Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas

Jhony Alexander Villa-Ochoa*

Artículo recibido: 01-08-2010 y aprobado: 04-05-2012

Resumen: En este artículo se usa el marco conceptual de Carlson et al. (2003) para discutir los resultados de un estudio de caso, el cual describe la forma como un estudiante razona covariacionalmente al enfrentarse a situaciones de variación asociadas a funciones cuadráticas. El estudio se ideó para desarrollar una línea convergente de indagación (Yin, 2009), la cual se centró en las descripciones que el estudiante realizaba a medida que abordaba las situaciones diseñadas para el estudio; dichas descripciones fueron trianguladas con las producciones escritas y los elementos teóricos. Desde las acciones que el estudiante evidenció, se pudo observar que el proceso de razonamiento covariacional no es un proceso lineal pero sí recursivo. Así mismo, este estudio de caso pone en evidencia el hecho de que existen estudiantes que pueden aproximarse a una interpretación variacional de las concavidades de una gráfica, sin que ello exija un estudio previo del cálculo diferencial. Del estudio se desprenden algunas implicaciones tanto para el marco conceptual abordado en este estudio como para el diseño de situaciones orientadas al aula de clase.

Palabras clave: Función cuadrática, proceso de razonamiento, razonamiento covariacional, razón de cambio.

Covariational reasoning in the quadratic function learning

Abstract: This article discusses the results of a case study that describes a student´s covariatonal reasoning to deal with situations of variation associated with quadratic functions. The study was designed to develop a convergent line of inquiry (Yin, 2009) and was focused on the descriptions and actions performed by the student when facing one of the situations of variation. This experience helped the researchers describe the student´s reasoning and discover some implications for both the conceptual framework addressed in this study and the design of the classroom-oriented situations.

Keywords: Quadratic function, process of reasoning, covariational reasoning, reason for change.

* CIEP-ASDEM Grupo de investigación en Educación. Matemática e Historia-Universidad de Antioquia. javo@une.net.co.

TEA Tecné, Episteme y Didaxis
N.º 31 *Primer semestre de 2012* pp. 9-25

Introducción

En los últimos años, parte de la literatura en educación matemática resalta la importancia que tiene el reconocimiento de aspectos dinámicos de algunos conceptos matemáticos (Tall, 2009) y el estudio de procesos de variación; de manera particular se llama la atención sobre el valor de la percepción, la identificación y la caracterización de la variación en diferentes contextos para el desarrollo del pensamiento matemático (Cantoral y Farfán, 1998; MEN, 2006; Posada y Villa-Ochoa, 2006; Cantoral, 2004; Dolores, 1999, 2007; Camargo y Guzmán, 2005; Zandieh, 2000; Tall, 2009).

El estudio de la variación representa una vía para atender algunas de las dificultades que los estudiantes presentan en el establecimiento de conexiones entre aquellos conceptos de fuertes componentes dinámicos, sus representaciones gráficas y el movimiento real de los objetos en sus contextos. Algunas de estas dificultades parecen estar asociadas al especial énfasis que se presta en las aulas escolares, a los desarrollos procedimentales basados en manipulaciones algebraicas, descuidando en ocasiones sus aspectos conceptuales y las conexiones con otras áreas del conocimiento. En este sentido, Doorman y Gravemeijer (2009) afirman que muchas de las dificultades de los estudiantes, particularmente en los cursos de cálculo, devienen de su poca familiarización con la construcción de modelos, sus propósitos, convenciones, representaciones y sus significados en términos de las situaciones que se representan y el tipo de problemas que pueden resolverse.

Por otro lado, Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003) afirman que los estudiantes ingresan a la universidad con una comprensión deficiente sobre las funciones y que incluso estudiantes académicamente talentosos, tienen dificultad para modelar relaciones funcionales de situaciones que involucran la razón de cambio de una variable cuando varía continuamente en una relación dependiente con otra variable. En su trabajo, Carlson et al. (2003, p. 123) retoman las investigaciones de Kaput (1994), Rasmussen (2000), Zandieh (2000), entre otras, para llamar principalmente la atención sobre la importancia de modelación de relaciones funcionales para la interpretación de modelos de eventos dinámicos y para la comprensión de los conceptos principales del cálculo. Como resultado de su investigación, Carlson y sus colegas proponen un marco conceptual para el estudio del razonamiento covariacional, el cual incorpora cinco acciones mentales y cinco niveles, los cuales se describirán más adelante.

Este artículo retoma el marco conceptual propuesto por Carlson et al. (2003) para indagar, mediante un estudio de caso, por la forma como un estudiante razona cuando aborda situaciones de variación asociadas a funciones cuadráticas. Este estudio de caso hace parte de una investigación más amplia titulada “El concepto de función en las matemáticas escolares”, financiada por el Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas de la Asociación de Profesores del Municipio de Medellín (ASDEM) y desarrollada en cooperación con la Universidad de Antioquia.

Antecedentes del estudio

En Posada y Villa-Ochoa (2006) se reporta una investigación que se fundamentó en la importancia de una aproximación variacional a la función lineal. En su trabajo, estos autores llaman la atención sobre la necesidad de que converjan elementos asociados a los sistemas de representación y la modelación matemática, cuando se piensa en una didáctica del concepto de función lineal a partir del estudio de la variación. Estos autores cuestionan el excesivo énfasis que se hace en la definición algebraica de la función lineal en la introducción de tal concepto, ratificando que esta manera de introducirlo no siempre permite develar ni interpretar factores asociados a la variación. Posada y Villa-Ochoa proponen que el estudio de la función lineal debe comenzar a través del estudio de situaciones que involucren la razón de cambio constante entre dos cantidades de magnitud, de tal manera que la función lineal pueda aparecer como *"la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio es constante"* (Posada y Villa-Ochoa, 2006, p. 96).

El estudio de la variación en las aulas escolares también ha sido propuesto, en algunos de los documentos emanados del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1998, 2006), como una manera de aproximarse al desarrollo del pensamiento variacional. Refiriéndose a este pensamiento, el Ministerio afirma que:

> [El pensamiento variacional] *tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.*
>
> *Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas.* (MEN, 2006, p. 66)

De lo anterior puede interpretarse que uno de los propósitos de la matemática en la Educación Básica no es únicamente el manejo de variados sistemas matemáticos conceptuales y simbólicos, sino también el desarrollo de un *pensamiento variacional*. Este, como su nombre lo indica, pone su acento en el estudio sistemático de la noción de variación en diferentes escenarios de otras ciencias, de la vida cotidiana y de la misma matemática. En particular, la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente.

Con base en los resultados de la investigación de Posada y Villa-Ochoa, y teniendo los elementos declarados por el MEN (2006) sobre la importancia de incorporar el estudio de la variación en las aulas escolares, se propuso la realización de una investigación que diera cuenta de una manera en que se pudiese abordar el concepto de función desde una perspectiva variacional, investigación de la cual este artículo se deriva.

Elementos teóricos

El marco conceptual usado para describir el razonamiento covariacional en este estudio de caso fue el propuesto por Carlson et al. (2003). En dicho marco, los autores interpretan al razonamiento covariacional como "l*as actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra*" (p. 124). Con base en esta descripción, Carlson y sus colaboradores proponen un marco conceptual que involucra un conjunto de cinco acciones mentales y cinco niveles, con los cuales se describe la manera en la cual los estudiantes razonan cuando se enfrentan a eventos dinámicos.

El marco conceptual en mención considera las imágenes de covariación como evolutivas, en los términos de Piaget, y que por tanto son susceptibles de describirse mediante niveles que emergen en sucesión ordenada. Según Carlson et al. (2003), el concepto de imagen que usan en su marco es coherente con la descripción proporcionada por Thompson (1994b) como "*dinámica que se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, y como la fuente y el vehículo de las operaciones mentales*" (p. 124). Así mismo, el marco conceptual acoge las expresiones *procesos de pensamiento pseudoanalíticos y comportamientos pseudoanalíticos* los cuales, según Carlson y sus colaboradores, fueron introducidas por Vinner (1997) y se asocian en su orden con "*procesos de pensamiento y comportamientos que ocurren sin comprensión y los comportamientos pseudoanalíticos son producidos por procesos de pensamiento pseudoanalíticos*" (Carlson et al., 2003, p. 125).

Las acciones mentales que componen el marco conceptual se muestran en la Tabla 1.

Con base en estas acciones mentales, Carlson y sus colegas clasifican a los estudiantes en niveles (ver Tabla 2), de acuerdo con la imagen global que parece sustentar a las varias acciones mentales que esa persona exhibe en el contexto de un problema o tarea.

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamiento
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran los incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función, con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos.

Tabla 1. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación. Tomado de Carlson et al (2003, p. 128)

Niveles	Características
Nivel 1 (N1) Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes N3.
Nivel 4 (N4) Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes N4.
Nivel 5 (N5) Razón de cambio instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente, o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por las imágenes de N5.

Tabla 2. Marco conceptual para los niveles de la covariación. Carlson et al. (2003, p. 129)

TEA Tecné, Episteme y Didaxis
N.º 31 *Primer semestre de 2012* pp. 9-25

El estudio

Como se mencionó anteriormente, el estudio que se reporta en este artículo hace parte de una investigación más amplia, en la cual se abordó el estudio del concepto de función en las matemáticas escolares; particularmente se resaltan aspectos relativos a la importancia de un enfoque variacional del concepto de función cuadrática. El enfoque de la variación para este concepto se ha justificado en la investigación, tanto desde argumentos históricos y epistemológicos como del orden de lo didáctico, tal y como se reporta en Mesa y Villa-Ochoa (2008, 2009) y Villa-Ochoa (2008).

El diseño

Dado que este estudio puso especial atención a las formas como el estudiante razona, reconociendo los elementos asociados a la variación en la solución de un problema, se adoptó como método de investigación el *estudio de caso*, el cual se asume como el "*método empleado para estudiar a un individuo o una institución* [en este caso un fenómeno educativo] *en un entorno o situación única y de una forma lo más intensa o detallada posible*" (Salkind, 1999, p. 211). Por su parte, Yin (2009) establece que un estudio de caso es una indagación empírica que investiga un fenómeno contemporáneo al interior de su contexto real de existencia, cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes. De igual manera, Hernández et al. (2006) se apoyan en los trabajos de Mertens (2005) para afirmar que "[un estudio de caso] *constituye un método para aprender respecto a una instancia compleja, basado en un entendimiento comprehensivo de esta instancia como un "todo" y su contexto, mediante datos e información obtenidos por descripciones y análisis extensivos*" (p. 223).

Para este estudio se diseñó una secuencia de actividades que fue ideada para desarrollar una línea convergente de indagación, lo cual implicó que en cada una de las situaciones abordadas por el estudiante se hicieran preguntas en torno al *qué*, *cómo*, *cuánto* cambian las cantidades y los cambios mismos que intervienen en las situaciones. Dicha indagación convergente se basó en un proceso de continua triangulación de las fuentes de información (Yin, 2009). La información se construyó a partir del diálogo presentado con el estudiante a medida que se involucraba en el desarrollo de las actividades. Dicho diálogo fue registrado en audio para posteriormente ser transcrito y analizado a la luz de los referentes teóricos usados. De igual manera, también se usaron las producciones escritas del estudiante, las cuales se convirtieron en evidencia para interpretar la manera como el estudiante razonaba.

El desarrollo de este artículo se fundamenta en el caso de Santiago, un estudiante de último grado de bachillerato (15-17 años) que había sido reportado por sus profesores de matemáticas como un estudiante inquieto y que mostraba agrado por el área. Santiago fue seleccionado de un grupo de 19 estudiantes que venían cursando una asignatura de precálculo, donde se aborda el concepto de función y se prepara el trabajo para iniciar posteriormente un curso de cálculo diferencial. Aunque Santiago había evidenciado durante las clases pocas habilidades para el tratamiento algorítmico, sí mostraba un buen compromiso en actividades que implicaran determinados razonamientos; adicionalmente, este estudiante había demostrado habilidades comunicativas, lo cual jugó un papel determinante a la hora de identificar sus estilos de razonamiento.

Un instrumento

Una de las situaciones que Santiago abordó en este estudio se diseñó con el software Cabri II; consistía en describir y reconocer la variación del área de un rectángulo inscrito en un cuadrado a medida que se movía el punto A en la Ilustración 1.

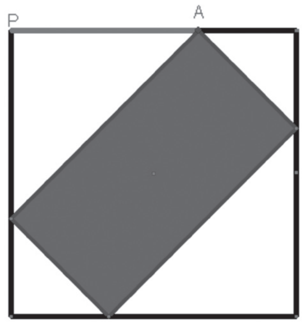
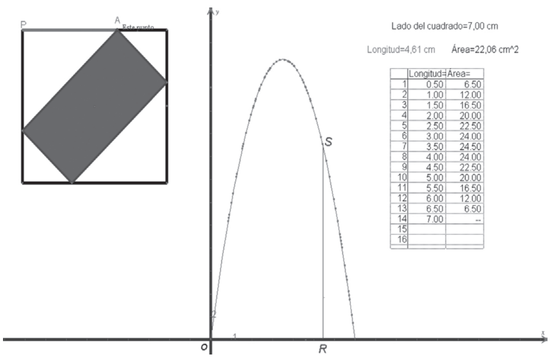


Ilustración 1. Imagen de la situación “rectángulo inscrito”

La situación se diseñó para desarrollarse en tres momentos. El primero de ellos (variación cualitativa) tuvo como propósito el reconocimiento y descripción de la variación mediante un acercamiento de tipo cualitativo al contexto dinámico. Se pretendía que el estudiante abordara la pregunta ¿qué cambia?, de tal manera que reconociera cantidades como: longitud del lado del cuadrado, longitud del segmento PA, perímetro del rectángulo, área del rectángulo, área del cuadrado, área interior al cuadrado y exterior al rectángulo. Este momento fue también diseñado de tal modo que el estudiante pudiera establecer relaciones de dependencia entre las cantidades e hiciera una primera aproximación a la pregunta ¿cómo cambia?

El segundo momento (cuantificación de la variación) se diseñó para que el estudiante abordara con mayor profundidad las preguntas cómo y cuánto cambia. Promoviendo al estudiante hacia el uso de algunas de las herramientas del Cabri (transferencia de medidas, área, tabla, entre otras), se esperaba que el estudiante estableciera los valores que toman el segmento PA y el rectángulo inscrito, y a partir de allí conjeturara sobre algunas relaciones entre ellas.

El tercer momento (construcción de la representación gráfica) se diseñó de tal manera que el estudiante diera cuenta de la construcción de una gráfica del movimiento implicado en la situación. En la construcción, el estudiante podía usar herramientas del software como: rectas, transferencias de medidas, traza, entre otras. En la siguiente ilustración se muestra la construcción de la gráfica en donde el segmento OR es la medida de PA y el segmento RS representa el área. La gráfica se construye con la traza del punto S conforme se mueve el punto A del cuadrado.



	Longitud=	Área=
1	0.50	6.50
2	1.00	12.00
3	1.50	16.50
4	2.00	20.00
5	2.50	22.50
6	3.00	24.00
7	3.50	24.50
8	4.00	24.00
9	4.50	22.50
10	5.00	20.00
11	5.50	16.50
12	6.00	12.00
13	6.50	6.50
14	7.00	--
15		
16		

Ilustración 2. Imagen de la situación completa

TEA Tecné, Episteme y Didaxis
N.º 31 *Primer semestre de 2012* pp. 9-25

Resultados

Los primeros niveles

Conforme al primer momento de la situación, Santiago asoció inicialmente los cambios en el "tamaño" del rectángulo inscrito con los cambios en la posición del punto A. Las verbalizaciones de Santiago dieron cuenta de que su primer acercamiento a la situación se dio de manera cualitativa, mediante el reconocimiento de ciertas características del cambio, por ejemplo, la correlación directa e inversa. En el siguiente diálogo se observa un ejemplo de este reconocimiento:

Investigador :	¿Cómo se mueve ese rectángulo?
Santiago :	¿Cómo se mueve qué?
Inv :	¿Siempre es el mismo rectángulo?
San :	No, no… depende de cómo lo mueva yo. Pues, depende de cómo lo mueva [Manifiesta algo de nerviosismo]
Inv :	¡Estese tranquilo!
San :	Pues, pues si aumenta uno de los lados, pues se va volviendo más, uhhh…, pues, más cuadrado, por así decirlo.
Inv :	¡Más cuadrado! Ok […] ¿a medida que qué? ¿Más cuadrado siempre?
San :	Pues… a medida que se acerca a la mitad del cuadro
Inv :	¿Y después de la mitad qué?
San :	Vuelve a su forma original.
Inv :	¿Y la forma original es?
San :	[no responde]

Se observa en el diálogo cómo Santiago *coordina* los cambios de una variable con los de otra. Según Carlson et al. (2003), este reconocimiento corresponde a la primera acción mental de su marco conceptual. Así mismo, puede identificarse la segunda acción mental cuando el estudiante verbaliza que a medida que el punto A avanza, el rectángulo se acerca a un cuadrado y luego de la mitad vuelve a ser un rectángulo como el inicial. Con estas descripciones Santiago ofrece de manera cualitativa sus primeras explicaciones sobre la pregunta *¿cómo cambia?*

Centrando la atención en el rectángulo inscrito y con la posibilidad de experimentar reiteradamente, Santiago identificó otras características de la situación; por ejemplo, pudo determinar que cuando la longitud del lado PA se anula o iguala al lado del cuadrado, el rectángulo se convierte en un segmento y por tanto su área se anula. Hasta este momento de la situación, el razonamiento de Santiago se basaba solo en las imágenes visuales proporcionadas por el software. De igual manera, en el diálogo presentado entre Santiago y el investigador no había evidencia de características que se pudieran asociar a las acciones mentales 3, 4, o 5 del marco conceptual abordado en este estudio. Estos elementos permiten concluir que Santiago, en este momento de la discusión, puede ubicarse en un nivel Nº2 *(Dirección)* del Marco conceptual de Carlson et al. (2003).

Cuantificación de la covariación

Cuando el investigador solicitó a Santiago una justificación que trascendiera la evidencia visual, para validar su conjetura sobre la forma de cuadrado que el rectángulo adquiere cuando el punto A está en la mitad del lado superior del cuadrado exterior, Santiago evidenció la necesidad de incorporar datos cuantitativos para algunas de las longitudes de los elementos en cuestión, de tal manera que le permitiera realizar cálculos para probar su conjetura.

Con un valor numérico particular del lado PA, Santiago intenta calcular uno de los lados del rectángulo inscrito; sin embargo, al no recordar el procedimiento del teorema de Pitágoras, Santiago preguntó si el software ofrecía el valor del área y posteriormente lo solicitó.

En el siguiente diálogo se pueden inferir algunas de las relaciones de covariación que Santiago comienza a establecer con ayudar de los recursos numéricos del software.

Inv :	¿Cómo cambia esa área?
San :	¿En relación a qué?
Inv :	¿Con respecto a qué cambia?
San :	Mientras el punto A esté más cercano a cualquiera de los extremos, pongámoslo el lado superior, en el caso que se acerque al principio va a disminuir, por ende, si disminuye uno de los lados, el área merma [*disminuye*].

Con las observaciones que Santiago hizo del comportamiento numérico del área, ratificó que se encuentra en el nivel Nº2 del razonamiento.

En el siguiente fragmento de la discusión, Santiago intenta hacer un análisis de la variación mediante la división del lado del cuadrado exterior en cuatro segmentos iguales:

San :	Suponiendo que la mitad es 3.5 [observando la figura en la pantalla del computador], la mitad [de ese valor] es 1.75 [*hay dificultad para poner el punto en el valor exacto*] mmm ¿Cuánto era el área anterior? Mmm 24.5, […] pues, suponiendo que cada cuarto del cuadro [refiriéndose al lado del cuadrado] aumentaría en 18, aproximadamente porque no es exacto 18.8 cms., o sea que cada cuarto sería 0.18 cms. la razón de 18.24 cms. va aumentado.

En este fragmento el estudiante hace una subdivisión del lado del cuadrado en intervalos cuya longitud es de ¼ de dicho lado. Por sugerencia del investigador, Santiago construye una tabla para registrar los valores calculados del movimiento del punto A cada ¼ del valor del lado, describe el valor del cambio en cada uno de los cuatro intervalos. Este tipo de comportamientos está en coherencia con el descriptor asociado a la acción mental 3 y por tanto se puede decir que Santiago evolucionó al nivel Nº3.

Seguidamente, el investigador le sugiere tomar intervalos iguales a la unidad, ante lo cual Santiago construye nuevamente una tabla. En la siguiente trascripción, Santiago evidencia en su razonamiento una aproximación al cuarto nivel de razonamiento (*nivel de razón*), mediante el análisis cuantitativo a través de una tabla.

Inv :	Mira pues cómo se comportó, en uno, dos, tres, cuatro, en cinco y seis, y me cuentas.
San :	Bueno, aumentaba de a…[recordando los valores calculados anteriormente]
Inv :	Vaya mirando la tabla, recuerda, este es el área y este es el lado [señalando las casillas correspondientes en la tabla]
San :	Bueno, el área hasta llegar a los 3.5 cms. aumenta de a,…, disminuye al principio, perdón aumenta de a,…, al principio de un centímetro a otro centímetro aumentó 8 cms., en área pues cm^2. Después aumentó 4 cms.
Inv :	¿En cuánto?
San :	En 3 cms. de longitud, aumentó 4 cms. cuadrados de área
Inv :	Aquí me dijiste que aumentó 8. ¿Ocho qué?
San :	Ocho centímetros cuadrados del área
Inv :	¿En qué momento?

TEA Tecné, Episteme y Didaxis
N.º 31 *Primer semestre de 2012* pp. 9-25

San :	De un centímetro de longitud de… de un extremo A, aumentó 8 cms. con respecto a tres centímetros de longitud del punto A.
Inv :	¿Cambió lo mismo en la otra?
San :	Del punto 3 al punto 4 no cambia [Observa que los valores son equivalentes por el hecho de ser simétricos en la función], sigue siendo el área igual. O sea que al llegar a la mitad aumenta.
Inv :	¿O sea que entre los 3 y los 4 cms. el área permanece igual?
San :	No, no permanece igual. El área cuando llega a 3.5 cms. llega a su mayoría de área.

Se observa en este diálogo cómo Santiago reconoce la razón de cambio promedio como la cantidad que relaciona el cambio en la variable área con los cambios discretos de la variable lado del segmento. Según Carlson et al. (2003) este tipo de elementos evidencia una acción mental 4, y por tanto, se aproxima al cuarto nivel de razonamiento.

La evocación de un nivel previo

En este momento, el investigador le solicita al estudiante una gráfica cartesiana que represente la relación de variación que se observa en la situación. Santiago construye la gráfica que se observa en la Ilustración 3 (a). El investigador solicitó al estudiante una justificación del porqué de la gráfica, para lo cual Santiago adujo *imágenes* propias de la acción mental, es decir, al reconocimiento de relaciones directa e inversa entre las cantidades y a los valores extremos y medio del área: "*Cuando el lado es cero el área es cero, cuando llega a 3.5 llega a su mayor área, cuando este* [señalando el punto A] *llega a siete centímetros el área es cero"."Porque mientras más se acerque el punto A a 3.5 cms., el área llega a su mayoría de área. Entre más se aleje, se acerca a cero".*

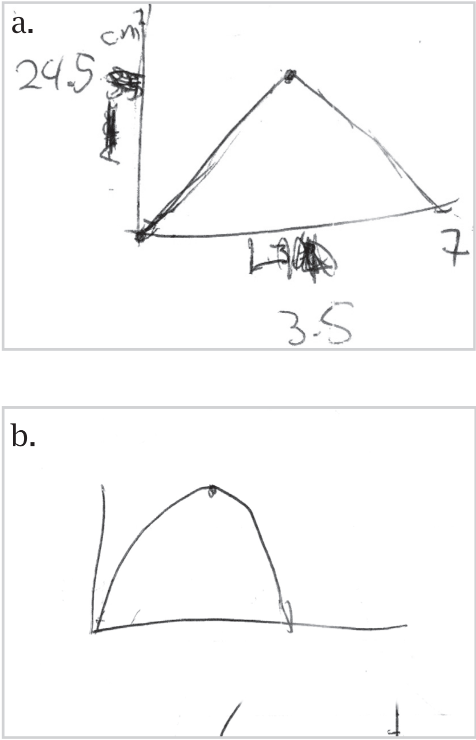


Ilustración 3. Diferentes gráficos construidos por Santiago en el desarrollo de situación

Este comportamiento puede interpretarse como una "demanda" que Santiago hace de su razonamiento en el nivel Nº 2 en el momento de cambiar el contexto de la representación. Para Santiago las rectas parecen ser la forma más precisa de representar la correlación entre las dos cantidades que intervienen en la situación; de este modo, el estudiante parece omitir el razonamiento descrito por la acción mental 3 que había alcanzado por medio del análisis tabular descrito anteriormente.

El investigador cuestiona la construcción de Santiago y le solicita que justifique por qué considera que la gráfica es un par de rectas. En ese momento

Santiago presenta un comportamiento *pseudoanalítico*, superponiendo un tramo de gráfica creciente cóncava hacia arriba a la gráfica de la Ilustración 3(a), sin presentar ningún comentario que diera a entender el tipo de razonamiento que le llevaba a ese resultado. Después de un momento de quedarse en silencio, Santiago presentó la gráfica de la Ilustración 3 (b), presentándose el siguiente diálogo:

San :	Lo más seguro… yo creo que va así.
Inv :	¿Por qué lo más seguro es que sea así?
San :	Porque, mirá, de cero centímetros a un centímetro aumenta doce. De uno a dos aumenta ocho, y de dos a tres aumenta cuatro. Pues, no lo compruebo matemáticamente pero, pues, lo que veo que cada área aumenta.

En este extracto del diálogo parece que Santiago reconociera algunos aspectos de la rapidez con la que cambia la variación y los hubiera asociado con la concavidad de la gráfica. Con el ánimo de profundizar en este hecho, el investigador solicitó a Santiago el uso de la herramienta tabla del *software* Cabri II y construirla con intervalos de 0.5 de longitud. Los resultados de esta fase del trabajo se describen en el siguiente apartado.

Hacia el cambio de la rapidez de la variación

De un modo general, una función representa la variación de dos cantidades de magnitud que intervienen en un fenómeno; así mismo, la derivada de dicha función da cuenta de velocidad o rapidez de la variación. En este mismo sentido, una interpretación variacional de la segunda derivada implica el reconocimiento del cambio de la rapidez de la variación, lo cual se asocia gráficamente con las concavidades de la función. En el razonamiento de Santiago parece haber evidencia de un acercamiento a un entendimiento de las concavidades de la gráfica mediante el estudio de la razón de cambio promedio. Lo cual puede observarse en el siguiente diálogo:

Inv :	Bueno, ahora tenemos la tabla. ¿Qué hay en la tabla o en el comportamiento que hace que la gráfica sea así y no de otra manera? Porque inicialmente me la colocaste como dos líneas. Te pregunté y luego me dijiste que era así como una especie de […]
San :	Montañita [*señala el gráfico de la Ilustración 3 (b)*].
Inv :	¿Por qué crees que es así?
San :	Pues como te dije ahorita, mirándolo, el cambio que hay entre 0.5 y 1 es mucho mayor… bueno, no mucho pero si es mayor, que el cambio que hay entre 1 y 1.5.
Inv :	Ajá. ¿Cómo vemos en la gráfica esos cambios?
San :	¡A ver! Cuando el lado aumenta de 0.5 a 1, o sea de medio centímetro, aquí cambia de [*señalando el área*] 6.5 a 12 o sea que cambió…5.5.
Inv :	¿Cómo vemos ese cambio ahí en la gráfica?
San :	¿Cómo así que cómo se ve? ¿Cómo se graficaría o qué? [*Santiago intenta construir una gráfica que no guarda escala en los ejes*].

Se le solicitó a Santiago una construcción más detallada de la gráfica, es decir, teniendo en cuenta el trazo ortogonal de los ejes, escala en la ubicación de puntos, etc. El proceso de construcción que evidenció el estudiante consistió en la ubicación punto a punto de las coordenadas correspondientes a la primera mitad de la parábola. En algunas de sus verbalizaciones, Santiago hizo alusión

TEA Tecné, Episteme y Didaxis
N.º 31 *Primer semestre de 2012* pp. 9-25

a valores incrementales como forma de cuantificar el cambio, así: *"Los siguientes 0.5 cms. aumentó 5.5 cms.* [cuadrados] *llegó a 12 cms.* [cuadrados]". Después de ubicar los puntos y antes de trazar la curva suave, se confrontó al estudiante entre lo que estaba construyendo y la primera gráfica elaborada (Ilustración 3 (a)). El razonamiento de Santiago se observa en el siguiente diálogo:

San :	Es muy… No es muy parecida a la que yo hice.
Inv :	¿Por qué no crees que te da una línea recta? ¿Cómo tendría que estarse comportando para que la gráfica fuera una recta?
San :	Tendría que estar subiendo constantemente, pues, de cinco en cinco por ejemplo, de diez en diez, tres [*en*] tres.
Inv :	Bien, ¿y aquí no pasa eso? ¿Cómo está aumentado cada vez?
San :	Pues no es constante, pero… de cero a tres punto cinco va aumentando, pero cada vez va aumentando menos […] cuando llega a 3.5 el área llega a 24.5 cms. [cuadrados] que no es mucha la diferencia [*con respecto al valor obtenido en 3*] y así sucesivamente [*sigue construyendo la gráfica punto a punto*]. Bueno, en cierta forma llega a ser cierta montañita, por así decirlo.

Este comentario permite confirmar el acercamiento de Santiago a la relación entre la rapidez del cambio de la función y la concavidad en la representación gráfica.

La otra mitad de la gráfica la construye aludiendo a la relación simétrica que el estudiante reconoció tanto en el movimiento del rectángulo inscrito como en la tabla.

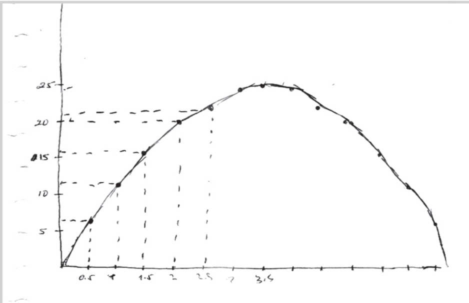


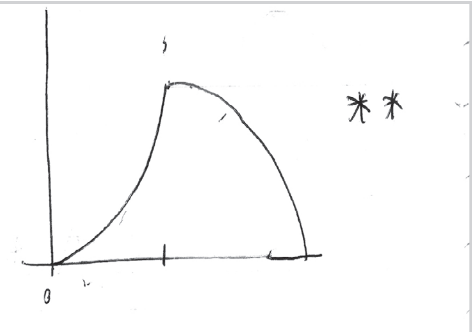
Ilustración 4. Gráfica construida por Santiago

La curva suave que trazó Santiago no implicó comprensión alguna de la razón de cambio instantánea, ni de la continuidad de las variables presentadas en la gráfica. Sin embargo, se observó que el estudiante trazaba las curvas suaves atendiendo a la costumbre de hacerlo ante un conjunto de puntos. Al cuestionarlo al respecto, el estudiante señaló una generalización a muchos más puntos que se pueden trazar en el intermedio. Al respecto Santiago dice: *"Dependiendo de cómo cuadramos la longitud, pues cómo organizáramos la tablita, pues sería lo mismo, daría la misma línea, si lo acomodáramos en esta misma cosa* [gráfica] *siempre daría la misma línea* [curva]*".*

Se observa entonces que existe una interpretación cualitativa de la concavidad de las gráficas asociada al cambio de la razón de cambio promedio. Este tipo de interpretación ofrece un significado a un posterior trabajo en un curso formal de cálculo.

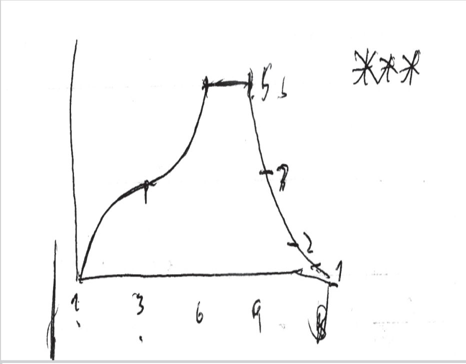
Una interpretación de gráficas cartesianas desde la covariación

El trabajo desarrollado hasta este punto le permitió a Santiago establecer el criterio "*si el cambio crece más rápido se traza así* [cóncava hacia arriba]" y análogamente para el tramo cóncavo hacia abajo, y generalizarlo para explicar el comportamiento de fenómenos a través de sus gráficas. Este tipo de comportamientos puede observarse en las explicaciones que el estudiante ofrece a las gráficas presentadas en las ilustraciones 5 (a) y (b). Las gráficas fueron presentadas al estudiante con el enunciado de la situación que se analiza en este artículo; es decir, el área de un rectángulo inscrito que varía de acuerdo con los cambios en la longitud PA en un lado. El estudiante debía describir el comportamiento de las cantidades de magnitud bajo el supuesto que las gráficas presentadas a continuación representaran la relación entre dichas cantidades.



San: Ehh, cuando el punto A se va alejando del punto cero, o sea la longitud va aumentando, el área va creciendo cada vez más [rápido] hasta llegar a cierto punto [coordenada en las abscisas del máximo], mientras que cuando el punto A se va alejando de dicho punto, va disminuyendo de igual manera en una forma mayor cada vez. O sea que si en un punto disminuyera uno, en otro disminuiría 1.5.

Ilustración 5 (a)



San: *Suponiendo el gráfico así, pues… voy a llenar esto al azar* [Santiago ubica valores particulares al gráfico]. *Cuando el punto va desde el uno hasta el tres el área aumenta cada vez menos, igual que la gráfica de ahorita* [refiriéndose a la gráfica de la situación inicial], *cuando el área sale del punto tres, el área aumenta cada vez más. Cuando llega al punto seis el área empieza a aumentar hasta el punto nueve, pues, se mantiene igual. Desde el punto nueve, hasta el punto, mmm, ¿quién sabe qué?* [cualquiera posterior] *el área disminuye cada vez menos; por ejemplo aquí* [señala los puntos correspondientes a las ordenadas 5, 3, 2 y 1 que él mismo ubicó en la gráfica] *el área sería 5 cm², aquí el área sería 3 y acá en área sería 2. Disminuiría cada vez menos.*

Ilustración 5 (b)

En las verbalizaciones de Santiago se observa cómo logra identificar visualmente las concavidades tanto en tramos crecientes como decrecientes de las gráficas. Adicionalmente asocia el cambio de las concavidades con el cambio creciente a decreciente o recíprocamente de la razón de cambio. Este tipo de comportamientos se vinculan con la acción mental AM5; sin embargo, es claro que Santiago no ha alcanzado una comprensión de la razón de cambio instantánea, y por tanto no puede ubicarse en el nivel 5 (razón instantánea) tal y como lo sugiere el marco conceptual.

TEA Tecné, Episteme y Didaxis
N.º 31 *Primer semestre de 2012* pp. 9-25

En este sentido, los comportamientos de Santiago permiten colegir que un abordaje de la razón de cambio promedio y los cambios de esta, permite la creación de una imagen de las concavidades de la gráfica asociadas al razonamiento covariacional, lo cual se encuentra en las bases para una posterior interpretación de la segunda derivada.

Discusión

Las preguntas por el *qué* y *cómo varían* marcaron el punto de partida de Santiago para una descripción cualitativa de la variación en la situación. Estas dos preguntas fueron trascendentales para la determinación de las AM1 y AM2, con lo que se pudo ubicar a Santiago en el N2 de razonamiento covariacional. En este estudio, no solo se identificaron las acciones mentales presentes en el razonamiento de un estudiante sino que, al investigador cuestionar, confrontar y solicitar justificaciones, actuó como mediador en la evolución de dicho razonamiento. En este sentido, el marco conceptual de Carlson y sus colegas, más allá de concebirse como un instrumento para rotular los niveles de razonamiento del estudiante, se convirtió en una herramienta que permitió describir la evolución de razonamiento covariacional de Santiago.

El razonamiento covariacional entendido como un proceso que evoluciona a través de los diferentes niveles propuestos en el marco conceptual abordado en este estudio, no es un proceso lineal y, contrario a ello, es un fenómeno recursivo. En este estudio, Santiago evidenció comportamientos en los que se remitía a acciones mentales pertenecientes a niveles precedentes. Sin embargo, este hecho, en lugar de interpretarse como un retroceso en el nivel de razonamiento, parece ser una actividad con la cual el estudiante revisa y fortalece su entendimiento de la variación para continuar avanzando en sus niveles de razonamiento covariacional. Este comportamiento de Santiago permite confirmar una vez más que no hay una trasferencia inmediata ni automática de la comprensión obtenida de un sistema de representación a otra; por tanto, es importante promover el uso de diferentes representaciones y formular nuevas investigaciones en este campo de la representación y el razonamiento covariacional.

El caso de Santiago evidencia que la evolución del nivel asociado a la *razón promedio*, al nivel correspondiente a la *razón de cambio instantánea* puede ser compleja, no inmediata y requerir de otros desarrollos conceptuales propios de la matemática continua (por ejemplo límites y derivadas) que permitan al estudiante "*una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio*" (Carlson et al., 2003, p. 129). Otros investigadores han llamado la atención en este hecho: por ejemplo, en el marco conceptual para la comprensión de la derivada propuesto por Zandieh (2000), se usa la concepción proceso-objeto y la notación de Leibniz para expresar que mediante la consolidación de la razón promedio con incrementos cada vez mas pequeños en el denominador, se puede llegar a la razón de cambio instantánea. Sin embargo, este proceso evolutivo requiere de nuevos desarrollos y de investigación más profunda para su caracerización.

Sea cualquiera la naturaleza de la evolución de la razón promedio a la razón instantánea, lo cierto es que, a pesar de que Santiago no alcanzó a desarrollar una noción de la razón de cambio instantánea, sí logró construir curvas suaves basado en procesos de generalización "incompleta" y así evidenciar algunos comportamientos que asocian la concavidad de una gráfica con la forma como cambia la rapidez de la variación, lo cual se convierte en las bases para un entendimiento más significativo de la segunda derivada, cuando posteriormente se desenvuelva en un curso de cálculo. En otras palabras, se observa en Santiago que hizo aproximaciones cualitativas a nociones del cálculo sin que necesariamente haya construido una noción de la razón de cambio instantánea y sin que haya cursado una asignatura formal de cálculo diferencial.

Se presenta también para la discusión que una introducción de la función cuadrática en la cual se promueva el razonamiento covariacional, posibilitaría un entendimiento de dicho concepto como *la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio (promedio o instantánea) varía linealmente*, lo cual viene siendo defendido en Villa-Ochoa (2008). Este tipo de abordaje implicaría un estudio previo de la función lineal en los mismos términos variacionales, tal y como defendieron Posada y Villa-Ochoa (2006). Para el estudio de la razón de cambio y del cambio de esta misma, el uso de *software* puede dinamizar las situaciones recreando patrones de covariación que le posibilitarían al estudiante el reconocimiento descripción y cuantificación de dichos patrones.

Conclusiones

Los niveles de razonamiento covariacional presentados en el marco conceptual de Carlson et al. (2003), parecen describir el razonamiento presentado por Santiago en el estudio de situaciones dinámicas. Al asumir el razonamiento como un proceso que evoluciona a través de los niveles presentados en el marco conceptual, se debe resaltar la importancia que tuvo:

1. La actividad experimental. Al presentar la situación en el *software* dinámico, Santiago pudo manipular repetidamente las cantidades, de tal manera que pudo ir construyendo aserciones que validaba o refutaba con los datos obtenidos experimentalmente.
2. El uso de diferentes contextos o usos de las representaciones. Las representaciones juegan un papel muy importante en el razonamiento y en la comprensión de los conceptos matemáticos. El caso de Santiago, pone en evidencia la existencia de estudiantes en los cuales se hace necesario promover traslaciones entre los contextos de representación, lo cual puede posibilitarles avances en sus niveles de razonamiento covariacional. De este modo se formulan nuevos planteamientos para futuras investigaciones.
3. El diálogo a través de preguntas. La pregunta cumplió un papel trascendental para promover la evolución en el razonamiento, ya que permitió que el estudiante

reflexionara sobre sus propias ideas, se confrontara continuamente con sus respuestas y buscara algunas justificaciones para validar sus consideraciones.

Este estudio solicita una extensión del marco conceptual de Carlson y sus colaboradores, en cuanto a las actividades cognitivas involucradas en la evolución del razonamiento a través de los diferentes niveles, de tal manera que el razonamiento sea un proceso dinámico, que va ganando diferentes niveles de sofisticación en la medida que se experimentan nuevas situaciones y contextos y usos de las representaciones. Así mismo, se hace necesario profundizar en las acciones mentales que le posibilitan al estudiante un razonamiento en términos de la transformación de la razón de cambio, y analizar la no dependencia de este tipo de razonamiento del nivel asociado a la razón de cambio instantánea.

Por otro lado, es necesario indagar por las acciones mentales involucradas en la evolución del nivel de razón promedio al de razón de cambio instantánea y analizar el papel que juegan los conceptos de límite, derivada y continuidad en dicha evolución.

Finalmente, el estudio de este caso deja en evidencia que el estudio de la función cuadrática abordado desde una perspectiva variacional puede ir mucho más allá de la tradicional secuencia:

Definición algebraica →estudio de propiedades →cálculos procedimentales→ aplicaciones.

En dicha secuencia, generalmente el énfasis se pone en los elementos procedimentales que permiten determinar algunas características como crecimientos, decrecimientos, concavidades, puntos máximos o mínimos (vértices), pero en la mayoría de los casos estas características carecen de sentido en el momento de interpretarlas en un contexto de variación. Se espera, entonces, que los resultados obtenidos en este estudio puedan ser útiles a los maestros e investigadores en el diseño de situaciones para la enseñanza de las funciones cuadráticas y así contribuir a un aprendizaje con mayor significado desde la variación de este tipo de concepto.

Referencias

Camargo, L. y Guzmán, A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional. Relaciones entre la pendiente y la razón de cambio.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Una mirada socioepistemológica. En Díaz, L. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 17, pp. 1-9. México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* (42), 353-369.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *EMA*, 8 (2), 121-156.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada.* México D.F: Ediciones Díaz de Santos - Universidad Autónoma de Guerrero.

Doorman, L. M. y Gravemeijer, K. P. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the undertanding of change and velocity. *ZDM Mathematics Education*, 41 (1-2), 199-211.

Hernández R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*, México: Mc Graw Hill.

Mesa, Y. M. y Villa-Ochoa, J. A. (2008). Construcción histórica y epistemológica del concepto de función cuadrática: Algunas reflexiones e implicaciones didácticas. En: Tzanakis, C. (Ed.). *Proceedings of History and Pedagogy of Mathematics. The HPM Satellite Meeting of ICME*. México: CIMATES.

Mesa, Y. M. y Villa-Ochoa, J. A. (2009). El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática. En Leston, P. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 22, pp. 1315-1323. México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-Colegio Mexicano de Matemática Educativa.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares. Área de Matemáticas. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio.

Posada, F. y Villa-Ochoa, J. A. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Tesis de Maestría no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.

Salkind, N. (1999). *Métodos de investigación.* México: Prentice Hall.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM. Mathematics Education*, 41(4), 481-492.

Villa-Ochoa, J. A. (2008). *El concepto de función. Una mirada desde las matemáticas escolares.* En Leston, P. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 21, pp. 245-254. México D.F: Colegio Mexicano de Matemática Educativa- Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Yin, R. K. (2009). *Case study research: design and methods.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. En Dubinsky, E., Schoenfeld, A. J. & Kaput, J. (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education IV CBMS* (Vol. 8, pp. 103-127). Providence, USA: American Mathematical Society.