *definiciones correctas*, aun cuando no reflejaban condiciones ni de economía ni de jerarquía; esto no es significativo ya que el enunciado proponía presentar: “*Todas las definiciones posibles*”. 17 fueron incorrectas, hecho que puede ser explicado con dos razones; la primera es la fuerza de la representación figural de cuadrado que se han formado en los primeros años de escolaridad, como lo expresa Amanda al decir: “*Porque es la primera noción de cuadrado*”.

La segunda es el arraigo de una definición incompleta o incorrecta del objeto geométrico que persiste en las concepciones del estudiante y que es evocada cuando deben suministrar “*las definiciones posibles de...*”. Hallazgo consistente con Zaskis & Leikin (2008).

Algunas de las definiciones, como se reporta en la tabla 7, reflejan la forma particular en que se desarrollaron las actividades de construcción de definiciones en el entorno de geometría dinámica, lo que se ve manifiesto en la explicaciones dadas por algunos de ellos:

Tabla 7. Evidencia de la influencia de la geometría dinámica en la formulación de la definición.

	Definición	üüüüü	Cat.
Andrea	D1: Cuadrilátero con cuatro lados congruentes y un ángulo recto.	E1: Por que comprobamos con la calculadora y el sistema axiomático creado que solo basta tener un ángulo recto para que los otros tres también lo sean.	SE
	D2: Rectángulo con 2 lados consecutivos congruentes.	E2: Al ser rectángulo con la siguiente condición, los otros lados son congruentes.	JED
	D3: Cuadrilátero con 3 lados congruentes y 1 ángulo recto.	E3: [no da explicación]	SE

Fuente: los autores

Pregunta 3

Se evidencia que el objeto evocado está influenciado por la representación figural. Dado que la formación de una *definición personal* del concepto, que sea más próxima y consistente tanto con la *imagen conceptual* como con la *definición del concepto*, es un proceso mediado por el tiempo de experiencia con el objeto, se puede explicar que los estudiantes evoquen no solo un cuadrado o rombo sino también rectángulos, paralelogramos, etc. El concepto más evocado fue cuadrado y se dan argumentos sólidos para justificar que lo es, reflejando la relación entre una representación figural y el *concepto evocado*, que hace que la *imagen conceptual* y la *definición personal* determinen el proceso de argumentación y justificación. La diferencia entre los estudiantes que determinan un posible objeto geométrico y quienes lo determinan con certeza se encuentra en el tipo de definición que dan. Los estudiantes que presentan como objeto posible al cuadrado, mostraron elementos de economía en las definiciones dadas, como se infiere de sus respuestas y justificaciones (caso de Lola). La mayoría de los estudiantes que con certeza dicen que el objeto representado es cuadrado dan definiciones donde no aparece el criterio de economía (caso de Nora). En la tabla 8 se presentan ejemplos de estas definiciones.

Tabla 8. Definiciones del objeto geometrico (apariencia vs certeza)

Est.	Cuadrilátero	Acciones para asegurarlo en Geometría Dinámica	Cat.
Lola	Parece ser un cuadrado	Para comprobar que lo es, (basado en la D2 de la pregunta 2: Paralelogramo con un ángulo recto y dos lados adyacentes congruentes.) iría al menú comprobar propiedad paralelismo y miraría si $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. De ser así, también comprobando propiedad, miraría si $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ en cuyo caso $\angle C$ sería recto y ya sabría que $ABCD$ es un cuadrado. También podría medir los 4 ángulos y mirar si su medida es 90. De ser así luego mediría los cuatro lados del cuadrilátero para saber si son congruentes, pero me demoraría más. O podría medir ángulos y comprobar la propiedad del paralelismo.	JED
Nora	Es un cuadrado	Tomo la medida de los lados para comprobar congruencia, y compruebo que los lados opuestos son paralelos; por último mido los ángulos internos para comprobar que son rectos o compruebo que los lados adyacentes son perpendiculares.	JNE

Fuente: los autores

En esta pregunta la hipótesis de interpretación es que aquellos estudiantes que muestran economía en las acciones a realizar, consideran innecesaria la revisión exhaustiva para el cumplimiento de la definición de cuadrado. Esto puede deberse al trabajo con geometría dinámica y a la manera cómo se desarrolló la actividad de construcción de la definición de cuadrado. En la tabla 9 se muestran los resultados obtenidos en esta pregunta.

Tabla 9. Objetos evocados para la pregunta 3, cantidad y categorización de los mismos

Objeto(s) Evocado(s)	E	%	Cantidad Objetos							
Cuadrado	11	44	Un Objeto (posible)	6	24					
Paralelogramo	1	4	Un Objeto (certeza)	6	24					
Cuadrilátero	2	8	Tres Objetos	5	20					
Rombo	1	4	Cuatro Objetos	5	20					
Rectángulo, cuadrado o rombo	3	12	No responde	3	12					
Paralelogramo, cuadrilátero o trapecio	1	4								
			Cat.	JED	EJ	JNE	SJ	NJEC	NA	SE
Paralelogramo, cuadrado o rombo	1	4	Est	1	9	2	2	4	3	4
Paralelogramo, cuadrado o rectángulo	1	4	%	4	36	8	8	16	12	16
Paralelogramo, rectángulo cuadrado o rombo	3	12								
No responde	1	4								

Fuente: los autores

En la descripción de las acciones a realizar en un entorno de geometría dinámica (GD), resultó clara la diferencia entre quienes consideran el aspecto dinámico del software y los que ven un dibujo estático en la pantalla. La alusión explícita al arrastre evidencia que piensan en ambiente dinámico, en el que las propiedades aparentes de la representación figural pueden ser verificadas y la importancia de aquellas que son invariantes ante el arrastre; esto se evidencia en las respuestas de Diego y Julián que se reportan en la tabla 10, y que desafortunadamente, no permiten inferir sus definiciones de los objetos geométricos.

Tabla 10. Acciones propuestas por los estudiantes en un entorno de GD

Diego	Un paralelogramo (Quizás con ángulos rectos)	La gráfica no asegura nada y es posible que no cumpla ninguna condición al arrastre con la calculadora.
Julián	Un cuadrilátero sin alguna característica especial.	Mediría lados ángulos y, si bajo el arrastre mantienen las condiciones o qué condiciones cumple ahora y ver que tipo de cuadrilátero es de acuerdo a ellas.

Fuente: los autores

Algunos estudiantes hicieron explícita la acción del arrastre como un aspecto esencial para la argumentación, como lo manifiesta Patricia, y que se reporta en la tabla 11 en las acciones a realizar:

Tabla 11. Explicitación de la acción de arrastre para comprobar propiedades

Patricia	No postula el tipo de cuadrilátero, pero en el desarrollo reporta haber evocado al cuadrado.	Comprobaría en la calculadora que AB, BC, CD, DA son iguales y medir $\angle BAD$ ó $\angle ADC$ ó $\angle DCB$ ó $\angle CBA$, diría que es un cuadrado si las medidas de los lados son iguales y si alguno de los ángulos es recto y al mover los puntos no cambian ante el arrastre.
----------	--	--

Fuente: los autores

A pesar de lo anterior, no se puede afirmar de manera concluyente que la presencia de economía o jerarquía en las *definiciones personales del concepto* esté asociada al uso de geometría dinámica ni con el uso del arrastre. Sin embargo, por los resultados obtenidos en el análisis de la pregunta 1(a), se puede inferir que llevar al estudiante a pensar en un entorno donde puede realizar ciertas acciones y verificar propiedades, permite que elaboren definiciones que reflejan aspectos de economía y jerarquía.

Pregunta 4

Como se debían dar los pasos claves para demostrar que se trataba de un cuadrado, se debía evocar la definición en un contexto de uso. Era deseable que esta fuese *económica*, pues permitiría reducir la extensión de la demostración. En cambio una definición jerárquica y económica, que en principio parecería mejor, llevaría a un proceso más dispendioso. Evocar una *definición económica* puede ser resultado del proceso de construcción de la definición con geometría dinámica, por la forma en que se presentó la definición en los cursos, en particular en el de Geometría Plana. Lo anterior se ve al comparar los pasos propuestos por Orlando y Patricia, quienes evocan una *definición económica y jerárquica*

Est.	Síntesis de los pasos claves presentados por los estudiantes	Cat.
Orlando	Usa la definición de cuadrado y concluye que $\overline{KJ} \cong \overline{JM} \cong \overline{ML} \cong \overline{LK}$ son congruentes porque hay triángulos rectángulos lados respectivos congruentes (Aplica criterio <i>LAL</i>). Propone usar la medida de los ángulos para mostrar que algún ángulo del cuadrilátero interior es recto y concluye “por definición de cuadrado tenemos el cuadrado [refeiriendose a <i>JKLM</i> .] (Demuestra cuatro lados congruentes y un ángulo recto).	SE
Patricia	Por definición de cuadrado los cuatro ángulos de <i>PQRS</i> son rectos. Por el teorema de Pitágoras llega a la congruencia de los lados del cuadrilátero <i>JKLM</i> . Por <i>LLL</i> todos los ángulos son congruentes y por la definición de triángulos congruentes y el teorema de la suma de ángulos internos de un triángulo muestra que $\angle KJM$ es recto. Como los cuatro ángulos de <i>JKLM</i> son rectos por teorema <i>Ángulos Internos entre Paralelas</i> y ángulos suplementarios, <i>JKLM</i> es paralelogramo y por ser paralelogramo y tener un ángulo recto y dos lados consecutivos congruentes, <i>JKLM</i> es un cuadrado. <small>Fuente: los autores</small>	JED

En solo 10 respuestas se evidenció una definición *económica* de cuadrado, lo que muestra que la principal dificultad asociada a la definición se da en el uso.

Discusión de los resultados

En relación con los resultados parciales, la mayoría de ellos fueron presentados en el apartado anterior, dada la naturaleza de la investigación realizada y las acciones propias de la metodología propia del curso. De manera global se puede decir que se evidenciaron algunos avances significativos hacia la conceptualización del cuadrado, pero además hacia la formulación de definiciones jerárquicas y económicas. Sin embargo, se debe resaltar que para efectos didácticos no siempre los dos aspectos pueden resultar deseables o pertinentes, sobre todo cuando las definiciones son empleadas en el contexto de la demostración.

Conclusiones

Acerca de la construcción de definiciones

El proceso de conceptualización empleado en los cursos está apoyado en dos referentes relevantes en el campo de investigación en didáctica de la geometría; primero, que la geometría dinámica permite hacer ostensiva la *definición personal del concepto*; segundo, que la actividad de definir puede desarrollarse de manera *constructiva* o *descriptiva*, de Villiers (2004), según intenciones didácticas específicas.

El uso de geometría dinámica contribuye a la elaboración, aceptación y uso de *definiciones de naturaleza jerárquica y económica* para cuadrado y rectángulo. El diseño de las actividades proveyó evidencia empírica acerca de la reducción de condiciones para definir un objeto; se puede evidenciar cómo añadir una propiedad modifica el objeto, mostrando que algunos son subconjuntos de otros (de Villiers 1986, 1998).

El análisis permite ver que la definición jerárquica y económica de cuadrado puede estar influenciada por la imagen conceptual que se tenga de otros objetos geométricos como cuadrilátero, rectángulo

o rombo, los cuales, usualmente, están asociados con representaciones canónicas y prototípicas. La geometría dinámica por sí sola no va a incidir en el proceso de conceptualización de los objetos geométricos. Solo la acción del docente, apoyada en el uso del software, podrá aportar elementos conceptuales que ayuden a que las *definiciones personales del concepto* y las *imágenes conceptuales* del mismo se aproximen a la *definición del concepto*.

Entre las acciones a resaltar y evidenciadas en los registros, están, por una lado, la forma en que se diseñaron las actividades, con una planificación centrada en objetivos claros, planteados desde la concepción de lo que debe ser la formación inicial de profesores en la línea de geometría; de otro lado, está la actitud atenta de la docente a instantes pertinentes de la clase en que promueve la evocación de actividades realizadas en el ambiente de geometría dinámica, no solo para cuestionar las *definiciones personales*, sino para relacionar la *definición del concepto* en los procesos de argumentación con dichas definiciones y con las *imágenes conceptuales*.

Se evidenció la construcción de *definiciones jerárquicas* entre diferentes objetos geométricos, rectángulo con respecto al paralelogramo, rectángulo con cuadrado, paralelogramo con cuadrado y rombo con cuadrado. Esta última jerarquía fue la menos evidenciada, posiblemente por estar asociada a dificultad con la *definición personal* de rombo o a la persistencia de aspectos figurales sobre conceptuales. La diversidad de definiciones para un mismo objeto geométrico, y la aceptación de la equivalencia de estas, por los estudiantes, desde una perspectiva teórica, constituye un resultado importante del proceso de construcción de definiciones, pues es usual aceptar, de manera implícita, la unicidad de las definiciones de objetos matemáticos y no cuestionarse sobre ello.

Sobre la persistencia de los aspectos figurales

El proceso desarrollado con apoyo del software de geometría dinámica, ayuda a que los aspectos figurales y conceptuales se armonicen en un todo coherente, y que lo figural eventualmente quede subordinado a lo conceptual. Para que esto se logre, es importante

que el docente resalte la naturaleza dinámica del software, en particular las acciones de arrastre de los elementos del objeto o de la construcción del mismo; esto porque las propiedades invariantes ante el arrastre conforman las condiciones necesarias y suficientes para la definición del objeto. El dominio de los aspectos figurales es difícil de superar, lo que se evidenció en las representaciones prototípicas empleadas por los estudiantes.

Se evidenció dificultad para modificar *definiciones personales del concepto* e *imágenes conceptuales*; esto se debe probablemente a que experiencias previas de los estudiantes han llevado al arraigo de definiciones erradas o incompletas de objetos geométricos. Esto se puede explicar porque, así como la adquisición de un concepto es un proceso mediado por las experiencias a través del tiempo con el objeto, la modificación o reificación lo es aún más; requieren además de la posibilidad de ampliar y enriquecer el campo de experiencias con el objeto. Una forma de hacerlo es mediante el uso de geometría dinámica.

Sobre el uso de las definiciones en los contextos de la actividad demostrativa

El análisis de la pregunta 4 del cuestionario mostró que la principal dificultad en el proceso de deducción está en el uso de las definiciones. Esto porque el concepto usado puede estar distante de la *definición del concepto* ya sea porque la *definición personal del concepto*, en caso de no coincidir con la *definición del concepto*, termina imponiéndose, o porque predomina lo figural sobre lo conceptual. Los aspectos de economía y jerarquía, si bien son deseables desde lo matemático, pueden no serlo desde lo didáctico, incluso para los procesos de argumentación. Esto emergió en la misma pregunta 4 donde asumir una *definición jerárquica* de cuadrado con respecto a la de paralelogramo hace que la demostración sea más dispendiosa, aún cuando el hacerlo indicaría una mejor comprensión de la naturaleza de los objetos geométricos y de la definición como tal. Lo ideal sería que el estudiante pueda adecuar una definición al contexto.

Referencias bibliográficas

- Calvo, C.** (2001). Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral. (Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales).
- De Villiers, M.** (1986). *The Role of Axiomatisation in Mathematics and Mathematics Teaching. Research Unit for Mathematics Education.* South Africa: University of Stellenbosch.
- De Villiers, M.** (1998). ¿To Teach Definitions In Geometry Or Teach To Define? In: Olivier A & Newstead K. (Eds), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Stellenbosch, University of Stellenbosch*, (2), 248-255.
- De Villiers, M.** (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *Mathematics Education, University of Durban-Westville, South Africa. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 5 (35), 703-724.
- Fischbein, E.** (1993) La teoría de los conceptos figurales. Traducción de Víctor Larios Osorios; tomada de versión original En: *Educational Studies in Mathematics* 24 (2): 139-162.
- Furinghetti, F. & Paola, D.** (2000). Definition As A Teaching Object: A Preliminary Study. Document resumen 296.
- Furinghetti, F. & Paola, D.** (2002). Defining Within A Dynamic Geometry Environment: Notes From The Classroom. In *PME conference* (2) 2-392
- Govender, R.** (2002). Constructive Evaluation Of Definitions In A Sketchpad Context, Paper presented at AMESA 2002, 1-5 July

2002, Univ. Natal, Durban, South Africa
Dept. of Education & Culture, Teaching &
Learning Services - Mathematics Michael
de Villiers Mathematics Education, Univ.
Durban-Westville.

Healy, L. (2000) Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. *Document resume*, 138. .

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational studies in mathematics*. 44, 55-85.

Mariotti, M (1997). Justifying and Proving in Geometry: the mediation of a microworld. Proceedings of the European Conference on Mathematical Education. 21-26.

Mariotti, M, Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics* 34: 219-248.

Perry P., Camargo L., Samper C, Rojas C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, Editorial Nomos S.A.

Tall, D. (2002). *Advanced Mathematical Thinking*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Zazkis, R., Leikin R., (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. Springer Science. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 131.