

# Una relación entre la geometría y el álgebra (programa de Erlangen)

José Ricardo Arteaga B.\*

Artículo recibido: 15-01-2012 y aprobado: 15-11-2012

■ **Resumen:** Los tres documentos fundamentales para el estudio de la geometría son: Elementos, de Euclides; la conferencia de B. Riemann "Sobre las hipótesis que están los fundamentos de la Geometría" (1854) con motivo de su habilitación para ser profesor universitario (Universidad de Göttingen), el "Programa de Erlangen", documento escrito por F. Klein (1872) con motivo de su ingreso como profesor a la Facultad de Filosofía y al Senado de la Universidad de Erlangen. En este último documento, F. Klein introduce el concepto de grupo como una herramienta para estudiar geometría. El concepto de grupo de transformaciones de un espacio ya era conocido en ese entonces. El objetivo de este documento divulgativo es mostrar una relación de la geometría y el álgebra, tomando como ejemplo el plano proyectivo. El programa de Erlangen sigue marcando hasta hoy día una directriz de cómo estudiar y hacer geometría moderna.

■ **Palabras clave:** Geometría euclidiana, programa de Erlangen, plano proyectivo, álgebra.

## Relationship between geometry and algebra (Erlangen program)

■ **Abstract:** The three key documents for study geometry are: 1) "The Elements" of Euclid, 2) the lecture by B. Riemann at Göttingen in 1854 entitled "Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen" (On the hypotheses which underlie geometry) and 3) the "Erlangen Program", a document written by F. Klein (1872) on his income as professor at the Faculty of Philosophy and the Senate of the Erlangen University. The latter document F. Klein introduces the concept of group as a tool to study geometry. The concept of a group of transformations of space was known at the time. The purpose of this informative paper is to show a relationship between geometry and algebra through an example, the projective plane. Erlangen program until today continues being a guideline of how to study geometry.

■ **Keywords:** Euclidean Geometry, Erlangen program, projective plane, algebra.

---

\* Universidad de los Andes: jarteaga@uniandes.edu.co

## Introducción

La historia de los orígenes de la geometría es igual a los de la aritmética. Los conceptos geométricos más antiguos provienen de diversas culturas y son una consecuencia de las actividades prácticas del hombre. En el siglo VII a.C., la Geometría pasó de Egipto a Grecia. La escuela pitagórica, secta religiosa-filosófica idealista, hizo grandes contribuciones a la geometría que se plasmaron luego en un documento del siglo III a.C., conocido como los Elementos de Euclides<sup>1</sup>. En este trabajo, la geometría se presentó como un sistema muy sólido, y sus fundamentos no sufrieron cambios esenciales hasta la llegada de N.I. Lobachevski, quien escribió en 1835 Los Nuevos Elementos de geometría, con el cual se dio inicio a una nueva geometría no euclidiana, conocida como geometría de Lobachevski<sup>2</sup> o geometría hiperbólica.

El 10 de junio de 1854, B. Riemann<sup>3</sup> dio una conferencia en la Universidad de Gotinga para ser profesor universitario. El tema de la conferencia, por sugerencia de Gauss, su protector y antiguo profesor durante la licenciatura y el doctorado, fue sobre geometría, y se tituló “Sobre las hipótesis que están en los fundamentos de la geometría”.

En 1872 F. Klein<sup>4</sup> presentó un programa de investigación con motivo de su

ingreso como profesor a la Facultad de Filosofía y al Senado de la Universidad de Erlangen, Alemania. En este trabajo, Klein propuso una nueva solución al problema de cómo clasificar y caracterizar las geometrías existentes sobre la base de la geometría proyectiva y la teoría de grupos.

## La perspectiva

El problema inicial era ¿cómo dibujar en el papel algo que ven mis ojos? El primer paso en tratar de encontrar leyes que resolvieran este problema lo dieron los pintores. Por ejemplo, el artista Leon Battista Alberti (1404-1472) y el ingeniero y arquitecto Florentino Filippo Brunelleschi (1377-1446) desarrollaron métodos y una teoría matemática de la perspectiva seguida por los pintores de renacimiento<sup>5</sup>.



**Figura 2.** Pintura antes de la perspectiva. Panel inicial del Salmo de la Hagadá de Kaufmann. España finales del siglo XIV. Imagen tomada de la página <http://kaufmann.mtak.hu/en/study10.htm>. Observe que las líneas del balcón parecen no converger

<sup>1</sup> Euclides de Alejandría (325-265 AC, Egipto) escribió los Elementos. La primera versión impresa traducida del árabe al latín apareció en 1482.

<sup>2</sup> Nikolái Ivánovich Lobachevski (1792-1856, Rusia), profesor de la Universidad de Kazán (Rusia), el 23 de febrero de 1826 leyó una memoria sobre la teoría de las paralelas en una sesión de la Facultad de Física y Matemáticas, y en 1829 publicó su contenido en la revista de la Universidad de Kazán (Alexandrov et al., 1981).

<sup>3</sup> Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866, Alemania).

<sup>4</sup> Félix Christian Klein (1849-1925, Alemania).

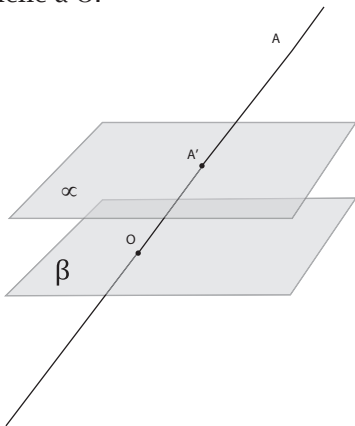
<sup>5</sup> En la enciclopedia británica ubicada en la página <http://www.britannica.com/>, se encuentra información detallada de la obra de los autores mencionados.



**Figura 3.** Pintura después de la perspectiva. Imagen tomada de la página <http://marklovt.blogspot.com/2007/02/la-escuela-de-atenas.html>. Observe que las líneas superiores de los muros verticales parecen converger a un punto

Para comprender mejor un dibujo en perspectiva, primero veamos la proyección de un objeto sobre un plano.

En el espacio tridimensional  $R^3$  consideremos un punto fijo  $O$  (sobre un plano  $\beta$ ) que llamaremos centro de la proyección y un plano fijo  $\alpha$ , paralelo a  $\beta$ , llamado plano de proyección, que no contiene a  $O$ .



**Figura 4.** Proyección de  $A$  en  $A' \in \alpha$  con centro de la proyección en  $O \in \beta$ . Dibujo hecho con GEOGEBRA <http://www.geogebra.org/cms/>

La proyección sobre  $\alpha$  de un punto  $A$  en el espacio  $R^3$ , respecto a  $O$ , es el punto  $A'$  tal que  $A, O$  y  $A'$  son colineales.

Observación 1. Debe ser claro que,

- $A'$  es la imagen (proyección) en  $\alpha$  no de un único punto, sino de todos los puntos sobre la recta  $OA$ . Es decir, dos puntos  $A_1, A_2$  diferentes a  $O$  en  $R^3$  tienen la misma imagen (proyección) en  $\alpha$  si y solamente si  $A_1, A_2$  y  $O$  son colineales.
- Existen puntos en  $R^3$  que no tienen imagen en  $\alpha$ . Todos aquellos puntos que pertenecen al plano  $\beta$  paralelo a  $\alpha$  y que contiene a  $O$ .
- Si tomamos en el sistema coordenado cartesiano  $(x,y,z)$  en  $R^3$  el plano  $\alpha$  como el plano  $z = 1$ , el centro de la proyección  $O$  como el origen del sistema, entonces las coordenadas de un punto  $A'$  son  $(x', y', 1)$ . En este caso, si  $A(x, y, z)$  no pertenece al plano  $\beta$  ( $z = 0$ ), se proyecta en  $A'(x', y', 1)$ , donde  $x' = x/z, y' = y/z$

### ¿Qué es geometría?

Podríamos decir que geometría es el estudio de objetos que están en cierto ambiente (espacio). El estudio se refiere a la búsqueda de invariantes de relaciones entre los objetos (independientes del sistema de referencia) bajo la acción de un grupo. Para estudiar un tipo de geometría debemos entonces definir:

- Un espacio ambiente.
- Los objetos que vamos a estudiar en este espacio.
- Un grupo que define los movimientos. Los movimientos son transformaciones del espacio que preservan ciertas relaciones entre los objetos, las cuales estamos interesados en estudiar.

Estas transformaciones forman un grupo.

Por ejemplo, la geometría euclidiana en el plano estudiada en la escuela y el bachillerato, el espacio ambiente es el plano, los objetos son puntos, rectas, polígonos, circunferencias, etcétera, y el grupo de transformaciones es el grupo de transformaciones del plano que preservan la distancia (grupo euclidiano).

### El plano proyectivo RP2

El plano proyectivo es una extensión del concepto de plano euclidiano que conocemos. En el plano proyectivo cualquier par de rectas se intersectan a diferencia de las rectas en el plano euclidiano. Veamos el siguiente modelo del plano proyectivo.

#### Modelo del plano proyectivo RP2 = R3\_0/ ~

En el espacio tridimensional sin el origen  $R3_0 = R3 \setminus \{(0,0,0)\}$  consideremos la siguiente relación de equivalencia: Dados dos puntos  $A1 = (a, b, c)$  y  $A2 = (d, e, f)$ ,  $A1$  es equivalente con  $A2$ ,  $A1 \sim A2$ , si y solamente si existe un número real  $k \neq 0$ , tal que  $a = kd$ ,  $b = ke$ ,  $c = kf$ ,

$(a,b,c) \sim (d,e,f) \iff (a,b,c) = k(d,e,f)$ , para algún  $k \in R \setminus 0$ .

El plano proyectivo lo definimos como  $RP2 = R3_0/ \sim$ .

Los objetos fundamentales del plano proyectivo son puntos y rectas:

- Puntos: los puntos proyectivos del plano proyectivo son las clases de equivalencia de la relación  $\sim$ . Si  $A = [x1, x2, x3]$ , donde los corchetes significan clase de equivalencia, entonces escribimos  $x1 : x2 : x3$  y se llaman coordenadas homogéneas del punto A del plano proyec-

tivo. En este modelo podemos visualizar un punto proyectivo como una recta en el espacio tridimensional  $R3$  que pasa por el origen.

- Rectas: dos puntos proyectivos diferentes en el plano proyectivo determinan una única recta proyectiva. En este modelo, una recta proyectiva del plano proyectivo es un plano en  $R3_0$  que pasa por el origen.

Este proceso descrito anteriormente es la proyectivización de  $R3$ , es decir el plano proyectivo es la proyectivización de  $R3$ . Similarmente la recta proyectiva es la proyectivización de  $R2$ .

#### El grupo proyectivo PGL(3) = GL(3)/ ~

El grupo general lineal  $GL(3)$  es el grupo de matrices  $3 \times 3$  no singulares,

$$GL(3) := \left\{ g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mid \det(g) \neq 0 \right\}$$

Una matriz  $[a_{ij}] \in GL(3)$  se llama matriz escalar si  $a_{ii} = \lambda$ , y  $a_{ij} = 0$  ( $i \neq j, \lambda \neq 0$ ). El conjunto de matrices escalares con la multiplicación corriente de matrices forman un grupo. Denominemos este grupo por  $S$ .

$$S := \left\{ s = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \neq 0 \right\}$$

$S$  es el centro de  $GL(3)$ , es un subgrupo normal y abeliano.

Definamos la siguiente relación de equivalencia: dos matrices  $g1, g2 \in GL(3)$  son equivalentes,  $g1 \sim g2$  si existe una matriz escalar  $s \in S$ , tal que  $g1 = sg2$ ,  $g1, g2 \in GL(3)$ ,  $g1 \sim g2 \iff g1 = sg2$ , para alguna matriz  $s \in S$ .

El grupo proyectivo  $PGL(3)$  se define como  $GL(3)/ \sim$ . Sus elementos son clases

de equivalencia, es decir que un elemento  $a$  de  $PGL(3)$  es

$$a = [g] = \{\lambda g \mid g \in GL(3), g \text{ fijo}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

**Transformaciones**

Las transformaciones proyectivas (homografías) del plano proyectivo son el resultado de la acción del grupo proyectivo  $PGL(3)$  sobre los puntos del plano proyectivo. Un movimiento de un punto  $A$  en el plano proyectivo lo podemos definir como  $[g] \cdot A$ , donde  $[g]$  es un elemento del grupo proyectivo.

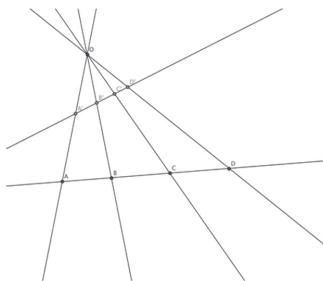
$$A = [x_1 : x_2 : x_3] \in RP^2$$

$$[g] \in PGL(3), \quad [g] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

La acción es:

$$[g] \cdot A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} [x_1 : x_2 : x_3]^T = [y_1 : y_2 : y_3]^T$$

Podemos dividir los puntos del plano proyectivo en dos clases, los puntos propios y los impropios. Los primeros son aquellos que su tercera coordenada homogénea es diferente de cero, mientras que los segundos los que tienen su tercera coordenada homogénea igual a cero. Note que una homografía puede llevar un punto propio a uno impropio y viceversa.



**Figura 5.** Las razones dobles son iguales  $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D') = 1,35$ .

Dibujo y cálculos hechos con GEOGEBRA <http://www.geogebra.org/cms/>

**Invariantes**

En la recta proyectiva un punto propio tiene coordenadas homogéneas  $[x_1 : x_2] = [a : 1]$  donde  $a = x_1/x_2$  es un número real. En este caso denotaremos por  $A(a)$  el punto con su coordenada.

La razón doble entre cuatro puntos propios distintos  $A = [a_1 : a_2]$ ,  $B = [b_1 : b_2]$ ,  $C = [c_1 : c_2]$  y  $D = [d_1 : d_2]$  de la recta proyectiva  $RP^1$  se define como

$$(A, B; C, D) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}$$

En el caso de puntos propios distintos sobre una recta, la razón doble se simplifica a

$$(A, B; C, D) = \frac{c - a}{c - b} \cdot \frac{c - a}{c - b}$$

El único invariante numérico de la recta proyectiva  $RP^1$  bajo la acción del grupo proyectivo  $PGL(2)$  es la razón doble.

**Conclusiones**

- Se llama geometría proyectiva a la pareja  $(RP^n, PGL(n))$ , donde  $RP^n$  es la proyectivización de  $R^n$  y  $PGL(n)$  es el grupo proyectivo<sup>6</sup>. En general, los puntos proyectivos son líneas rectas en  $R^n$  que pasan por el origen  $O$ .
- Imaginemos que estamos observando un objeto con un solo ojo desde un único punto  $O$ . Entonces todo lo que vemos es gracias a los rayos de luz que entran

<sup>6</sup>  $(RP^1, PGL(1))$  es la recta proyectiva,  $(RP^2, PGL(2))$  es el plano proyectivo,  $(RP^3, PGL(3))$  espacio proyectivo, etc.

a nuestro ojo. Estas son líneas rectas o puntos proyectivos. Así, las observaciones pueden ser consideradas como funciones en los puntos de la geometría proyectiva.

- Si tenemos un objeto colocado en un plano distante y un lienzo en el cual vamos a dibujarlo, un dibujo en perspectiva se hace por la intersección de los pun-

tos de la geometría proyectiva entre puntos del objeto real y puntos sobre el lienzo. Es decir, un dibujo en perspectiva es simplemente una homografía.

- El único invariante de la geometría proyectiva es la razón doble entre cuatro puntos distintos colineales y este define todas las reglas de la perspectiva.