Tecné, Episteme y Didaxis: TED
N.º 32 *Segundo semestre de 2012* pp. 4-8 ISSN 0121-3814

Editorial

La geometría, su enseñanza y su aprendizaje

La geometría es una rama multifacética de las matemáticas. Su riqueza, producto de la estrecha relación con otros dominios matemáticos, las ciencias naturales y sociales y la vida cotidiana, abarca varias dimensiones. En su dimensión biológica, se relaciona con capacidades humanas como el sentido espacial, la percepción y la visualización. En su dimensión física, indaga por propiedades espaciales de los objetos físicos y de sus representaciones, modelando el espacio circundante. En su dimensión aplicada, se constituye en una herramienta de representación e interpretación de otras ramas del conocimiento. En su dimensión teórica, integra una colección de diversas teorías que han sido ejemplo de rigor y abstracción. La toma de conciencia de esta multidimensionalidad es debida probablemente al cambio en el punto de vista de la matemática en sí misma, que ha comenzado a verse como una actividad humana y no únicamente como una disciplina formal.

En la multidimensionalidad de la geometría coexisten dos polos en permanente tensión: el empírico, donde se ubican la percepción, la intuición, la visualización y el carácter instrumental de la geometría; y el teórico, relacionado con los aspectos abstractos, conceptuales, deductivos, formales y rigurosos de la geometría, como disciplina científica. Los llamamos polos para resaltar su carácter de oposición y de mutua dependencia. Cada uno de ellos atrae la actividad en geometría en una dirección, pero no es posible hacer geometría prescindiendo de uno de ellos.

La mutua dependencia entre el polo empírico y el teórico de la geometría puede evidenciarse a lo largo de su historia, siempre ligada a la dinámica de las actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas. Mediada por diversas herramientas materiales o simbólicas, la geometría se vincula a experiencias individuales y grupales que producen diferentes niveles de sofisticación del conocimiento, útiles para resolver problemas, producir obras de arte, interpretar hechos o dar explicaciones, entre otras cosas.

Un recorrido, a pasos agigantados, por la historia de la geometría nos muestra su vitalidad y la coexistencia de ambos polos. En sus orígenes, que se remontan a las comunidades más primitivas, la geometría se liga al deseo de nuestros antepasados de representar el mundo circundante, decorar sus pertenencias, diseñar motivos ornamentales, construir sus viviendas, etcétera. De actividades como estas, surgen los primeros diseños geométricos, el encanto por la simetría y la regularidad de las formas. Los aspectos visuales de la geometría predominan, pero surgen organizaciones invariantes que no pueden atribuirse únicamente a una representación de la realidad: son los embriones del punto de vista teórico. En una fase posterior, con la expansión de los grupos humanos y el surgimiento de importantes civilizaciones como la china, india, egipcia, griega, maya y azteca, se busca mejorar la organización de la vida social. Durante ese periodo, la geometría contribuye a resolver problemas prácticos como la medición de longitudes, áreas y volúmenes, o el trazo de linderos en la tierra. Además, desempeña un papel instrumental para el desarrollo de la arquitectura, la geografía y la astronomía. Incluso, en esta fase, se identifican intentos iniciales de racionalización del conocimiento geométrico adquirido, al menos localmente. Prueba de ellos son los documentos en donde es posible encontrar fórmulas para el área de figuras planas o volúmenes de sólidos.

Con los griegos, la geometría avanza hacia la constitución de una disciplina científica, por el interés de fundamentar teórica y deductivamente el conocimiento geométrico. La obra cumbre, Elementos, escrita por Euclides hacia el año 300 a.C., recoge una excelente sistematización de estos desarrollos que continúa con los trabajos de Apolonio, Arquímedes y Tolomeo. La geometría comienza a ser vista como un sistema axiomático de carácter deductivo. Debido a la perfección del tratado de Euclides, su libro se convierte en modelo de sistematización racional en muchos campos del conocimiento y, por casi dos mil años, el conocimiento geométrico se subordina al esquema euclidiano. Aunque este tratado fue un esfuerzo importante de racionalización y de imprimirle un carácter abstracto a la geometría, contiene muchos elementos de intuición y percepción. Para señalar solo un ejemplo, el concepto de congruencia de figuras en la geometría euclidiana se basa en la posibilidad de superposición, lo que es un hecho perceptivo.

En el Renacimiento surge la geometría proyectiva, gracias a artistas de la talla de Leonardo da Vinci, interesados en métodos pictóricos de representación en perspectiva. En el siglo XVII, lo que inicialmente era un recurso estético se convierte en la base de una nueva geometría, analítica, que combina métodos algebraicos con descripciones sintéticas de formas y transformaciones. Y en el siglo XVIII, debido al estudio sistemático realizado por Mongue, sobre los métodos de representación de objetos tridimensionales, surge la geometría descriptiva. Estas áreas de la geometría combinan todos los aspectos visuales y conceptuales del conocimiento.

El desarrollo de las geometrías no euclidianas contribuye a estimular, en el siglo XIX, nuevas líneas de investigación como el programa desarrollado por Felix Klein, quien describe la geometría como el estudio de las propiedades geométricas que permanecen invariantes bajo varios grupos de transformaciones; el estudio de Dedekind, Cantor y Weirstrass sobre aspectos algebraicos de la disciplina, en donde se hizo una construcción rigurosa de la teoría de números, y el estudio realizado por Hilbert sobre los fundamentos de la geometría. Estos trabajos mostraron un nuevo punto de vista de la geometría, caracterizado por un alto nivel de abstracción y la pérdida de relaciones de la geometría con la realidad perceptible. Surgen objetos geométricos completamente ajenos a la experiencia sensorial como las estructuras abstractas de dimensiones arbitrariamente grandes y las líneas que cubren el plano, entre otras. Esta tendencia llega a su punto culminante con los trabajos del grupo Bourbaki, cuyos escritos tienen gran influencia entre los matemáticos y conducen al llamado movimiento de reforma de las matemáticas modernas, con su famoso eslogan "abajo Euclides". Sin embargo, aunque en algún momento se creyó posible alcanzar el ideal de liberar las matemáticas de toda huella intuitiva o empírica y darles una fundamentación racional absoluta, los trabajos de Goedel mostraron la imposibilidad del mismo, y la necesidad de aceptar siempre una base intuitiva (no racional) de la actividad matemática. Por otra parte, los avances en psicología y epistemología reforzaron el punto de vista según el cual el origen de los conceptos matemáticos no es la racionalidad pura, sino un proceso que parte de los esquemas de acción innatos, que se van complejizando por la interacción con el mundo hasta desarrollar modelos mentales racionales. Por estas razones, si en algún momento se rechazó la enseñanza de la geometría euclidiana y se la subordinó a un capítulo del álgebra vectorial, hoy en día se reconoce la necesidad de trabajar la geometría desde el polo empírico como base fundamental para la construcción del polo teórico.

En décadas recientes, con los avances de la tecnología que permiten el análisis numérico y el tratamiento visualde gran potencia, se está experimentando un interés renovado en los aspectos visuales de la geometría. Aunque inicialmente estas investigaciones crecen, en su mayoría, en ámbitos externos a las matemáticas, han dado origen a nuevos campos de investigación geométrica. Por ejemplo, el artista holandés Maurits Escher utiliza los teselados de manera extensiva en la producción de sus obras de arte, lo que motiva un renovado interés por el estudio matemático de los teselados y cenefas. En años recientes, Grunbaum y Shepherd realizan una investigación sistemática, en cierto grado equi-

Tecné, Episteme y Didaxis: TED
N.º 32 *Segundo semestre de 2012* pp. 4-8 ISSN 0121-3814

parable a los Elementosde Euclides, uno de cuyos soportes conceptuales más importantes es la idea de simetría. Otro desarrollo actual interesante es la geometría fractal, que estudia objetos geométricos autosemejantes de dimensión fraccionaria. Este campo de trabajo proviene de estudios en ciencias naturales pues muchos objetos de la naturaleza, como las nubes, las líneas costeras o las hojas de helecho tienen propiedades fractales. Adicionalmente, en los últimos años se han desarrollado y ampliado otras teorías geométricas como la teoría de nudos y sus aplicaciones a la biología, o el uso de la geometría proyectiva para el diseño de programas de realidad virtual. Incluso, la geometría de las pompas de jabón está siendo estudiada y se le han dedicado sesiones especiales en diversas revistas de matemáticas. También la geometría euclidiana está experimentando un renacer, en gran parte debido al desarrollo reciente de paquetes computacionales de geometría dinámica. Por ejemplo, Davies investiga nuevas posibilidades de construcción de teorías alrededor de la geometría del triángulo y Adrian Oldknow utiliza el software Sketchpad para encontrar nuevas relaciones entre puntos de concurrencia asociados a líneas notables de los triángulos.

La dinámica evolutiva de la geometría permite concluir que si bien ésta ha adquirido el estatus de disciplina científica, se encuentra íntimamente relacionada con nuestra percepción espacial y en esta halla su fuente de significado, bien sea para afinarla o para superarla. Los avances en geometría no provienen únicamente de las investigaciones en matemáticas, sino que tienen una gran variedad de fuentes: las artes, los oficios, la técnica, las ciencias. Este hecho destaca el carácter vivo de la geometría y su riqueza cultural. El renacer de los aspectos visuales, gracias al potencial de los recursos informáticos, ha puesto en equilibrio los procesos de visualización y los procesos de justificación que permiten trabajar en geometría significativamente. Así es como en la actualidadse reconoce la imposibilidad de independizar los dos polos de la actividad geométrica, y se resalta más bien su mutua dependencia y su complementariedad.

El panorama antes mencionado nos permite afirmar que la geometría es una de las ramas de la matemática que debe ocupar un lugar privilegiado en los currículos escolares, debido a su aporte a la formación del individuo, desde sus diferentes dimensiones. Difícilmente otra rama de las matemáticas abarca un espectro tan amplio de facetas y posibilita a los estudiantes experimentar actividades matemáticas de diferente naturaleza para así adquirir una perspectiva amplia y multifacética de lo que ella significa.

Cuando un estudiante se enfrenta a la geometría, sea cual sea su edad, posee una gran riqueza de conocimientos y experiencias que son de naturaleza matemática, aunque no estén representados en lenguaje matemático. Ello implica que el acercamiento a un nuevo tópico, será inevitablemente confrontado con la intuición geométrica, el conocimiento y la experiencia previa. Esto se constituye en una oportunidad para la enseñanza, pero a su vez implica dos obstáculos, difíciles de encarar. De un lado, al considerar los objetos de la geometría como representaciones de la geometría física, es muy difícil vislumbrar otras organizaciones geométricas en las cuales los objetos sean de diferente clase a los basados en los referentes empíricos y las propiedades de dichos objetos se salgan del sentido común; el obstáculo es mayor cuando nos adentramos en el campo de la geometría absoluta habitada por objetos completamente abstractos y pueden ser llamados mesas, asientos o vasos de cerveza, como decía Hilbert.

De otro lado, existe una contraposición entre los métodos de verificación en el dominio empírico y en el dominio teórico; la verificación en el mundo empírico está basada principalmente en la inspección empírica seguida de la inducción experimental, mientras que en el mundo teórico está basada en alguna forma de razonamiento, en un formato específico que depende de la naturaleza de la teoría geométrica involucrada.

Para superar los obstáculos mencionados conviene pensar en currículos que abarquen las diversas dimensiones y polos de la geometría, en todos los niveles, buscando lograr en los alumnos una amplia experiencia y una perspectiva multifacética de lo que ella significa, elementos claves para ganar en conocimiento geométrico útil. Los diseños didácticos deben incluir actividades enfocadas a: estudiar propiedades espaciales y establecer un juego dialéctico entre los entes construidos al dibujar, plegar, visualizar, cortar y pegar, construir, medir, mover, manipular objetos físicos con las proposiciones del mundo geométrico; conjeturar acerca de propiedades de objetos geométricos formales o abstractos obtenidas por exploración sobre los objetos geométricos existentes en el mundo de sus experiencias o a partir de diversas representaciones bidimensionales, tridimensionales y en perspectiva; explicar y justificar propiedades geométricas a partir de otras propiedades consideradas ciertas y encadenar proposiciones condicionales usando reglas lógicas; usar la geometría como herramienta para comprender reglas y operaciones aritméticas; explorar diversos contextos y universos geométricos, resolver problemas usando figuras geométricas; construir sistemas deductivos locales y globales; usar modelos matemáticos para comprender la actividad humana y social, dadas sus estrechas relaciones con la cultura, la historia, el arte, la filosofía y la ciencia.

Hoy podemos formular dos grandes objetivos de la enseñanza de la geometría. El primero, introducir a nuestros estudiantes en el mundo de la teoría a partir del mundo de la percepción. Debemos procurar que ellos se convenzan de que la teoría permite resolver problemas de manera eficiente. Pero en ese esfuerzo de abrir los ojos de nuestros estudiantes al mundo de la teoría no podemos ignorar ni repudiar los procesos de percepción e intuición presentes en toda actividad geométrica; más bien debemos apoyarnos en dichos procesos. El segundo objetivo es, lograr el equilibrio entre los polos empírico y teórico de la actividad geométrica buscando que no haya predominio de uno de los dos en la actividad geométrica de los estudiantes. Es normal que en un comienzo el polo empírico de la intuición y la percepción sea predominante, pero en la medida en que se cumpla el primer objetivo, esa dominancia debe ser remplazada por un equilibrio. Para lograrlo, los profesores debemos hacer énfasis en los procesos de razonamiento teórico, sin llegar al extremo de subvalorar o dejar de lado los procesos de intuición y percepción.

¿Cómo lograr el equilibrio de los dos polos en la actividad geométrica de nuestros alumnos? Multiplicando las relaciones entre los dos polos. Buscando que nuestros estudiantes, cuando trabajen de manera perceptiva con las figuras, recurran a la teoría para guiar y controlar la percepción, y cuando trabajen de manera deductiva en los enunciados teóricos, recurran a la percepción para representar y comprender la teoría.

Los artículos agrupados en este número de la revista Tecné, Episteme y Didaxis: TED se refieren a las diferentes dimensiones de la geometría. Pretenden hacer reflexiones o aportes sobre la geometría, su enseñanza y su aprendizaje.

El artículo del profesor José Ricardo Arteaga presenta una posible relación entre la geometría y el álgebra, tomando como ejemplo el plano proyectivo. Está enmarcado dentro del dominio teórico de la geometría y aporta elementos para profundizar en la geometría como disciplina formal. Por su parte, el artículo presentado por los profesores Hugh Hilden, José Montecinos, Débora Tejada y Margarita Toro explota la relación entre la geometría y el arte. Los autores discuten las reglas que se usan para producir diseños simétricos planos a partir de teselados, presentan el concepto de deorbifold (orbificie o calidoscopio generalizado) y algunos artefactos usados en diseños simétricos, ilustrándolos con algunas de las obras de Escher.

La profesora Clara Helena Sánchez desarrolla en su artículo una propuesta para mostrar que la historia es un recurso importante para

Tecné, Episteme y Didaxis: TED
N.º 32 *Segundo semestre de 2012* pp. 4-8 ISSN 0121-3814

favorecer el aprendizaje de la geometría. Centra su reflexión en el papel que ha desempeñadola obra de Euclides, Elementos, en el desarrollo de la geometría, el álgebra y la teoría de números y como paradigma de razonamiento matemático.

Los profesores Brigitte Johana Sánchez y Jaime Fonseca describen un estudio investigativo centrado en la importancia que tienen los algoritmos en la resolución de algunos problemas de geometría, específicamente sobre transformaciones en el plano. Discuten algunas formas útiles de usar algoritmos, relacionadas con la obtención de nueva información y sugieren una ampliación de las descripciones usuales sobre su uso. Así, el texto pretende ser un aporte a la investigación sobre la enseñanza de la geometría, en relación con la resolución de problemas.

Tres artículos aluden al uso de tecnología informática en la enseñanza de la geometría. Las profesoras Jenny Acevedo y Leonor Camargo reportan una investigación en la que se usó el videojuego Tetris para estimular un acercamiento intuitivo a las nociones de rotación y traslación de estudiantes de primaria con dificultades de aprendizaje. Sugieren un marco analítico para identificar procesos y habilidades de visualización que se desarrollan al aprovechar el videojuego como mediador visual. Los otros dos artículos se refieren al uso de programas de geometría dinámica como contextos de aprendizaje con nuevas y potentes posibilidades de representación y de establecimiento de relaciones entre los polos empírico y teórico de la geometría. Los profesores Óscar Molina, Leidi Cristina Gil y Martha Helena Orjuela describen algunos métodos de construcción de figuras de ancho constante en el entorno Cabri, como por ejemplo las figuras generadas a partir de la definición de triángulo de Reuleaux y las curvas de Euler y Zindler. Los profesores Carmen Samper, Patricia Perry, Leonor Camargo y Óscar Molina sugieren cómo aprovechar la geometría dinámica para enseñar algunos temas de lógica matemática, en un curso de geometría, que son elementos importantes para aprender a demostrar.

Los profesores Ángel Gutiérrez y Adela Jaime hacen un aporte al conocimiento didáctico en geometría, mediante el planteamiento de algunos modelos didácticos de la enseñanza de la geometría para los diversos niveles educativos. Sintetizan los modelos de Van Hiele y Vinner, y reflexionan sobre la necesidad de que los profesores tengan en cuenta las representaciones físicas y mentales en la enseñanza, por el importante papel que cumple la visualización en el aprendizaje de la geometría.

El profesor Paolo Boero ilustra cómo es posible transitar entre los dominios empíricos y teóricos del panorama geométrico, gracias al diseño de campos de experiencias adecuados en donde la argumentación es fundamental. En particular, ilustra la producción de hipótesis y justificaciones deductivas que hacen estudiantes de grado octavo, relacionadas con situaciones tridimensionales de sombras producidas por el sol.

LEONOR CAMARGO
Docente Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional

MARTÍN ACOSTA
Docente Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander