

# ΣΟΦΙΑ—SOPHIA

DOI: <http://dx.doi.org/10.18634/sophiaj.14v.2i.699>

## Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones\*

Didactic engineering for the learning of the lineal function through the modeling of situations

Engenharia didática para aprender a função linear modelando situações

Milton Cesar Campeón Becerra \*\*

Eliecer Aldana Bermúdez\*\*\*

Jhony Alexander Villa Ochoa \*\*\*\*

\*Investigación realizada para obtener el título de Magister en enseñanza de la matemática "Aprendizaje del concepto de función a partir de la modelación de situaciones en contexto mediante una ingeniería didáctica". Grupo GEMAUQ (Grupo de investigación en educación matemática de la universidad del Quindío). Este proyecto fue financiado con recursos propios de los autores.

\*\* Mg. En enseñanza de la matemática, docente de la Institución Educativa Nuestra Señora de los Dolores (Quinchia Risaralda), Grupo GEMAUQ, 1000toncesar@gmail.com, Carrera 5 # 9 – 55 Riosucio Caldas.

\*\*\*Phd En educación matemática, docente titular Universidad del Quindío, Coordinador Grupo de Investigación Educación Matemática (GEMAUQ), eliecerab@uniquindio.edu.co, Avenida Bolívar, Cra 15 Calle 12 Norte.

\*\*\*\*Doctor en Educación, Magister en Educación: Docencia de Las Matemáticas, Especialización en Educación: Enseñanza de las Matemáticas, Licenciado en Educación: Matemáticas y Física. Profesor investigador Universidad de Antioquia, jhonyvilla@gmail.com. Calle 67 # 53 – 108 Bl 9 of 415.

### Información del artículo

Recibido: Marzo 2 de 2017  
Revisado: Agosto 21 de 2017  
Aceptado: Junio 30 de 2018

### Cómo citar:

Campeón, M.C., Aldana, E., Villa, J.A., (2018) Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. *Sophia*, 14 (2), 115-126.



ISSN (electrónico): 2346-0806 ISSN (impreso): 1794-8932

## Resumen

En el presente artículo se analiza la forma cómo aprenden los estudiantes el concepto de función lineal a partir de una ingeniería didáctica, en la cual desarrollarán tareas de modelación de situaciones en contexto, El propósito principal es potenciar el aprendizaje del concepto de función mediante la modelación de situaciones, lo cual se logra a través de la confrontación entre las concepciones a priori y a posteriori de los estudiantes en la fase 4 de la ingeniería. La metodología empleada, los instrumentos utilizados y los objetivos trazados hacen de esta una investigación cualitativa dado que no se pretende evaluar modelos, ni validar hipótesis o teorías preconcebidas para analizarlas por métodos matemáticos. Entre los resultados obtenidos se encontró que las dificultades relacionadas con el aprendizaje del concepto de función lineal están asociadas con el traslado a través de los diferentes registros semióticos de representación que esta posee, especialmente el traslado a los registros algebraico y gráfico. Se concluyó que efectivamente es posible alcanzar un aprendizaje del concepto de función en el cual los estudiantes desarrollen el pensamiento variacional mediante el reconocimiento, percepción y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, para modelarlo, describirlo y representarlo utilizando diferentes registros semióticos, como lo plantean los lineamientos curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional.

Palabras clave Aprendizaje, Función lineal, Ingeniería didáctica, Modelación, Situación didáctica.

## Abstract

This article analyzes the way students learn the concept of linear function from a didactic engineering, in which they will develop tasks of modeling situations in context. The main purpose is to enhance the learning of the concept of function through modeling Of situations, which is achieved through the confrontation between a priori and a posteriori conceptions of students in phase 4 of engineering. The methodology used, the instruments used and the objectives drawn make this a qualitative research given that it is not intended to evaluate models, nor validate hypotheses or preconceived theories to analyze them by mathematical methods. Among the results obtained, it was found that the difficulties related to the learning of the concept of linear function are associated with the transfer through the different semiotic registers of representation that it possesses, especially the transfer to the algebraic and graphical registers. It was concluded that it is indeed possible to achieve a learning of the concept of function in which students develop variational thinking through the recognition, perception and characterization of variation and change in different contexts, to model it, describe it and represent it using different semiotic registers, As proposed by the curriculum guidelines proposed by the Ministry of National Education.

Keywords: Learning, linear function, didactic engineering, modeling, didactic situation.

## Resumo

Neste artigo, a nossa forma de analisar como os alunos aprendem o conceito de função linear de uma engenharia didática, que irá desenvolver tarefas de situações de modelagem em contexto, o principal objetivo é promover a aprendizagem do conceito de função de modelagem de situações, o que é conseguido através do confronto entre concepções a priori e a posteriori dos alunos na fase 4 da engenharia. A metodologia utilizada, os instrumentos utilizados e os objetivos definidos fazem desta uma pesquisa qualitativa, uma vez que não se pretende avaliar modelos ou validar hipóteses ou teorías preconcebidas para analisá-las por métodos matemáticos. Entre os resultados, descobriu que as dificuldades associadas com o aprendizado do conceito de função linear estão associados com o movimento através dos diferentes registros semióticos de representação que este tem, especialmente a mudança para o algébrica e registros gráficos. Concluiu-se que é realmente possível para alcançar a aprendizagem conceito de função em que os alunos desenvolvem o pensamento variacional através do reconhecimento, a percepção e caracterização de variação e mudança em diferentes contextos, para moldá-la, descrever e representar usando diferentes registros semióticos, como proposto pelas diretrizes curriculares propostas pelo Ministério da Educação Nacional.

Palavras-chave Aprendizagem, função linear, engenharia didática, modelagem, situação didática.

## Introducción

Cuando se le pregunta a una persona sobre lo que considera que es ser competente en matemáticas, muchos lo asocian con la habilidad de estimar cálculos y realizar operaciones con facilidad, lo cual reduce el quehacer matemático a una práctica algorítmica, dejando de lado los conceptos asociados a los objetos matemáticos.

Thompson (1992) citado por Villanova, y otros, (2001) señala que existe una visión de la matemática como una disciplina caracterizada por resultados precisos y procedimientos infalibles cuyos elementos básicos son las operaciones aritméticas, los procedimientos algebraicos, los términos geométricos y los teoremas; por lo tanto saber matemática es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina. La concepción de enseñanza de la matemática que se desprende de esta visión conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido.

Esta visión se ve reflejada en los resultados de pruebas como PISA, de la OCDE y SABER; en las cuales los estudiantes colombianos consistentemente obtienen bajos desempeños, gracias en gran medida a que en la escuela se prioriza la realización mecánica de procedimientos y algoritmos, por encima de la comprensión de los conceptos, es decir los estudiantes saben realizar operaciones, pero no comprenden muy bien cuando usarlas.

Uno de los conceptos matemáticos que más ha sufrido este fenómeno de logaritmación ejercitada por llamarlo de algún modo, ha sido el de función matemática, término que debe ser tema de análisis obligado, ya que la adecuada comprensión de éste es fundamental para el estudio de estructuras matemáticas más complejas.

Frente a esta situación Dorado & Díaz (2014) proponen una reflexión en cuanto a la importancia que reviste el concepto de función en el currículo de matemáticas, debido a que es fundamental para adquirir otros conocimientos, incluso en otras disciplinas. No obstante, según un estudio realizado por Villa, Bustamente, Berrio, & Osorio (2008) se encontró que en algunas instituciones de educación básica y media la enseñanza del concepto de función se limita a una práctica algorítmica, aplicada a un conjunto reducido de situaciones que poco o nada tienen que ver con la realidad

En relación con lo anterior González Martín & Camacho (2005), citado por Peña & Aldana (2013) señalan que *“algunas dificultades asociadas al concepto de función pueden deberse a la gran variedad de representaciones que éste tiene (gráfica, diagrama de flechas, fórmula, tabla, descripción verbal...) y las relaciones entre ellas”* (p.151).

Partiendo de las consideraciones anteriores el objetivo general de este estudio es potenciar el aprendizaje del concepto de función lineal con los estudiantes de grado octavo a través de la modelación de situaciones extraídas del contexto.

En correspondencia con el objetivo general los objetivos específicos están asociados con cada una de las fases de la metodología de la ingeniería didáctica. El primero derivado de la fase 1 “Análisis preliminares” es conocer los aspectos históricos, epistemológicos, cognitivos y didácticos asociados con el concepto de función, el segundo derivado de la fase 2 “Análisis a priori” es identificar las dificultades que presentan los estudiantes, cuando resuelven tareas de modelación de situaciones de problemas de su cotidianidad, asociadas al concepto de función, el tercero derivado de la fase 3 “Experimentación” es analizar la comprensión que alcanzan los estudiantes del concepto de función mediante un proceso de modelación de situaciones en contexto y el último objetivo específico derivado de la fase 4 “Análisis a posteriori” es validar el nivel de aprendizaje alcanzado por los estudiantes del concepto de función, mediante la confrontación del análisis a priori y posteriori.

Las dificultades asociadas a la incorrecta apropiación del concepto de función por parte de los estudiantes, consecuencia en cierta medida por la forma como este es desarrollado en los libros de texto, donde se privilegia el desarrollo de procedimientos algorítmicos y algebraicos, por encima del significado analítico del concepto, junto con los aportes de diversos estudios relacionados han sido el punto de partida para formular el siguiente problema de investigación: ¿Cómo potenciar el aprendizaje del concepto de función lineal en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Nuestra Señora de los Dolores del municipio de Quinchia?

Con el fin de alcanzar el objetivo general y por consiguiente dar respuesta a la pregunta de investigación, el trabajo se desarrolló en diferentes etapas, primero se realizó una revisión bibliográfica con la cual se pudo establecer el estado del arte, luego se desarrollaron

cada una de las fases de la ingeniería didáctica como se describe a continuación:

Fase 1 Análisis preliminares: Se llevó a cabo una búsqueda bibliográfica del concepto de función desde sus inicios hasta la época presente, al tiempo que se realizaba dicha investigación histórica se analizaron las concepciones de un grupo de estudiantes de grado undécimo para el análisis de la dimensión cognitiva, al igual que las concepciones de un grupo de docentes para el análisis de la dimensión didáctica.

Como resultado del análisis preliminar se establecieron las siguientes categorías que serán analizadas a través de las actuaciones de los estudiantes en las fases 2, 3 y 4 de la ingeniería didáctica.

Categoría 1:

Reconocimiento y descripción de la dependencia entre variables.

Categoría 2:

Modelación de expresiones verbales, aritméticas o algebraicas.

Categoría 3:

Conversión de un sistema semiótico de representación en otro.

Categoría 4:

Representación gráfica de una relación de dependencia a través de un producto cartesiano.

Categoría 5:

Dominio y rango de la función.

Fase 2 Análisis a priori: En esta fase se les propuso a los estudiantes una situación a didáctica en la que debían modelar una situación del contexto.

Fase 3 Experimentación: En esta fase se propusieron dos situaciones didácticas a los estudiantes, y luego se les propuso nuevamente la situación a didáctica desarrollada en la fase 2 para realizar la confrontación entre el análisis a priori y posteriori en la fase 4.

Fase 4 Análisis a posteriori y validación: En esta fase de la ingeniería se realizó la confrontación entre el análisis a priori derivado de la fase 2, con el análisis a posteriori asociado con la fase 3.

Finalmente se redactaron las conclusiones y se elaboró el informe de la investigación.

## Perspectiva teórica

### Dificultades asociadas al concepto de función

Según investigaciones realizadas por Azcárate & Piquet (1996) e Higuera (1998) citadas por Castro & Díaz (2014) relacionadas con las dificultades asociadas al aprendizaje del concepto de función son debidas entre otros a los siguientes aspectos:

- *La construcción deficiente que realizan los estudiantes del concepto.*
- *La falta de situaciones significativas durante su aprendizaje, lo cual está directamente relacionado con el modelo pedagógico tradicional utilizado por el profesor.*
- *La clase de actividades desarrolladas con los diferentes registros de representación, que no propician la comprensión de los elementos inmersos en el concepto.*
- *La ejercitación de lo simbólico, lo cual favorece el dominio de procesos algorítmicos en las situaciones problema donde se utiliza el concepto de función, pero al enfrentarse a situaciones contextualizadas los estudiantes se encuentran con dificultades para solucionarlas por la poca comprensión de elementos como la identificación del tipo de función, de las variables y su relación de dependencia. (p. 11 -12)*

### Construcción del concepto de función.

Luego de verificar que los estudiantes manejan los conceptos previos requeridos, se puede iniciar la construcción del concepto de función. Debido a que las funciones son una categoría inclusiva de las relaciones, es necesario introducir el concepto de función partiendo del análisis de situaciones que permitan el estudio y análisis de las relaciones.

Dicho proceso debe permitir establecer diferencias entre las relaciones que no son funciones de las que sí lo son, y a partir de las últimas identificar características y propiedades teniendo en cuenta las diferentes representaciones.

### Definición matemática de función

El concepto de función en matemáticas es muy importante porque permite modelar algunos fenómenos, como los costos, compras, transferencias, cálculos de perímetros, pero sobre todo su aplicación en la vida cotidiana es en el sector empresarial, en el aspecto económico, en

el uso de la oferta y la demanda, los cuales no solo se encuentran en contextos matemáticos sino también en contextos de las ciencias; las funciones que tienen la forma  $f(x) = ax$  y  $f(x) = ax + b$  son los modelos lineales más simples y representan para muchos estudiantes el primer contacto con el concepto de función.

Para efectos de esta investigación se asumirá el siguiente concepto de función propuesto por Dirichlet, (1837) citado por Ugalde, (2013).

*Si una variable “x” está relacionada con otra variable “y” de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a “x”, mediante una regla según la cual queda determinado un único valor de “y”, entonces se dice que “y” es una función de la variable independiente “x”. (pág, 15)*

### Teoría de las situaciones didácticas TSD

La teoría de las situaciones didácticas surge bajo el seno de la escuela francesa de didáctica de la matemática, con Guy Brousseau (2007) a la cabeza, como herramienta para descubrir e interpretar los fenómenos y procesos ligados a la adquisición y a la transmisión del conocimiento matemático.

Según Panizza (2003) las situaciones propuestas deben abarcar distintos tipos de respuestas de parte del estudiante al que se le proponen, las cuales pueden ser de tres clases: “de acción, de formulación o de validación”. (p. 10)

**Situaciones de acción:** funcionan sobre el ambiente y favorecen el nacimiento de teorías (implícitas) que funcionan como modelos cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas. (Panizza, 2003. p. 10)

En otras palabras son aquellas situaciones en las que el estudiante debe realizar una acción sobre un medio, ya sea material, simbólico o artificial, para lo cual requiere de la puesta en escena de conocimientos implícitos.

**Situaciones de formulación:** favorecen la adquisición de modelos y lenguajes explícitos, si tienen dimensión social explícita, se habla de situaciones de comunicación. (Panizza, 2003. p. 11)

Se trata por lo tanto de situaciones en las que el estudiante formula un mensaje a partir de la tarea en cuestión y el receptor de dicho mensaje debe comprenderlo y actuar sobre un medio material, simbólico o artificial con base en el contenido de dicho mensaje.

**Situaciones de validación:** aquellas donde a los estudiantes se les solicitan pruebas y, por lo tanto, explicaciones sobre las teorías utilizadas y también explicitación de los medios que subyacen en los procesos demostrativos. (Panizza, 2003. p. 11)

### Contrato didáctico

El contrato didáctico se constituye entonces en un sistema de normas; algunas de éstas, en su mayoría genéricas, pueden ser perdurables; otras, en su mayoría específicas del conocimiento objeto de estudio, deben ser definidas en función de los progresos del saber.

### Situación didáctica

Dentro de las situaciones que se pueden ofrecer al estudiante, esta teoría plantea las situaciones didácticas, las cuales son construidas intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado, Brousseau (1982) citado por Galvez, G (1994) y retomado por Panizza (2003) las define como:

*Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución. (p.4)*

### Situación a-didáctica

Dentro de esta dinámica se identifica otra dimensión: la *situación a-didáctica*, la cual es entendida como el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeja situaciones de la vida real que podrá abordar por medio de sus conocimientos previos y que le permitirán generar hipótesis y conjeturas que asemejan el trabajo que se realiza en una comunidad científica. En otras palabras, el estudiante se verá en una micro comunidad científica resolviendo situaciones, sin la intervención directa del docente, con el propósito de institucionalizar posteriormente el saber adquirido.

Para Brousseau (1986) citada por Panizza (2003) el término de situación a-didáctica *Designa toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego. (p. 4)*

## La institucionalización

La institucionalización se da cuando en una situación se reconoce el valor de un procedimiento se convierte en medio de referencia, cual si fuera una fórmula, ya que en las situaciones didácticas es necesario identificar cuáles de las propiedades que se encuentran y se deben conservar.

Es importante destacar que la institucionalización busca establecer relaciones entre las producciones de los estudiantes con el saber científico inherente al objeto matemático en cuestión, por lo tanto no debe presentarse el saber científico sin relacionarse con el trabajo desarrollado en la clase.

## Ingeniería didáctica

La noción de ingeniería didáctica se introdujo en la didáctica de la matemática francesa a comienzos de la década de los 80 para describir una manera de abordar el trabajo didáctico comparable al trabajo del ingeniero Artigue (1995). Esta comparación se basa en el supuesto de que para realizar un proyecto el ingeniero se apoya en los conocimientos científicos de su dominio, acepta someterse a un control científico, pero al mismo tiempo, está obligado a trabajar sobre objetos mucho más complejos que los de la ciencia, y por tanto puede abordar problemas que la ciencia no puede tomar a su cargo todavía.

La ingeniería didáctica como metodología de investigación presenta entre sus principales características, que es una investigación basada en intervenciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Otra característica que vale la pena resaltar es que la validación es esencialmente interna, fundada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (y no validación externa, basada en la comparación de rendimientos de grupos experimentales y de control).

Para el desarrollo de este tipo de investigación se deben tener en cuenta las cuatro fases que ésta presenta: a) Análisis preliminares; b) Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas; c) Experimentación; d) Análisis a posteriori y evaluación.

### Análisis preliminares

Según Artigue (1995) el análisis preliminar considera tres dimensiones fundamentales dentro de la ingeniería didáctica.

- *La dimensión epistemológica asociada a las características del saber matemático en juego.*
- *La dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.*
- *La dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. (p. 40)*

## Concepción y análisis a priori

Tradicionalmente, este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva; se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha diseñado y se va a proponer a los alumnos.

Se analiza qué podría aprender en esta situación un estudiante en función de las posibilidades de acción, decisión, control y validación de las que dispone, una vez puesta en práctica, cuando trabaja independientemente del profesor. Además se prevén los comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, que, si se producen los comportamientos esperados, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento pretendido por el aprendizaje.

## Experimentación

Es la fase de la ingeniería didáctica donde el investigador tiene contacto directo con una cierta población de estudiantes objeto de la investigación.

Para el desarrollo de esta fase, el investigador debe explicitar de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación, asimismo establecer un contrato didáctico y finalmente aplicar los instrumentos de investigación diseñados de acuerdo con el problema de investigación.

## Análisis a posteriori y validación

A la fase de experimentación sigue la de análisis a posteriori que se basa en el análisis del conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, que incluyen las observaciones de las secuencias de enseñanza y las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos mediante cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o

durante su transcurso. Y como ya se ha indicado, en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori se fundamenta la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

### Materiales y métodos

Dado que para el estudio que realizo con esta investigación no se pretende evaluar modelos, ni validar hipótesis o teorías preconcebidas para analizarlas por métodos matemáticos, se trata entonces de una investigación de tipo cualitativo, tal como lo plantean Sampieri, Collado, & Lucio (2014) al definir las características de la investigación cualitativa entre las que se menciona que ésta “*se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, principalmente los humanos y sus instituciones*”. (p. 358 – 359)

La población está constituida por 35 estudiantes de grado octavo de la Institución educativa Nuestra Señora de los Dolores del municipio de Quinchía Risaralda. Se seleccionó este grado ya que según los derechos básicos de aprendizaje emanados del MEN en el 2015, en grado octavo se inicia el estudio de la función lineal y cuadrática, orientado hacia su comprensión y aplicación en situaciones de variación.

La investigación realizada fue de carácter descriptivo ya que en ella se describieron las producciones y concepciones de los estudiantes cuando realizan tareas relacionadas con situaciones que pueden ser modeladas mediante una función lineal. Como principal técnica la entrevista basada en tareas propuesta por Davis (1984) citado por Caicedo & Díaz (2014).

Durante el desarrollo de la investigación se realizaron cuatro intervenciones con estudiantes, en la primera se desarrolló la situación a didáctica, en la segunda y tercera se trabajaron dos situaciones didácticas y en la cuarta se aplicó nuevamente la situación a didáctica con el fin de realizar la validación de los aprendizajes alcanzados a través de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Cada sesión tuvo una duración aproximada de 3 horas de trabajo de aula, complementado con entrevistas semiestructuradas a los estudiantes

### Resultados

#### Confrontación categoría 1

Reconocimiento y descripción de la dependencia entre variables

#### Análisis a priori

#### Gráfico 1 Respuesta estudiante A24 situación didáctica de acción

a. ¿Cuál es el plan más favorable si se hablan menos de 120 minutos en el mes?
es el de 60
Porque?
es lo mas favorable por minuto
b. ¿Cuál es el plan más favorable si se hablan más de 200 minutos al mes?
el plan mas favorable es el 75000
Porque?
por que es lo mas favorable por mes

#### Análisis a posteriori

#### Gráfico 2 Respuesta estudiante A24. situación didáctica de acción

a. ¿Cuál es el plan más favorable si se hablan menos de 120 minutos en el mes?
la empresa B
Porque?
porque al multiplicar 150 x 120 nos da 18.000 en cambio la A al multiplicar 120 x 50 nos da 75.000 más de 23.000
b. ¿Cuál es el plan más favorable si se hablan más de 200 minutos al mes?
la empresa A
Porque?
al multiplicar 200 x 50 más 75.000 posda 75.000 mientras que la B al multiplicar 200 por 150 nos da 30.000

Fuente: producción propia

**Confrontación:** En la fase 2 (a priori) se encontró que un número significativo de la población de estudiantes, no tiene interiorizado el concepto de relación de dependencia entre variables, por lo que se les dificulta comprender que cuando en una situación existen dos variables relacionadas entre sí, toda variación que sufre una de las variables llamada independiente, determina la variación sufrida por otra variable llamada dependiente.

Al comparar los resultados obtenidos en la fase 2 (a priori) con los obtenidos finalizada la fase de experimentación en la que se modelaron diferentes situaciones relacionados con el contexto y al analizar el desempeño de los estudiantes al desarrollar una situación didáctica de acción, en la cual era necesario reconocer la relación de dependencia entre las variables número de minutos y costo de la factura, se pudo apreciar que

efectivamente el estudiante reconoció la relación de dependencia e identificó cuál de las empresas resultaba más favorable, y que esta favorabilidad dependía directamente de la cantidad de minutos consumida.

Al igual que el estudiante A<sub>24</sub> el 31,7% de los estudiantes reconocieron la relación de dependencia y resolvieron acertadamente la tarea, lo cual representa un avance del 20% si lo comparamos con el desempeño del mismo grupo en la fase 2.

### Confrontación categoría 2

Modelación de expresiones verbales, aritméticas o algebraicas

Análisis a priori

**Gráfico 3** Respuesta estudiante A<sub>18</sub>. Situación didáctica de formulación

PLAN A.		total	PLAN B.		total
Minutos	100	20.000	Minutos	100	15.000
Costo	$\times 50$	5000	Costo	$\times 150$	
Impuestos		15.000	Impuestos	0	

Análisis a posteriori

**Gráfico 4** Respuesta estudiante A<sub>18</sub>. Situación didáctica de formulación

PLAN A.	PLAN B.
$(x \cdot 50) + 15.000 = y$	$(x \cdot 150) = y$

**Confrontación:** Como se puede apreciar, en el análisis a priori la mayoría de estudiantes al igual que A<sub>18</sub> no pudo plantear un proceso aritmético válido que modele la relación de dependencia entre las variables.

Particularmente el estudiante A<sub>18</sub> que fue uno de los pocos que se atrevió a proponer una expresión aritmética válida para determinar el costo de cada plan para cualquier cantidad de minutos, no logró trascender al registro algebraico y de esta forma generalizar la

relación de dependencia en la situación propuesta.

Al comparar el número de estudiantes que plantearon una expresión algebraica que generaliza el procedimiento y modela la situación se observó un incremento significativo en términos de porcentaje de un 2,8% de estudiantes en la fase 2 (1 de 35) a un 45,7% en la fase 3 (16 de 35).

### Confrontación categoría 3

Conversión de un sistema semiótico de representación en otro.

Análisis a priori

**Gráfico 5.** Respuesta estudiante A18. Traslado del registro verbal al algebraico. Situación didáctica de formulación

Representa la descripción anterior a través de una expresión matemática que permita calcular el costo de la factura para cada uno de los planes a partir de la cantidad de minutos gastados.

PLAN A.	PLAN B.
$\begin{array}{r} 15000 \\ 50 \\ \hline 74950 \end{array}$	$\begin{array}{r} 500 \\ 150 \\ \hline 650 \end{array}$

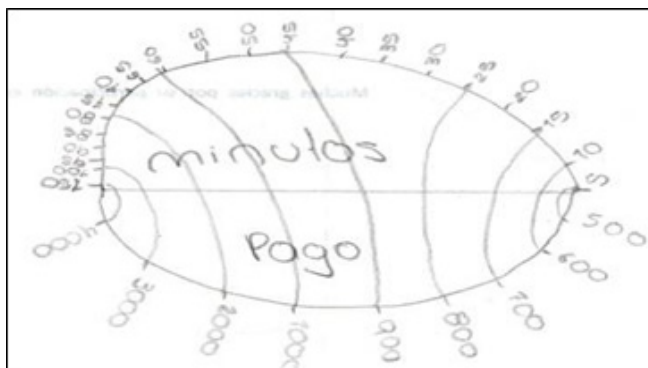
Análisis a posteriori

**Gráfico 6.** Respuesta estudiante A18 Traslado del registro verbal al algebraico

PLAN A.	PLAN B.
$x \cdot 50 = y + 15.000$	$x \cdot 150 = y$

**Gráfico 7.** Respuesta estudiante A18. Forma de representar una función. Situación didáctica de validación





**Gráfico 8.** Respuesta estudiante A18. Forma de representar una función. Situación didáctica de validación



otro predomina la carencia de herramientas verbales y aritméticas para describir el proceso que permite determinar un elemento en el conjunto de llegada a partir de otro elemento en el conjunto de salida.

Un número significativo de estudiantes no fueron capaces de plantear una expresión aritmética aún con errores que se acercara al procedimiento requerido y solo uno de los 35 logró modelar la situación en contexto mediante una expresión algebraica que generaliza un patrón de medida en el proceso para establecer la relación entre la cantidad de minutos y el costo de la factura.

Al confrontar el desempeño de los estudiantes en la fase 2 “Análisis a priori” con el desempeño de los mismos estudiantes en la fase 4 “Análisis a posteriori”, se puede validar que hubo una notable mejoría en los desempeños de una significativa parte del grupo especialmente en lo referido al traslado a través de los diferentes registros semióticos de representación de la función, lo cual se resume básicamente en el refinamiento de las capacidades para plantear expresiones algebraicas que generalizan una relación de dependencia, uso del

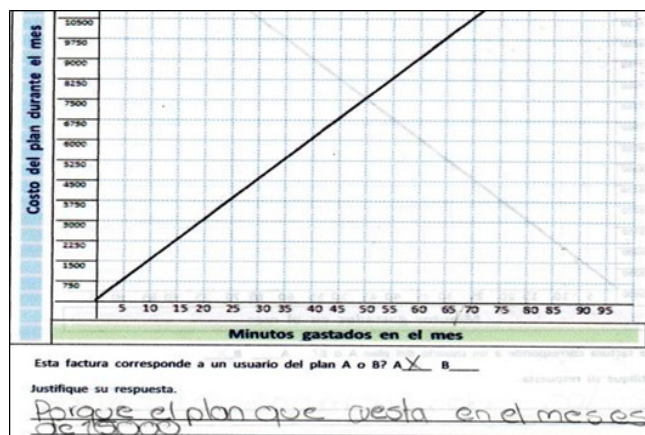
registro tabular como forma válida de representación de una relación de dependencia y una mejor comprensión de la relación entre las variables a través de un producto cartesiano.

**Confrontación categoría 4**

Representación gráfica de una relación de dependencia a través de un producto cartesiano

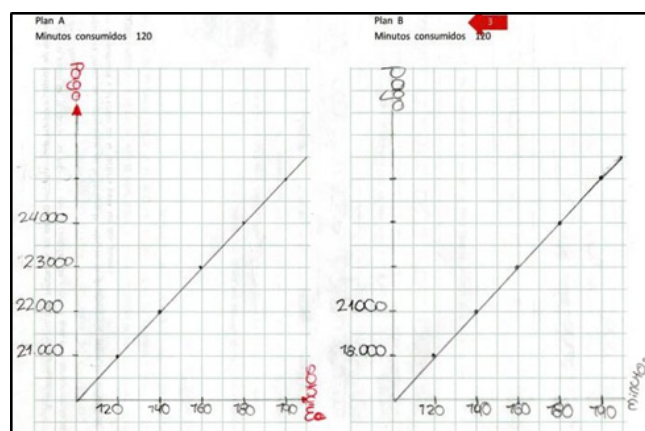
Análisis a priori

**Gráfico 9.** Respuesta estudiante A<sub>28</sub>. Situación didáctica de validación



Análisis a posteriori

**Gráfico 10.** Registro gráfico propuesto por A<sub>28</sub> Situación didáctica de validación



**Confrontación.** El análisis a priori de la categoría 4 arrojó que El 77% de los estudiantes no están familiarizados con el sistema de representación gráfico, razón por la cual se les dificulta reconocer en una gráfica la relación de dependencia entre dos variables.

Este hecho hace que no les sea posible reconocer la gráfica que corresponde a determinada función, ya que enfocan su atención en los valores presentes en los ejes, mas no otorgan mayor importancia al producto cartesiano que representa la relación entre las variables.

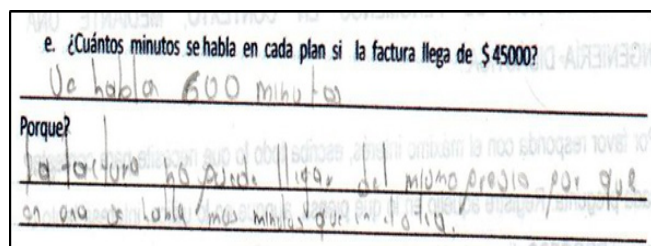
Al igual que el estudiante  $A_{28}$  el grupo en general demostró avances significativos en el manejo del registro semiótico de representación gráfico, lo cual se observa en un incremento del 23% que reconocía una relación de dependencia a través de una gráfica en la fase 2, a un 51% que reconoce y representa dicha relación a través de un producto cartesiano finalizada la fase 3.

### Confrontación categoría 5

Dominio y rango de la función

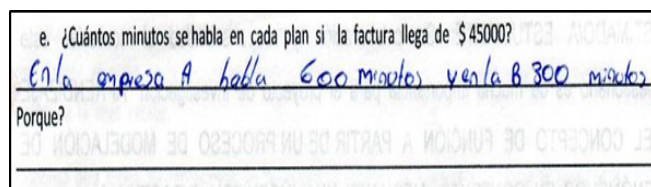
Análisis a priori

**Gráfico 11.** Respuesta estudiante  $A_{16}$  Situación didáctica de validación



Análisis a posteriori

**Gráfico 12.** Respuesta estudiante  $A_{16}$  Situación didáctica de validación



**Confrontación:** El análisis a priori de la categoría 5 arrojo que solo el 14% de los estudiantes comprendieron que dada una relación de dependencia planteada a través de una relación funcional, obtenida a partir de la modelación de una situación relacionada con el contexto, existen algunos valores tanto del dominio como del rango que no tienen sentido.

Un número significativo de estudiantes al igual que  $A_{16}$  ha comprendido correctamente que a pesar de tratarse de dos funciones lineales las que modelan la situación, existe un valor del rango que es común para ambas y que dicho rango está relacionado con dominios diferentes en cada una de las funciones, este hecho da por entendido que el estudiante interiorizó que existen valores los cuales pueden tener o no sentido cuando son extraídos de una situación del contexto modelada a través de una función.

La confrontación del análisis a priori con el posteriori correspondiente a la categoría 5 arrojo un incremento del 14% en la fase 2 a un 57% finalizada la fase 3, lo cual es realmente significativo.

### Discusión de resultados

A partir de la confrontación entre el análisis a priori con el análisis a posteriori queda como reflexión que el aprendizaje de un objeto matemático como en este caso la función, se hace mucho más significativo cuando se planean secuencias didácticas relacionadas con el contexto del estudiante en las cuales pueda emplear su propia experiencia para dar solución a los problemas que dicha situación pueda plantear.

En el mismo sentido la modelación como proceso para la enseñanza de la matemática permite al estudiante trascender las practicas algorítmicas tradicionales asociadas al concepto de función, ya que es el estudiante quien plantea los procedimientos y expresiones algebraicas que le permiten generalizar la situación didáctica, así mismo se le otorga significado al uso de los registros semióticos de representación ya que estos se emplean debido a la necesidad de representar los conjuntos implicados en una relación de dependencia y no solo para satisfacer un requisito impuesto por el docente.

Según lo planteado por el MEN, (1998) la resolución de problemas como estrategia para modelar situaciones que dan sentido y significado a los objetos matemáticos “proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y por ende, sean más significativas para los alumnos” (pág., 52).

### Conclusiones

Luego de la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, se pudo concluir que efectivamente

es posible alcanzar un aprendizaje del concepto de función lineal en el cual los estudiantes desarrollen el pensamiento variacional mediante el reconocimiento, percepción y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, para modelarlo, describirlo y representarlo utilizando diferentes registros semióticos, como lo plantean los lineamientos curriculares propuestos por el MEN. Dicho aprendizaje se pudo evidenciar a través de:

Definición de un concepto de función empleando lenguaje propio, como la relación entre dos conjuntos según la cual, cada elemento  $a$  de un conjunto  $A$  está relacionado con un elemento  $b$  de un conjunto  $B$ , debido a que cada variación o cambio que sufre  $A$  determina una variación o cambio en  $B$ .

Construcción de expresiones algebraicas o aritméticas que modelan una situación y ofrecen una forma de representar una relación de dependencia empleando lenguaje matemático, reconociendo en la generalidad del álgebra una herramienta poderosa para modelar situaciones o fenómenos en los que existe variación.

Uso del registro gráfico para representar la relación de dependencia entre dos variables y analizar la variación que se da en cada elemento del conjunto de llegada a partir de la variación que sufre cada elemento del conjunto de salida, lo cual se traduce en crecimiento, decrecimiento e incremento.

Utilización del criterio de unicidad para diferenciar una función de una relación a partir del análisis del registro tabular y el criterio de la línea vertical para el análisis del registro gráfico.

Comprensión del significado que tiene el dominio y el rango de una función a partir de una situación relacionada con el contexto, es decir comprende y justifica cuando los valores asignados al conjunto de salida tienen o no sentido dada la situación didáctica de aprendizaje, y asimismo analiza la coherencia de los elementos del conjunto de llegada y cuando estos parecen no tener sentido, como en el caso de los valores negativos puede explicar el significado que tienen dichos valores.

Con respecto a la modelación como proceso para el aprendizaje de objetos matemáticos, se concluyó que el utilizar situaciones relacionadas con el contexto permitió que los estudiantes las comprendieran mejor y por lo tanto le dieran sentido, facilitando así el traslado a través de los diferentes registros semióticos de representación, tal como lo mencionan Villa &

Mesa, (2007) cuando sugieren que “*La modelación como estrategia de aprendizaje de las matemáticas proporciona una mejor comprensión de los conceptos matemáticos, al tiempo que permite constituirse en una herramienta motivadora en el aula de clase*” (p.10).

Según Campeón & Aldana (2016) este hecho permite que los estudiantes asuman la variación como algo natural si se relaciona con el contexto, no obstante el uso de situaciones artificiales y un excesivo formalismo, lo convierte en algo totalmente abstracto que la mayoría de estudiantes no alcanzan a comprender.

### Referencias bibliográficas.

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática
- Azcárate Giménez, C., & Deulofeu Piquet, J. (1996). Funciones y gráficas. *De Colecciones Matemática: Cultura y Aprendizaje. Madrid: Síntesis*
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didáctico/Didactic to Algebra Study* (Vol. 7). Libros del Zorzal.
- Caicedo, S. J., & Díaz, L. (2014). PV aplicado en la resolución de problemas de variación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 527-535.
- Campeón, M. C., & Aldana, E. B. (2016). Aprendizaje del concepto de función a partir de la modelación de fenómenos del contexto mediante una ingeniería didáctica. Pereira: Colombia.
- Dorado, I., & Díaz, J. L. (2014). La matemática como herramienta de modelización para dar respuesta a situaciones problema. *Repositorio digital de documentos en educación matemática*. Recuperado el 9 de Noviembre de 2015, de <http://funes.uniandes.edu.co/5810/>
- Higueras, L. R. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Servicio de Publicaciones.
- MEN. (1998). *Estándares básicos de competencia en matemáticas*. Bogotá: Publicaciones MEN.

- Panizza, M. (2003). II Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas *Recuperado de: [http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas\\_teorico.pdf](http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf)*.
- Peña , R. P., & Aldana, E. A. (2013). Análisis del concepto de función en estudiantes sordos de grado décimo. *Educación científica y Tecnología*, 151 - 153.
- Sampieri, R. H., Collado, C. F., & Lucio, P. B. (2006). *Metodología de la investigación* (Sexta ed.). (R. A. Bosque, Ed.) México: McGraw Hill.
- Ugalde, W. J. (2013). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 14(1).
- Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., ... & Álvarez, E. (2001). La educación matemática: el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *OEI. Revista Iberoamericana de Educación*, 1-11.
- Villa, J. A., & Mesa, Y. M. (2007). Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática. Tesis. *Universidad Católica del Norte*
- Villa-Ochoa, J. A., Quintero, C. A. B., Arboleda, M. D. J. B., Castaño, J. A. O., & Bedoya, D. A. O. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática: el caso de Alberto. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*. 2(2), 159-180.