



Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica

- Triangle height definition: broadening the examples space with a dynamic geometric environment
- Definindo a altura do triângulo: ampliando o espaço de exemplos no ambiente da geometria dinâmica

Resumen analítico

La construcción de definiciones en matemáticas y su relación con el proceso de construcción de conceptos han sido cuestiones de interés permanente en la educación matemática. El presente artículo reporta resultados de una investigación sobre el proceso de conceptualización de altura de triángulo realizado por un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en Bogotá, Colombia. El concepto fue abordado en dos cursos de geometría del plan de formación: durante un acercamiento intuitivo a la definición (primer curso) y durante el uso del concepto para demostrar hechos geométricos (segundo curso). Los cursos se desarrollan en el marco de una innovación metodológica de enseñanza, apoyada en el uso de geometría dinámica, que pretende favorecer el aprendizaje. Se analiza la conceptualización a partir de la caracterización del proceso desarrollado por los estudiantes.

Abstract

The construction of definitions in mathematics and its relationship with the concept building process have been issues of ongoing interest in mathematical education. This article reports the results of a research project on the conceptualization process of triangle height by a group of students from a pre service teacher program in mathematics. The concept was undertaken in two moments, each one in consecutive geometry courses of the curricular plan. In the first course, we used an intuitive approach to the definition and, in the second course, we used the concept to prove geometric facts. The courses were developed within the framework of a methodological innovation in teaching, based on the use of dynamic geometry. The conceptualization process was analyzed through the characterization of the process carried out by the students.

Carmen Samper¹
Orlando Aya Corredor²
Armando Echeverry³

- 1 Profesora titular Universidad Pedagógica Nacional. csamper@pedagogica.edu.co
- 2 Profesor auxiliar Universidad Pedagógica Nacional. oaya@pedagogica.edu.co
- 3 Profesor Secretaría de Educación Distrital Bogotá. armandoech@gmail.com

Palabras clave:

Geometría dinámica, definición, demostración, imagen conceptual, espacio de ejemplos

Keywords:

Dynamic geometry, definition, proof, concept image, example space.

Artículo recibido el 01-12-2013
y aprobado el 10-06-2014

Resumo

A construção de definições em matemática e sua relação com o processo de construção de conceitos têm sido temas de permanente interesse na educação matemática. Este trabalho relata resultados de uma investigação sobre o processo de conceitualização de altura de triângulos realizado por um grupo e alunos de licenciatura em Matemática na Universidade Pedagógica Nacional, em Bogotá, Colômbia. O conceito foi abordado em dois cursos de geometria do plano de formação: durante uma aproximação intuitiva da definição (primeiro curso) e durante o uso do conceito para demonstrar fatos geométricos (segundo curso). Os cursos se desenvolvem no âmbito de uma inovação metodológica de ensino, apoiada no uso de geometria dinâmica, que visa favorecer a aprendizagem. É analisada a conceitualização a partir da caracterização do processo desenvolvido pelos estudantes.

Palavras-chave:

Geometria
dinâmica,
definição,
demonstração,
imagem conceitual,
espaço de
exemplos

En matemáticas, las definiciones desempeñan dos papeles distintos: el primero, introducir los elementos básicos de una teoría, y, el segundo, introducir un nuevo elemento en la teoría misma. Las definiciones expresan propiedades que caracterizan los objetos matemáticos y que los relacionan con una red existente de conceptos. Es por esto que las definiciones emergen como objetos de estudio en el contexto de la matemática escolar, lo cual exige una reflexión acerca del proceso de conformación de un concepto, del rol de la definición en este proceso y del tratamiento que se le debe dar a esta en ese contexto.

Investigadores como Tall (2002) y Vinner (2002) se han ocupado de estudiar el proceso de construcción de definiciones y plantean como hipótesis que el paso de las aproximaciones preliminares implícitas de los estudiantes a las definiciones matemáticas requiere del mismo proceso desarrollado por la humanidad a lo largo de la historia, esto es, desde la construcción de definiciones en contextos empíricos al establecimiento de una definición formal mediante aproximaciones por refinamiento. Para los estudiantes, el conflicto entre las aproximaciones y la definición formal constituye un obstáculo real para la comprensión del concepto. Esta es la razón por la cual el proceso de definir se constituye en un punto crucial en la educación matemática.

En este artículo, se reporta el estudio realizado para determinar el efecto del uso de geometría dinámica en el proceso de conceptualización de *altura de triángulo*. La hipótesis que se tenía era que el uso de geometría dinámica propiciaría la construcción de definiciones, así como la formación de un espacio de ejemplos local y personal que se correspondería con el espacio de ejemplos convencional (Watson y Mason, 2005). Se presenta el marco teórico que involucra el proceso de formación de conceptos y definiciones, el papel que cumplen

estas en la actividad demostrativa y una descripción de lo reportado por investigadores sobre el proceso de construcción de definiciones en un entorno de geometría dinámica. Luego, se presenta el contexto de investigación de este estudio y se describen las fases realizadas en el proceso de investigación, así como las actividades desarrolladas en el aula. Posteriormente, se presentan las categorías de análisis con las que se examinaron las actividades y las producciones de los estudiantes. Finalmente, se presentan algunas conclusiones.

Antecedentes

Desde los inicios del siglo xx, Poincaré (1908/1997) destacaba claramente algunos aspectos relevantes de la relación problemática entre lo que es la definición formal de un objeto o relación en las matemáticas y las definiciones descriptivas que se dan en la matemática escolar de ellos. Mientras en la primera lo principal son los aspectos lógico formales de la misma (coherencia lógica y consistencia con la teoría), para la segunda lo relevante es la correspondencia de una representación con la noción intuitiva que el sujeto se forma y el uso que hace de esta representación. Poincaré pone en escena la problemática relacionada con el aprendizaje de las definiciones, el papel que juegan las representaciones mentales, más concretamente las imágenes, en la comprensión, y cómo estas pueden constituirse en obstáculo para acceder al concepto mismo. Gutiérrez y Jaime (1996) incluyen la comprensión de los procesos de aprendizaje de los conceptos geométricos como uno de los principales problemas para la investigación en didáctica de las matemáticas, dentro del campo de la geometría escolar.

De Villiers (1994, 1998), argumenta que enseñar directamente las definiciones, sin

hacer énfasis en el proceso de definir, es una práctica que ha sido ampliamente criticada por los matemáticos y por los educadores matemáticos; entre otras cosas porque esta manera de proceder puede ser considerada como un método de persuasión moral con varias funciones sociales, entre ellas justificar el control del profesor sobre los estudiantes, evitar confrontaciones con las ideas de los mismos y presuponer o garantizar un cierto grado de uniformidad.

Calvo (2001) afirma que solo cuando se supera el paradigma de la enseñanza de las matemáticas como la memorización de definiciones y teoremas, se pueden generar estrategias para que el estudiante repersonalice y recontextualice su conocimiento, lo que redundará no solo en una mejor comprensión sino en un mejor saber hacer, es decir, en un conocimiento significativo. Cuando la definición se presenta a los estudiantes tal como la concibe la comunidad científica, los procesos de recontextualización y redescontextualización no se realizan. Como consecuencia de ello, la definición no solo no es comprendida sino que es vista como una imposición y no como una construcción. En su análisis, Calvo advierte sobre el papel mediador del docente, resaltando que no es suficiente, para aprehender un concepto, dar ejemplos y no-ejemplos de este, pues ello puede llevar a caracterizaciones que no incluyen las condiciones suficientes o que no poseen las características lógicas de la definición matemática, por ejemplo, el no ser cíclica ni redundante.

Barroso (2000) analiza el proceso de definir conceptos matemáticos. Considera que los conceptos se generan a partir de una serie de atributos relevantes que son reconocidos por el sujeto a través de experiencias con los objetos, las cuales generan también información de atributos irrelevantes. Fou-Lai y Kai-Ling (2002) destacan que los investigadores Vinner, Fischbein, Moore, Duval y Tall, han estudiado las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la demostración en geometría y han encontrado múltiples fuentes de las mismas. Una de ellas está relacionada con la definición. El interés del trabajo de Fou-Lai y Kai-Ling está en determinar el tipo de actividades que se deben proponer a los estudiantes para que accedan a una definición, y que sirvan como puente entre el razonamiento informal y el razonamiento formal, y el papel que desempeña la interacción social en el proceso de elaboración de una definición.

Frente al papel de los ambientes de geometría dinámica, de Villiers (1998, 2004) argumenta que para realizar la construcción de una figura geométrica, los estudiantes sacan a la luz aquellos elementos o características que consideran como parte de la definición. Furinghetti y Paola (2002) consideran el problema de la consistencia de cierta definición con las construcciones hechas usando el *software* Cabri y emplean este ambiente para que los estudiantes evalúen si es apropiada la definición que están usando. Moore (1994) encuentra que existe una relación entre la posibilidad de demostrar y aspectos relacionados con las definiciones en sí. Identifica varias dificultades que surgen a la hora de demostrar, como es el no saberse la definición y tener comprensión deficiente de los conceptos.

Marco teórico

Definiciones y conceptualización

Para Vinner (2002), el proceso de formación de un concepto involucra la interacción entre la *definición del concepto*, que corresponde a una de las que se da desde la matemática, y la *imagen conceptual* existente en la mente del estudiante, la cual no siempre coincide con la definición del concepto. La imagen conceptual es la estructura cognitiva total asociada a un concepto que tiene un individuo; esta incluye las imágenes mentales, las propiedades y procesos asociados al mismo que el individuo expresa explícita o implícitamente. Tal interacción se realiza por un largo intervalo durante el cual las experiencias con el concepto van enriqueciendo la imagen conceptual. Los resultados de la investigación realizada por Vinner muestran que habitualmente los profesores creen que el alumno forma la imagen conceptual a través de la definición del concepto, y que, por tanto, esta última controlará a la primera. Además, estos autores creen que en cualquier tarea que implique el uso de la definición, el estudiante recurrirá a la definición del concepto, ya sea de manera directa o a través de la imagen conceptual. Si bien esto sería deseable, ellos señalan que la práctica ha mostrado que el camino seguido es diferente. En general, los estudiantes no consultan la definición del concepto durante el proceso de resolución de una tarea, aun cuando la conozcan, y solo hacen uso de los demás componentes de su(s) imagen(es) conceptual(es).

Un fenómeno reportado por Edwards y Ward (2004) es que, en ocasiones, la formación de un nuevo concepto se ve influenciada por la inadecuada imagen conceptual de un concepto anterior con el cual está relacionado. Por su parte Moore (1994) propone el término

concepto usado para referirse al concepto que emplean los estudiantes cuando se enfrentan a la tarea de elaborar demostraciones. En esta medida los anteriores investigadores ponen de manifiesto que la formación de un concepto depende de las experiencias que se tenga con el mismo, que no necesariamente forman un todo consistente. Mencionan que se pueden presentar diferencias e incluso inconsistencias entre la definición del concepto, la imagen conceptual y el concepto que es empleado por un individuo en un contexto específico.

Fischbein (1993) contribuye al estudio del proceso de conceptualización al introducir el término *concepto figural* para conceptos geométricos, resaltando que estos tienen una naturaleza dual: involucran aspectos tanto conceptuales (teóricos) como figurales (usualmente asociados a las imágenes conceptuales). Suele ocurrir, en geometría, que lo figural prime sobre lo conceptual y, por tanto, la imagen conceptual tiende a ser primordialmente figural. Esto puede explicar muchos errores en el razonamiento geométrico de los estudiantes (Mariotti y Fischbein, 1997; Fischbein, 1993).

De otra parte, en el proceso de conceptualización, los individuos realizan una serie de representaciones de diversa índole, que les son útiles para referirse a un objeto. Watson y Mason (2005) elaboran el constructo *espacios de ejemplos* para referirse a una colección de ejemplos que cumplen una función específica dentro del proceso de conceptualización y que son exteriorizados por los individuos por medios figurales o verbales. Los investigadores proponen los siguientes tipos de espacios de ejemplos:

- a. *Espacios de ejemplos situados* (local) y *personal* (individual) que son activados por una tarea, situaciones del entorno o por una experiencia reciente.

- b. *Espacio personal de ejemplos o potencial*, a partir del cual el espacio local es generado; consta de experiencias del pasado (aun cuando no se puedan recordar explícitamente) que no permiten una fácil estructuración para su abordaje.
- c. *Espacio de ejemplos convencionales* consistente en aquellos ejemplos que usan los matemáticos y los libros de texto, de los cuales el profesor espera que se apropien los estudiantes.
- d. *Espacio de ejemplos situado y colectivo* es el desarrollado para una clase o un grupo particular en un momento determinado; actúa como un espacio de ejemplos convencional.

Respecto a la tarea de definir, importante para el proceso de conceptualización, de Villiers (1994, 2004) destaca que en matemáticas existen dos procesos asociados a esta: uno *descriptivo (a posteriori)* y otro *constructivo (a priori)*. Las definiciones descriptivas, resultado del primer proceso, se logran una vez que el individuo ha tenido experiencia, durante un periodo de tiempo, con las propiedades del objeto, y empieza a determinar, del conjunto de características, el subconjunto de aquellas a partir de las cuales las demás pueden ser verificadas o deducidas. El subconjunto se constituye en la definición y todas las demás propiedades podrán ser deducidas lógicamente a partir de ella como teoremas. El papel de estas definiciones es la sistematización del conocimiento existente. De otra parte, las definiciones constructivas, resultado del proceso de definir constructivamente, surgen cuando a partir de una definición dada de un concepto, esta es cambiada por algún proceso lógico (exclusión, generalización, especialización, reemplazo o adición de propiedades a la definición) de forma tal que en este proceso un nuevo concepto es definido; así, el principal objetivo de estas definiciones será producir nuevo conocimiento.

Actividad demostrativa

En esta sección se hace una breve descripción del constructo actividad demostrativa, según lo entiende el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, de la Universidad Pedagógica Nacional. Esto porque esta concepción guió el diseño de las actividades y el desarrollo de las clases de las cuales se obtuvo el material para el estudio que aquí se reporta. La actividad demostrativa abarca una serie de acciones que van más allá de la demostración formal y que involucra dos procesos: el de *conjeturación* y el de *justificación*. Algunas de las acciones que se realizan para los dos procesos son la *visualización* y la *exploración*; en el primero para la elaboración de conjeturas a partir de lo que se descubre, y la verificación de estas; en el segundo para explicar, probar y presentar resultados de manera sistemática. Esto es, la actividad demostrativa es el proceso “conformado por acciones tendientes a producir una conjetura y el conformado por las acciones tendientes a producir una justificación” (Samper, Perry, Camargo y Ruiz, 2006, p. 397).

Las definiciones de los objetos juegan un papel importante en la demostración, ya que una de las principales dificultades asociadas al proceso deductivo demostrativo radica en una escasa comprensión de la naturaleza y el papel que cumplen las mismas, así como de la comprensión de las condiciones suficientes y necesarias que se establecen en ellas (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006). Así, si una *definición personal del concepto* no concuerda con la *definición del concepto*, la posibilidad de tener éxito en el proceso de justificación, ya sea con una explicación o una demostración, se afectará. También son importantes las definiciones para el proceso de conjeturación pues la visualización, entendida como el proceso cuyo propósito es percibir, detectar y evocar propiedades geométricas de un objeto o de las relaciones entre objetos, está ampliamente relacionada con el espacio personal de ejemplos. Entre más amplio sea el mismo y más próximo esté del espacio de ejemplos convencional, la posibilidad de articular los procesos implicados en la demostración se verá fortalecida y enriquecida.

El proceso de definir y el uso de geometría dinámica

Mariotti (1997) y Govender (2002) coinciden en afirmar que trabajar en un entorno de geometría dinámica lleva a que las restricciones figurales surjan en el momento de construir o validar una definición. Es decir, las limitantes de la representación figural de un objeto que tiene una persona generan una idea equivocada que se asocia con la definición. Por lo tanto, usar geometría dinámica en el marco de un proceso de conceptualización puede ayudar a superar las dificultades que las representaciones restringidas puedan generar. Mariotti (1997) considera que las imágenes que se producen en la pantalla de un micro-mundo (como lo puede ser Cabri Géométrie)

están controladas de manera lógica por los comandos de los diferentes menús; es decir, en cada figura van a estar presentes componentes tanto preceptuales como teóricos ligados a los aspectos figurales y conceptuales del objeto. Por lo anterior, un ambiente de geometría dinámica es útil no solo para que se haga evidente la disyuntiva dialéctica entre estos aspectos, sino para lograr una adecuada integración de los mismos.

Govender (2002) destaca que un ambiente donde las definiciones no son suministradas por el profesor, sino que son presentadas como el fruto de un proceso constructivo y una actividad creativa, hará que la comprensión del uso y el papel de las definiciones se dé de una manera significativa. La exploración de las figuras en un ambiente de geometría dinámica permite que, al modificar la apariencia gráfica de las figuras, se develen los elementos invariantes del objeto. Por lo tanto, se pueden determinar cuáles son las condiciones realmente necesarias y suficientes que permiten definir el objeto.

Metodología

Tipo de investigación

Globalmente se puede caracterizar este estudio como descriptivo e interpretativo, con un modelo de diseño emergente (Calvo, 2001). Es de diseño emergente toda vez que los instrumentos para la recolección de los datos fueron diseñándose en el curso del trabajo. Es descriptivo e interpretativo, pues las herramientas de análisis para examinar los resultados de observación en el contexto de actividad demostrativa así como del cuestionario son categorías emergentes enmarcadas en los aspectos teóricos que sirvieron de referencia para la formulación de la hipótesis, y presenta un análisis de tipo cualitativo.

Contexto

Los datos para este estudio fueron tomados durante el desarrollo de los cursos Elementos de Geometría y Geometría Plana que hacen parte de la línea de geometría del programa de formación inicial de profesores en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. El propósito global del curso Elementos de Geometría es enfrentar al estudiante a sus imágenes conceptuales de objetos y relaciones geométricas para que, con la intervención posterior del profesor y del entorno de geometría dinámica, se logre una mejor aproximación a estos y a los métodos propios de la geometría euclidiana. En Geometría Plana se trabajan las temáticas de la geometría euclidiana relacionadas con puntos, rectas, planos, triángulos y cuadriláteros de manera formal conformando un sistema teórico. Los estudiantes deben construir demostraciones formales que justifiquen algún hecho geométrico o conjetura que ellos hayan formulado como producto de un proceso de exploración, en el que posiblemente se usa geometría dinámica. Estos cursos fueron escenario de esta investigación porque en ellos se realizó un proceso de innovación, relacionado con la construcción de definiciones y con el uso de estas en el marco de la actividad demostrativa, mediada por la utilización de la geometría dinámica.

El seguimiento se realizó a la misma población (20 estudiantes) durante el desarrollo de las cinco actividades relacionadas con el concepto *altura de un triángulo* que se hicieron a lo largo de los dos cursos mencionados. Es importante mencionar que de acuerdo con la metodología para el desarrollo de las actividades propuestas en los cursos, los estudiantes siempre trabajaron en grupos, no necesariamente con los mismos integrantes, lo que no permitió hacer un seguimiento individualizado de ellos en los episodios reportados de las clases.

Instrumentos

En el curso Elementos de Geometría, se analizaron los episodios en que se trabajó la definición de altura de triángulo (*actividad de conceptualización*). En Geometría Plana, se estudiaron episodios en que los estudiantes hicieron uso de dicha definición para formular justificaciones (*actividad demostrativa*). En la tabla 1, relacionamos los aspectos generales del análisis, los instrumentos de recolección de información y la finalidad de los datos.

Tabla 1. Análisis: aspecto, instrumentos y finalidad

Aspecto de análisis	Instrumentos	Finalidad
1. Caracterización del proceso de conceptualización.	Registros de audio y video de dos clases de Elementos de Geometría y producciones escritas de los estudiantes de una tarea acerca de la definición de altura de un triángulo, desarrollado en grupos.	Caracterizar el proceso de conceptualización del objeto <i>altura de un triángulo</i> .

Continúa →

2. Relación definición del concepto <i>imagen conceptual</i> .	Registros de audio y video de dos clases de Elementos de Geometría y dos clases de Geometría Plana. Cuestionario.	Analizar las imágenes conceptuales, los espacios de ejemplos y las definiciones personales de <i>altura de un triángulo</i> .
3. Uso de definiciones en el contexto de la actividad demostrativa.	Registros de audio y video de dos clases de Geometría Plana. Cuestionario.	Analizar si el concepto usado guarda relación con el espacio personal de ejemplos y la definición personal del concepto, en el contexto de la actividad demostrativa.

Descripción de la tarea relacionada con la actividad de conceptualización

El proceso de conceptualización de *altura de triángulo* comienza en el curso Elementos de Geometría con la siguiente actividad:

- Realice una representación gráfica en papel de *altura de un triángulo*.
- Construya la figura en la calculadora.
- Escriba la definición.

Con ella se busca que el estudiante explicita su definición personal del concepto de altura de un triángulo verbalmente, la imagen conceptual que tiene de la misma mediante una representación gráfica y la manera como emplea los elementos expresados en la definición, que constituyen su imagen conceptual, al construir el objeto geométrico con geometría dinámica. Esto último para hacer ostensible la definición con la cual trabaja (Furinghetti y Paola, 2000 y 2002). Con este ejercicio, la actividad de definir puede ser caracterizada como de generación de una *definición descriptiva* (de Villiers, 1998).

Se pretende, a través de la generalización y uso de un lenguaje más preciso, establecer una definición de *altura de triángulo* como objeto geométrico. Aquí es fundamental la intervención de la geometría dinámica pues, al examinar la correspondencia entre construcción y definición, el software permite verificar fácilmente las propiedades reportadas

en la definición personal. Por ejemplo, si fue considerada, o no, la propiedad de que el segmento altura es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto y no simplemente a este. Esto no es posible hacerlo en una representación hecha en papel y lápiz. Además, la geometría dinámica posibilita una ampliación del espacio personal de ejemplos con el uso del “arrastre”.

En las siguientes clases se analizaron las respuestas. La definición personal del concepto consignada por cada estudiante se contrastó con las representaciones figurales que presentaron, evidencia de sus imágenes conceptuales, y se estudió la consistencia de estas con la construcción que realizaron usando geometría dinámica.

Descripción de la tarea relacionada con la actividad demostrativa

Como parte de nuestra hipótesis implicaba examinar cómo el estudiante usa las definiciones durante la actividad demostrativa, hicimos el registro, en el semestre inmediatamente siguiente, de algunas de las clases del curso Geometría Plana en las cuales se requería el uso del concepto de *altura de triángulo*. La altura de un triángulo aparece por primera vez en el contexto del curso con una actividad cuyo fin es que los estudiantes elaboren una conjetura y la demuestren. El enunciado es: “Determine la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad: dos de sus alturas son congruentes.”

Se pretende que los estudiantes usen su definición personal para representar dos alturas de un triángulo y con el arrastre encuentren cuándo son congruentes, o que basados en su espacio personal de ejemplos de triángulos con alturas, exploren si se cumple la propiedad en un triángulo isósceles o equilátero.

La dinámica de la actividad implica el desarrollo de tres fases: la exploración realizada por grupos y la formulación de la conjetura, la discusión que emerge durante la socialización ante el curso de la relación encontrada por cada grupo y una presentación del papel de la definición en el proceso de justificación. Con ello se pretende que las definiciones personales y los espacios de ejemplos se hagan explícitos, para determinar la cercanía entre la definición personal del concepto y la definición del concepto.

Descripción del cuestionario

Se encontró que, si bien el análisis de los momentos anteriores permitía hacer algunas inferencias respecto al desarrollo del concepto de altura de triángulo, los datos arrojados eran, de alguna manera, poco precisos, debido a que las participaciones y discusiones dejaron ver solamente algunos aspectos de la imagen conceptual y de la definición personal de unos pocos estudiantes. Con el fin de ampliar la información y subsanar el hecho de no tener el seguimiento de cada estudiante, se decidió diseñar un cuestionario que permitiera evidenciar otros aspectos de interés.

El cuestionario consistió en cuatro preguntas, las cuales cada estudiante recibía consecutivamente, una vez hubiese entregado la respuesta a la pregunta anterior. A continuación se presenta cada pregunta del cuestionario y su objetivo.

1. “Determine si la respuesta a la pregunta es sí, no, o no se sabe. Justifique su respuesta. ¿Es la altura de un triángulo un segmento?” Con esta pregunta se busca determinar cuál imagen conceptual del objeto geométrico *altura de un triángulo* evoca inicialmente el estudiante, ya sea la de segmento, recta o número. Al solicitarle que justifique su respuesta, la intención es que el estudiante exprese de manera explícita su definición personal del concepto.

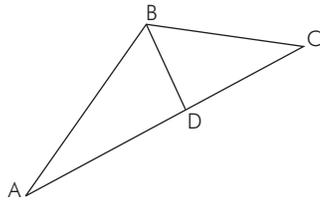
Las demás preguntas, enfocan la atención del estudiante en la altura como objeto geométrico.

2. “Determine si la respuesta es sí, no, o no se sabe. Justifique su respuesta. \overline{CD} es la altura relativa al vértice C del $\triangle ABC$. ¿Se tiene que D es un punto entre A y B ?” El propósito de esta pregunta es que el estudiante explicita su espacio personal de ejemplos y su definición personal del concepto como objeto geométrico. Desde esta perspectiva, la pregunta busca poder establecer si el estudiante considera los casos en los cuales la altura tiene, figuradamente, puntos en el exterior del triángulo (triángulo obtusángulo) o en uno de los lados del triángulo (triángulo rectángulo), además de la que

siempre mencionan, que corresponde al triángulo acutángulo.

3. “a) En el $\triangle ABC$, ¿qué se puede decir del \overline{BD} ? Justifique su respuesta.

b) Si la figura estuviera en la pantalla de una calculadora, ¿qué acciones realizaría para verificar si lo que percibe visualmente es cierto? De acuerdo con los resultados de sus acciones, ¿qué puede decir del segmento?”



La pregunta incluye la representación de un segmento que parece perpendicular a un lado del triángulo. Esto porque las investigaciones (Fischbein, 1993 y Gutiérrez y Jaime, 1996) muestran que lo figural generalmente prima y por ello se evocaría la altura de un triángulo. En consecuencia, en esta pregunta se quiere determinar si los estudiantes trascienden la imagen visual y, por ello, mencionan las condiciones requeridas para establecer que el segmento en cuestión, en una representación en geometría dinámica, cumple las condiciones de la definición del concepto del objeto específico evocado. Se establece el contexto de la parte (b) esperando que ello lleve a los estudiantes a mencionar, de manera explícita, aquellas funciones del software que impactaron su imagen conceptual, como el arrastre o “comprobar propiedades”.

Dado el trabajo que se había hecho en el primer curso, particularmente para desarrollar la capacidad de visualizar matemáticamente las figuras a través del uso de la geometría dinámica, la respuesta deseable es que los estudiantes indiquen la necesidad de más in-

formación para determinar si la representación corresponde a los conceptos particulares que ellos evocan.

4. “Escriba los pasos claves de la demostración de la siguiente afirmación: La altura relativa a la base de un triángulo isósceles es mediana”. Como se presentó en el marco teórico, es posible que la definición del concepto, la imagen conceptual, la definición personal del concepto y el concepto usado, no formen un todo armónico ni coherente. La pregunta se propone con el fin de analizar el uso que hacen los estudiantes de la definición de *altura*, elemento para determinar cuál es su imagen conceptual y su definición personal de este concepto. Se busca determinar si los estudiantes analizan la situación para diferentes tipos de triángulos isósceles con el fin de asegurar que, sin importar el tipo de triángulo isósceles, ya sea acutángulo, obtusángulo o rectángulo, el pie de la altura a la base siempre estará sobre esta. Así, se pretende que los estudiantes mencionen que la demostración no se modifica con respecto al tipo de triángulo, pues ello no afecta la interstancia del pie de la altura y los extremos del segmento. Otro propósito es analizar si los estudiantes utilizan o no representaciones figurales del triángulo isósceles como apoyo para construir la demostración, y el tipo de representaciones que realizan en el caso de usarlas.

Categorías de análisis

Las categorías de análisis se relacionan con el grado de completitud de la posible definición

personal del estudiante, usando como marco la propuesta respecto a los referentes teóricos sobre las definiciones y sobre el proceso de definir (de Villiers, 1998, 2004; Govender, 2002). Las categorías para el espacio de ejemplos se tomaron de la propuesta de Watson y Mason (2005), en particular con el espacio personal de ejemplos que es evocado con relación a las representaciones figurales o verbales.

En cuanto a la definición, las categorías son las siguientes:

Definición Completa (DC): El estudiante da una definición personal del concepto donde se hacen explícitos los invariantes del concepto *altura de un triángulo*, en el contexto de la geometría euclidiana y no en el de medida. Es decir, determina la altura de un triángulo como:

- a. un segmento,
- b. con un extremo en uno de los vértices del triángulo,
- c. el otro extremo pertenece a la recta que contiene al lado opuesto,
- d. es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto.

Definición Incompleta (di): La definición es incompleta si no hace referencia explícita a la posición de los extremos del segmento altura, el primero en uno de los vértices del triángulo y el otro sobre la recta que contiene al lado opuesto a dicho vértice.

Definición Incorrecta (i): Bajo esta categoría están aquellas definiciones que restringen la posición de uno de los extremos del segmento altura al segmento opuesto al vértice que es el otro extremo del segmento, en vez de considerarlo como un punto de la recta que contiene a dicho lado, las que no incluyen la condición de perpendicularidad del segmento o que refieren a elementos geométricos relacionados con otros conceptos.

Definición Fuera de Contexto (dfc): Se considera que está fuera de contexto si hace referencia a la medida; es decir, si se refiere explícita o implícitamente a un número.

Para la categorización de los espacios de ejemplos dados por los estudiantes, se hizo un análisis de las representaciones figurales o verbales proporcionadas por ellos en las respuestas a las primeras tres preguntas del cuestionario, pero particularmente a la segunda, y la definición dada para la altura en dichas preguntas. Se consideraron como espacios personales de ejemplos no solo las representaciones figurales sino también las descripciones verbales completas que presentaron algunos estudiantes. Así, las categorías propuestas fueron las que aparecen a continuación:

Espacio Completo (EC): Un espacio completo de ejemplos incluye representaciones de todos los posibles casos de la posición de la altura de un triángulo relativa a la recta que contiene el lado opuesto.

Espacio Incompleto (EI): El estudiante presenta un espacio de ejemplos personal que no incluye todas las posibilidades de la representación figurada.

En el análisis, aquellas definiciones que se categorizaron como *completas* fueron contrastadas con el espacio personal de ejemplos (*completo o incompleto*). En las demás categorías para la definición de altura no se hizo referencia a los espacios personales de ejemplos ya que si el espacio de ejemplos personal es completo, se reflejaría una inconsistencia entre las imágenes conceptuales y la definición personal del concepto expresada por el estudiante.

Análisis

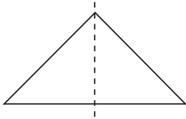
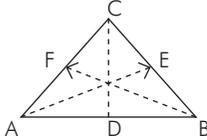
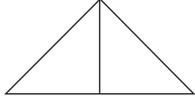
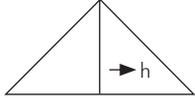
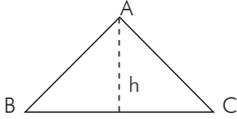
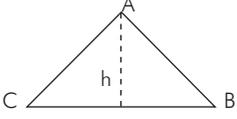
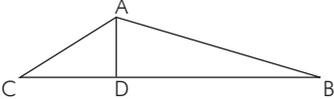
Para realizar el estudio, se analizaron tanto las producciones escritas de los estudiantes

como los episodios de las clases en los que se realizó una interacción profesora-alumnos en el cual el tema es la definición de *altura de triángulo*, tal y como se reportó en la tabla 1.

En la actividad de conceptualización

A continuación se reportan las definiciones y representaciones gráficas presentadas por algunos estudiantes a la primera parte de la actividad propuesta en este momento (tabla 2); no se reportan las construcciones realizadas en el entorno de geometría dinámica ya que los estudiantes no guardaron los archivos correspondientes en las calculadoras.

Tabla 2. Definiciones personales de altura de un triángulo y su representación figurar

Grupo	Definición y representación gráfica
1	La medida de la mediana del triángulo es la altura del mismo. 
2	Es un segmento de recta que inicia desde el punto medio de cualquier segmento hasta el punto opuesto. 
3	Segmento que parte de un vértice y que finalice perpendicular al lado opuesto. 
4	Es un segmento que tiene sus extremos en un vértice del triángulo y en el lado opuesto, siendo perpendicular a este. 
5	Es un segmento perpendicular desde un vértice del triángulo a la recta que contiene el lado opuesto. 
6	Una altura de un triángulo es un segmento perpendicular desde un vértice del triángulo a la recta que contiene el lado opuesto. 
7	Segmento que parte de un vértice del triángulo y es perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto a este vértice 

En las respuestas se evidencia el predominio de los aspectos figurales sobre los conceptuales, y de la definición personal del concepto sobre la definición del concepto puesto que representan un segmento que visualmente satisface los invariantes de la definición, lo cual no siempre se reporta en lo escrito. La definición del Grupo 1 se clasifica como *fuera de contexto*, la del Grupo 2 como *incorrecta* y las de los Grupos 3 y 4 como *incompletas*. Los tres últimos grupos dan una definición que se clasifica como *correcta* pero su representación figural coincide con la de los demás grupos, en la cual solo consideran el caso del triángulo acutángulo. Cabe destacar que solo el Grupo 7 no emplea una representación prototípica de triángulo acutángulo. En las diversas imágenes que son evocadas por los estudiantes para dar respuesta a esta tarea se evidencia que están acomodando algunas imágenes de otros conceptos que en el entorno escolar previo han trabajado relacionados con el objeto geométrico *triángulo* (mediana, medida del segmento, etc.) e incluso con el concepto mismo de *altura* (medida tal vez también representando por la letra *h* al lado del segmento), lo que coincide con los hallazgos descritos por Gutiérrez y Jaime (1996).

Por otro lado, se analizó lo que sucedió en el curso, cuando se analizaron las respuestas de los estudiantes. La posible posición del extremo de la altura, que no es un vértice del triángulo, fue resaltado por la profesora, cuando le pidió a una estudiante presentar al curso su construcción de altura, pues hizo énfasis en los diferentes tipos de triángulos al analizar, mediante el arrastre, las variaciones en la construcción. A continuación, se reporta lo sucedido en ese episodio de la clase:

Profesora:	[Se dirige a Patricia, una alumna] ¿Y cómo sé yo que esa es la altura? Tú estás haciendo un segmento con un extremo en un vértice [del triángulo], ¿sí?, del triángulo, y uno en el lado opuesto, perpendicular a este. Y ¿cómo sé yo que es perpendicular?
Profesora:	[Patricia comprueba en la representación que ha hecho con geometría dinámica que el segmento construido es perpendicular al lado, usando la función que dicho software tiene para ello] ¡Ah! comprobar propiedades. Bueno, dice que sí. Ahí está cumpliendo la definición que me dio el Grupo 7 [aquella que determina la altura como perpendicular al lado], pero Patricia arrastró, le cambió la forma al triángulo, porque es que no todos los triángulos son así [refiriéndose a los acutángulos]. Hay triángulos de distintas formas. Entonces cuando uno va a mirar la definición debe darse para todos los posibles triángulos. Si se fijan la calculadora hace eso; nos permite determinar si es cierta esta definición para todo tipo de triángulo. Pero tan pronto ella lo deforma, y... ¿qué le sucede al triángulo, cuando lo deforma? ¿Qué cambio tiene?
Profesora:	Entonces miremos el ángulo ; ¿qué le pasa al ángulo ? Ángulo es agudo [Patricia arrastra la construcción] después ángulo es recto, y después ángulo es obtuso. Es un triángulo con un ángulo obtuso. Cuando el ángulo es obtuso, el segmento perpendicular no cae sobre el segmento del lado del triángulo [...] y se da uno cuenta que ese segmento perpendicular, no lo es al lado del triángulo, pero sí a la recta que contiene al lado del triángulo. Entonces esa es la definición de altura: segmento que tiene sus extremos [lee del tablero]. Comenzaron muy bien. La mayoría no me dijeron esto: desde no sé donde, hasta no sé donde. Esta es mucho mejor: tiene sus extremos en un vértice del triángulo y en [borra la palabra <i>lado</i> y escribe en el tablero] y en la recta que contiene el lado opuesto, siendo perpendicular a esta.

La representación del concepto en tres tipos de triángulos proporcionó suficiente información para que la profesora organizara la discusión, en la cual destacó los aspectos problemáticos del proceso de definir, en general y, en

particular, de definir *altura de un triángulo*. Se refiere a la necesidad de considerar todos los posibles tipos de triángulos, y a la importancia de la precisión en la expresión verbal de la definición. Es así que la profesora pudo generar un proceso con la intención de establecer una *definición descriptiva* de altura para el grupo, ya que la mayoría de los estudiantes no eran concientes de las condiciones suficientes y necesarias para definir este objeto.

En la actividad demostrativa

Presentamos el registro y análisis del trabajo realizado por uno de los grupos de estudiantes durante la exploración con geometría dinámica, haciendo uso de calculadoras que tienen Cabri, del problema propuesto cuando eran estudiantes del curso Geometría Plana

Lucas:	Hagamos primero el equilátero. [Está mirando la pantalla de la calculadora]
Manuel:	Hagámoslo más fácil con polígono regular.
Lucas:	No sé... Creo que primero la recta, porque por definición es al lado opuesto... [Pausa para autocorregirse] a la recta que contiene al lado opuesto.
Manuel:	El equilátero tiene una sola altura... [Construyen la recta y luego el triángulo equilátero]
Lucas:	Ahora ocultemos el resto. [Ocultan la recta que contiene al lado opuesto y trazan la perpendicular desde el vértice opuesto al segmento]

Lucas evocó una *definición completa* de altura al mencionar la recta que contiene al lado opuesto. En tanto, Manuel menciona una *definición fuera de contexto* al expresar que el triángulo equilátero tiene una sola altura pues no está reconociendo la existencia de los tres segmentos que son alturas relativas a cada uno de los lados sino a que ellos tienen la misma medida. Es posible que haya recurrido a su imagen conceptual de altura como número. Sin embargo, aunque Lucas expresó una *definición aparentemente completa* al mencionar la recta que contiene el lado opuesto, y esta parece haber sido aceptada por su compañero, en efecto no la usaron para construir la altura, pues ocultan la recta antes de construir el segmento. Es decir, no determinaron el otro

(ver “Descripción de la tarea relacionada con la actividad demostrativa” en este artículo). A diferencia de lo que han estudiado investigadores como Gutiérrez y Jaime (1996) y Govender (2002), que se centran solo en los momentos en que se trabaja directamente la definición del concepto, el presente estudio amplía el análisis para incluir lo que sucedió cuando los estudiantes tenían que hacer uso de la definición en el contexto de la actividad demostrativa. Ello porque es allí donde se podría evidenciar las incongruencias posibles entre la definición del concepto y el concepto personal usado.

En la siguiente transcripción se presenta la interacción de dos estudiantes. Se hace evidente que el objeto les evoca dos definiciones personales distintas:

extremo de la altura como la intersección de la perpendicular y la recta que contiene al lado opuesto. La geometría dinámica contribuyó a evidenciar que su definición personal no corresponde a la definición del concepto. Posteriormente, en la discusión que se desarrolló en torno a las definiciones y construcciones que proveen los estudiantes, fue la geometría dinámica la que permitió hacer explícitas las diferencias entre las definiciones personales y la definición del concepto.

La discusión

Los estudiantes presentaron ante el grupo las conjeturas que dieron como respuesta al problema presentado en el apartado “Des-

cripción de la tarea relacionada con la actividad demostrativa”, respecto al tipo de triángulo y la congruencia de las alturas, junto con las construcciones que soportaban las mismas. En el siguiente episodio se muestra cómo la construcción en geometría dinámica desequilibra la definición personal del concepto que tienen varios estudiantes y la forma como, de manera indirecta, es evocada la actividad de construcción de la definición de *altura de un triángulo* que fue descrita en el protocolo presentado en el apartado “Descripción de la tarea relacionada con la actividad de conceptualización”.

- Amanda: Después con segmentos los unimos [continúa la construcción, traza las rectas perpendiculares a cada lado por el vértice opuesto al mismo, y determina los segmentos altura relativos a dos lados, ocultando las rectas] y arrastramos.
- Profesora: Hasta aquí, ¿todos estamos de acuerdo?
- Jairo: ¿Cuál es la definición de altura? [Pregunta en voz baja a un compañero]
- Profesora: ¿Jairo? [Nota rápidamente la incomodidad del estudiante con algo en el proceso de construcción]
- Jairo: Profe, es que construyeron las rectas perpendiculares a los lados... y es a la recta [pausa] que contiene al lado.
- Profesora: ¿Y qué?
- Jairo: Al arrastrar, si tienen un triángulo acutángulo [queriendo decir obtusángulo], la altura desaparece, porque la definición dice que es la perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto.
- Amanda: Pero es que ahí está inmersa la recta también.
- Profesora: Lo que tú estás queriendo decir es que... [dirigiéndose a Jairo]
- Jairo: Que deben trazar la perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto.
- Profesora: Pasa y muéstranos lo que estás diciendo. Estás diciendo que ella no construyó la altura, porque...
- Jairo: [Arrastra el punto de la construcción] Al tener un triángulo acutángulo ya no tendría altura.
- Varios : [Murmullo generalizado] Obtusángulo...
- Jairo: Obtusángulo [corrigiéndose]
- Profesora: Entonces...

[Realiza el arrastre] Que si se tiene un triángulo obtusángulo la altura desaparece.

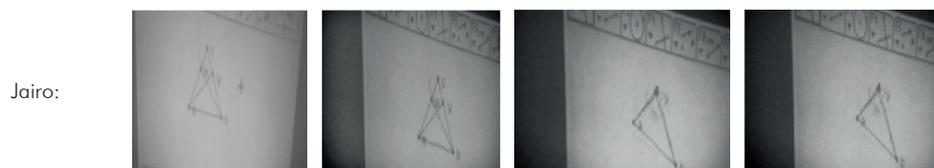


Figura 1: Secuencia de imágenes obtenidas con el arrastre

- Profesora: ¿Por qué?
- Jairo: Porque como trazaron la recta como perpendicular al lado, entonces, si arrastra, el segmento [altura] desaparece. Deben trazar la recta que contiene al lado opuesto.

Aquí se reitera una situación reportada por investigadores como Furinghetti y Paola (2002): la geometría dinámica hace ostensiva la *definición personal*. El epi-

sodio ilustra la diferencia entre una *definición incorrecta* y una *definición correcta y completa* para altura de un triángulo, siendo los propios estudiantes quienes presentaron los argumentos teóricos y la ilustración empírica para ello, mediante el uso de geometría dinámica. Cuando Jairo afirmó que “es perpendicular a la recta” e ilustró mediante el arrastre que la construcción no cumplía esa condición, expresó su definición personal de altura e hizo uso de la geometría dinámica para ilustrar que la construcción no cumple con la definición del concepto. Esto constituye una evidencia directa del resultado del trabajo de construcción de definiciones, anteriormente reportado, donde se hizo uso

de la geometría dinámica para estudiar la definición de *altura*, pues precisamente el estudiante evocó el episodio, del curso anterior, en el cual se evidenció que la altura construida como segmento perpendicular a un lado del triángulo desaparece cuando, con el arrastre, el triángulo se convierte en un obtusángulo.

El papel de la definición en el proceso de justificación

En la siguiente clase la profesora solicita un reporte de lo que sucedió en la clase anterior; con ello abre un espacio que permitió que los estudiantes expresaran sus ideas sobre la altura.

Profesora:	Estábamos trabajando el problema “determine la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad: dos de sus alturas son congruentes”... En la última clase, ¿de qué fue lo que nos dimos cuenta?... [Breve pausa pensando a quién dirigir la pregunta] ¿Esperanza?
Esperanza:	Que teníamos casi todos mal la definición de altura... porque decíamos que era el segmento que iba desde el vértice hasta el lado opuesto. Pero sobre ese segmento y no sobre la recta. [Se refiere a la localización del otro extremo de la altura]
Profesora:	¿Y por qué?
Esperanza:	Porque lo vimos en la calculadora que cuando se pierden las alturas...
Profesora:	¿Y en qué momento se pierden?
Esperanza:	[Trata de evocar] Cuando es obtusángulo.
Luís:	La altura es la medida [distancia] que hay desde un vértice hasta el segmento opuesto.
Profesora:	¡Ah! Eso es otra cosa. Tal vez ustedes fueron los únicos que me hablaron de medida, y otro grupo, que me habló de altura como la medida de un segmento. ¿Es correcta esa definición?
Varios :	[Algunos callados, otros murmuran “sí” y otros muy inseguros dicen “no”]
Profesora:	[Aclara] Es cierto que cuando estamos encontrando áreas de paralelogramos, de triángulos, hablamos de la altura y en ese momento la altura se refiere a la medida de un segmento. Desafortunadamente utilizamos la palabra altura para dos objetos relacionados, pero... muy distintos. Cuando estamos en el contexto de área, entonces, si decimos <i>altura</i> nos referimos a la medida de aquel segmento que es la altura.

Al tratar de resumir los resultados de la discusión de la clase anterior, Esperanza expresó cómo se modificó su definición personal del concepto *altura*. Parece que asumió una imagen conceptual distinta de esta a partir de la evidencia proporcionada por la geometría dinámica al expresar “lo vimos en la calculadora”. Sin embargo, persisten las definiciones fuera de contexto como la expresada por Luís en esta misma clase. Nuevamente, la profesora

aprovechó la situación para hacer una aclaración de cómo la palabra altura se utiliza en diferentes contextos.

En el siguiente protocolo se puede evidenciar cómo la herramienta de arrastre del *software* permite, por una parte, identificar inconsistencias en la formulación de una definición, y de otra, visualizar un espacio de ejemplos completo que puede llegar a ser evocado.

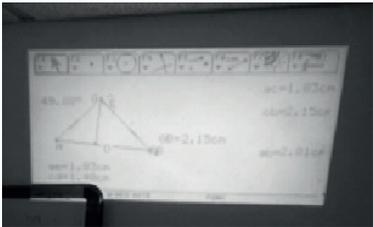
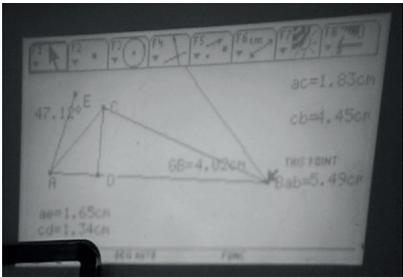
Profesora:	[Pide retomar la actividad y revisar lo que construyeron]	
Mercedes:	[Pasando a presentar su construcción. Determina el pie de las alturas correspondientes y toma las medidas de los lados, de las alturas y de un ángulo. Realiza el arrastre lentamente hasta llegar a una condición extrema]	
Profesora:	¿Y ahí qué pasa? [En ese momento, el triángulo es rectángulo]	
Mercedes:	Las alturas quedan sobre los lados del triángulo.	
Profesora:	Quedan sobre los lados del triángulo. [Asintiendo gestualmente] ¿Qué tipo de triángulo es?	
Mercedes:	Rectángulo. [Señalando la medida del ángulo]	
Profesora:	Es rectángulo, y quedan [las alturas] sobre los lados del triángulo. ¿Es incorrecta la definición que habían dado?	
Varios:	No. [Al unísono]	
Profesora:	No, no; ¿y después? [Indicando con ello qué ocurre si continúa el arrastre]	
Mercedes:	[Arrastrando, muestra que las alturas quedan por fuera del triángulo]	
Profesora:	Ahí es cuando a ustedes se les desaparecían. [Se dirige a los estudiantes que usaron una definición incorrecta para hacer la construcción de la altura]	
Mercedes:	Cuando el triángulo es obtusángulo. [Mostrando la medida del ángulo del triángulo]	

Figura 2

Figura 3

En lo referente a la ampliación del espacio de ejemplos, se aprovechó nuevamente la construcción para ilustrar cómo la posición de una altura depende del tipo de triángulo; es decir, considerando triángulos con las alturas que estén en el interior del mismo, que dos de ellas no lo estén o que dos de las alturas coincidan con dos de los lados del triángulo. Esta última no se consideró al discutir la definición pero sí resultó explícita en el entorno de geometría dinámica.

En las respuestas dadas al cuestionario

Además de indicar cuántos estudiantes dieron una respuesta u otra, a las preguntas del cuestionario (ver sección “Descripción del cuestionario” en este mismo artículo), se reportan las respuestas de algunos estudiantes a manera de ejemplo, ya que ilustran el tipo de respuestas que surgieron y se evidencian claramente tanto el espacio personal de ejemplos como la definición personal del concepto.

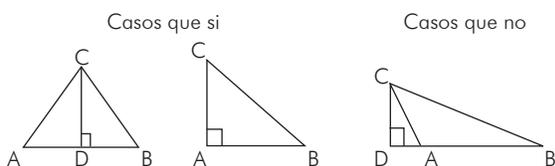
En la pregunta número 1, el 32 % de los estudiantes (8) dieron respuestas que evidencian la presencia de una definición completa, 8 % (2) de ellos dio una definición incompleta. Este hallazgo no debe sorprender ya que existen imágenes

conceptuales que se albergan en un error conceptual difícil de remover. Además, puede ocurrir que se dé la dificultad de incluir en la redacción de la definición personal del concepto todas las características de altura; por otro lado, puede existir un sesgo en la comprensión de la naturaleza del objeto, inducido por las representaciones figurales prototípicas que configuran una imagen conceptual en la cual la perpendicularidad no se hace explícita, o donde no se consideran casos de triángulos obtusángulos o rectángulos.

En cuanto a la pregunta número 2, resultó interesante que, a pesar de que no se solicitó hacer explícito el espacio personal de ejemplos, el 36 % (9) de los estudiantes realizó una representación que evidenciaba la presencia de un espacio personal de ejemplo completo, y el 56 % (14) de ellos dio un espacio personal de ejemplos incompleto que solo presentaba el caso de los triángulos acutángulos u obtusángulos.

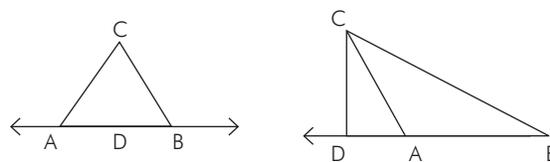
Teresa, para justificar que la altura de un triángulo es un segmento, dio la siguiente definición de altura: “Es un segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y un punto que pertenece a la recta que contiene al lado opuesto a dicho vértice, tal que ese segmento es perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto a dicho vértice”. Cuando respondió la pregunta acerca de si está entre y siendo la altura del $\triangle ABC$, ella presenta un análisis de casos donde AD representa la altura, dando evidencia de que su espacio personal de ejemplos es completo (figura 4).

Figura 4. Espacio personal de ejemplos para altura de triángulo dado por Teresa



En el caso de Claudia, su definición de altura es correcta pero su espacio de ejemplos es incompleto pues no considera el caso del triángulo rectángulo, como se puede evidenciar: “Por la definición de altura de un triángulo se tiene que: la altura de un triángulo es un SEGMENTO que va desde uno de los vértices del triángulo y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto. Así en el $\triangle ABC$ una de sus alturas es tal que $AD \perp AB$ y son colineales y es recto”.

Figura 5. Espacio personal de ejemplos para altura de triángulo dado por Claudia



Las respuestas a la pregunta 3 del cuestionario sorprenden porque once de los estudiantes presentan un espacio personal de ejemplos completo mientras que solo seis lo hicieron en la pregunta 2. Consideramos que pensar en propiedades de objetos geométricos en el entorno de geometría dinámica pudo influenciar el espacio personal de ejemplos, ya sea porque evocaron las actividades realizadas en ese entorno o porque el pensar dinámicamente hace que el estudiante cuestione su definición personal y que posiblemente la reevalúe. Esta situación se ve reflejada en las respuestas dadas por Lola a las preguntas 1 y 3, respectivamente. Para ella, pensar en poder “comprobar propiedades” le permitió reevaluar la definición personal dada como respuesta a la pregunta 1, donde había establecido que la altura es perpendicular al segmento opuesto al vértice del triángulo, y expresarla, en su respuesta a la pregunta 3, en términos de la perpendicularidad con respecto a la recta que contiene al segmento (tabla 3). De otra parte, también se evidenció que pensar en un ambiente de geometría dinámica la llevó a considerar otras posibilidades para la propiedad del segmento dado, tal como ser mediana o mediatriz.

Tabla 3. Respuestas de Lola

Estudiante	Lo que se puede decir (a)	Acciones (b)
Lola	Pues visualmente parece ser que , por lo tanto sería la altura del relativa al vértice . Además nótese que y son agudos y además se cumple , así que por la pregunta anterior (haciendo referencia a la pregunta 1 del cuestionario), (ver sección "Descripción del cuestionario" en este mismo artículo) se podría sospechar que es la altura del , pero habría que comprobarlo.	Pues podría ir a la opción "comprobar propiedades" y verificaría sí podría medir uno de los ángulos, bien sea o y si su medida es de 90 quiere decir que el ángulo es recto y por lo tanto . Además podría mirar si es punto medio de en cuyo caso sería mediatriz de. Pero si no es perpendicular a mas sin embargo si es punto medio de entonces sería la mediana.

Las respuestas a la pregunta 4 no ofrecieron mayor información para nuestro estudio. Consideramos que lo solicitado en esta pregunta no dio lugar a los elementos necesarios para poder establecer una relación entre la definición personal, la definición del concepto, la imagen conceptual y la representación figural de altura de un triángulo en un contexto de demostración donde este concepto era necesario. En las respuestas dadas por los estudiantes, solo uno de ellos (Jairo) hizo una aproximación al análisis de los posibles casos, aun cuando no eran del todo correctos; los restantes 24 estudiantes no consideraron sino el caso del triángulo isósceles acutángulo. La razón para que esto ocurra se encuentra no solo en la arraigada imagen conceptual de altura del triángulo sino esencialmente en la, no menos, enraizada imagen conceptual y representación figural de triángulo isósceles que hace corresponder a esta con la de un triángulo isósceles acutángulo.

Aquí la evidencia es contundente: en 96 % de los estudiantes se evidencia lo que Edwards y Ward (2004) denominan *concepto influenciado*. En este caso, la definición de *altura* se ve influenciada por la representación figural de triángulo isósceles e incluso por la de triángulo en general, lo que hace que el estudiante no pueda llegar a estructurar su definición personal del concepto articulándola al proceso de demostración. Una vez más, lo figural termina dominando a lo conceptual y solo se siente la necesidad de verificar la afirmación propuesta para un triángulo isósceles acutángulo, dejando de lado las otras dos posibilidades, donde la interestancia debería ser cuestionada. Difícilmente pueden establecerse implicaciones del uso de la geometría dinámica en el proceso de conceptualización con el uso del concepto para formular una justificación, si no se exige que el estudiante explicita todo el proceso de su argumentación. Nos cuestionamos si la modificación del problema para solicitar todos los pasos de la demostración y la elaboración de representaciones figurales cuando se requieran dentro del proceso, nos habría dado suficientes elementos de análisis para estudiar dicha relación. Esta situación puede ser objeto de estudios y análisis posteriores.

Conclusiones

En lo anterior, solo hemos presentado ejemplos destacables de lo que se evidencia en el análisis completo que se realizó en el trabajo de grado; las conclusiones que

presentamos a continuación se refieren a la totalidad de datos obtenidos en dicho análisis.

Sobre el espacio de ejemplos y el concepto influenciado

Las tareas propuestas en el curso Elementos de Geometría, particularmente las relacionadas con el proceso de construir definiciones, están diseñadas en dos referentes actualmente relevantes en el campo de investigación en didáctica de la geometría; primero, que el uso de la geometría dinámica permite hacer ostensiva la definición personal del concepto del estudiante y, segundo, que la actividad de definir puede desarrollarse de manera *constructiva* o *descriptiva* (de Villiers, 1998) de acuerdo con las intenciones didácticas específicas.

El uso de geometría dinámica contribuyó a que los estudiantes ampliaran su espacio personal de ejemplos aproximándolo al espacio convencional de ejemplos, cuando la tarea exigió el uso de la definición para desarrollar exploraciones o cuando se realizó una discusión de la definición misma. El uso de la geometría dinámica permitió presentar ejemplos y no-ejemplos de la altura, ya sea a partir de su definición o desde las propiedades de esta, lo que retroalimentó a su vez los espacios personales de ejemplos, ampliándolos y además acomodándolos a un nuevo nivel de comprensión. Ello contribuye al proceso de hacer más próxima la definición personal del concepto con la definición del concepto.

Los resultados de este estudio permitieron asimismo evidenciar claramente el fenómeno caracterizado por Edwards y Ward (2004) del concepto influenciado y la fuerza que tienen las representaciones figurales en la formación de un concepto. Nuestro análisis permite ver cómo el concepto *altura de un triángulo* puede estar influenciado por la imagen conceptual que se tiene de triángulo, la cual usualmente

está asociada con representaciones canónicas y prototípicas afines a un triángulo acutángulo. Con estas, el concepto *altura de triángulo* y la aceptación, comprensión y uso del mismo quedan restringidos a aquellas situaciones donde la altura tiene puntos en el interior del triángulo, e incluso, a que no sea clara la diferencia de esta con otros objetos geométricos como mediana o bisectriz.

El uso de geometría dinámica exige una serie de acciones deliberadas para que se logre un efecto significativo en el proceso de conceptualización en geometría. Es decir, el uso de la geometría dinámica por sí sola no va a incidir en el proceso de conceptualización de los objetos geométricos; es necesaria la acción del docente para aportar elementos conceptuales que ayuden a que las definiciones personales del concepto y las imágenes conceptuales del mismo se vayan aproximando a la definición del concepto. Entre las acciones que se evidencian en los registros en video de las clases y los protocolos de las mismas, se deben resaltar dos que a nuestro juicio fueron de vital importancia y que consideramos hacen que el uso del *software* apoye los procesos de construir, evaluar y utilizar las definiciones de los objetos geométricos. La primera es el diseño de actividades cuyo objetivo es llevar al estudiante, futuro docente, a examinar y hacer visible su imagen conceptual y definición personal de conceptos para que, a través del análisis y la discusión grupal, estas se modifiquen en pro de un acercamiento a la definición del concepto, máxime porque este estudiante será el agente que propiciará la construcción de esta en otros individuos. En segundo lugar, la actitud atenta de la docente quien aprovecha los instantes pertinentes de la clase para realizar acciones que hacen que el estudiante evoque las actividades realizadas en el ambiente de geometría dinámica, no solo como mecanismo para cuestionar las defini-

ciones personales del concepto sino para resaltar cómo incongruencias con la definición del concepto en los procesos de argumentación afectan los resultados.

Sobre la construcción de las definiciones

A partir del análisis de las respuestas y justificaciones expresadas por los estudiantes, encontramos evidencias de la ampliación del espacio personal de ejemplos del concepto *altura de triángulo* en casi todos los estudiantes. Creemos que ello tiene una relación con el conjunto de acciones desarrolladas a través del uso de la geometría dinámica, aun cuando solo contamos con tres registros en donde los estudiantes lo mencionan directamente. Encontramos también que la mayoría de los espacios de ejemplos categorizados como incompletos eran aquellos que excluían el caso del triángulo rectángulo, una dificultad que posiblemente está asociada a la necesidad de evidenciar la presencia figural de dos objetos, lado y altura, de manera independientemente. Es entonces aconsejable hacer énfasis en todas las posibles representaciones figurales de la altura de un triángulo.

Sobre la persistencia de los aspectos figurales

El uso de geometría dinámica durante actividades de conceptualización ayuda a que los aspectos figurales y conceptuales se armonicen en un todo coherente, y a que lo figural eventualmente quede subordinado a lo conceptual. Pero para que esto se logre, hay que aprovechar la naturaleza dinámica del *software*, pues es por medio de la herramienta “arrastre” que se pueden evidenciar las inconsistencias existentes respecto a la definición del concepto, ya que las propiedades que permanecen invariantes ante el arrastre conforman la definición. Sin embargo, a pesar de que los estudiantes vieron diferentes representaciones durante el arrastre, persistieron las representaciones prototípicas tanto en sus explicaciones como en la demostración. Para ellos, la altura de un triángulo isósceles, que puede a su vez ser mediana, es solamente aquella relativa a la base. No consideran que en algunos casos las alturas relativas a los lados congruentes pueden ser medianas. Ello indica que el dominio de los aspectos figurales es un fenómeno difícil de superar.

Las tareas implementadas por la docente para abordar la definición de *altura* tenían como objetivo desestabilizar al estudiante para obligarlo a repensar su concepto. A pesar de ello, los resultados recogidos a través del cuestionario muestran que es difícil modificar las definiciones personales del concepto y las imágenes conceptuales de los mismos. Esto se puede deber a que las experiencias previas de los estudiantes han llevado al arraigo, en ocasiones, de definiciones erradas o incompletas de los objetos geométricos así como de los contextos de uso de los mismos, como ocurre al referirse a la altura como un número. Lo anterior tiene una posible explicación la cual podría encontrarse en que, así como la adquisición de un concepto es un proceso mediado por las experiencias a través del tiempo con el objeto, la modificación o reificación lo es aún más. Por lo tanto, requiere de una mediación a largo plazo y de la posibilidad de ampliar

y enriquecer el campo de experiencias con el objeto. Una de las formas para hacer esto en geometría es precisamente mediante el uso de geometría dinámica.

Referencias bibliográficas

- Aya-Corredor, O.; Echeverry, A. y Samper, C. (2014). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*. Num 35. p.63-86.
- Barroso, R. (2000). El proceso de definir en matemáticas. Un caso: el triángulo. *Enseñanza de las Ciencias*, 2(18), 285-295.
- Calvo, C. (2001, mayo). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral* (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Barcelona.
- de Villiers, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14 (1), 11-18.
- de Villiers, M. (1998). ¿To Teach Definitions In Geometry Or Teach To Define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds), *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. 2 (pp 248-255). Stellenbosch.
- de Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *Mathematics Education, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 5 (35), 703–724.
- Edwards, B. y Ward, M. (2004). Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions. *American Mathematical Monthly* 111(5), 411-424.
- Fischbein, E (1993). La teoría de los conceptos figurales [Traducción de Victor Larios Osorios]. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Fou-Lai, L., y Kai-Lin, Y. (2002). Defining a rectangle under a social and practical setting by two seventh graders. *ZDM*, 1(34), 17-28.
- Furinghetti, F. y Paola, D. (2000). Definition as a teaching object: a preliminary study En T. Nakahara y M. Okayama (Eds.). *Proceedings of the 24th European Conference on Mathematical Education* 2 (pp 289-296). Hiroshima.
- Furinghetti, F. y Paola, D. (2002). Defining within a dynamic geometry environment: notes from the classroom. En Cockburn A. D., y Nardi E. (Eds.). *Proceedings of the 26th European Conference on Mathematical Education*. 2 (pp 392-399). Norwich. UK.
- Govender, R. y de Villiers, M. (2002). Constructive evaluation of definitions in a sketchpad context. Presentado en AMESA. Univ. Natal, Durban, South Africa.

- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En Giménez, J; Llinares, S.; Sánchez, M.V. (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (colección "Mathema" n° 8) (pp. 143-170). Granada: Comares
- Mariotti, M. (1997). Justifying and Proving in Geometry: the mediation of a microworld. Hejny M. y Novotna J. (Eds.) *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education*. (pp. 21-26). Prague
- Mariotti, M. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219-248.
- Moore, R. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 249-266.
- Perry, P., Camargo, L., Samper C. y Rojas C., (2006). *Actividad demostrativa en la formación del profesor de matemáticas*. Bogota: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.
- Poincaré, H. (1908/1997). *Sobre la ciencia y su método*. Barcelona: Biblioteca Universal del Círculo de Lectores.
- Samper, C., Perry, P., Camargo, L. y Ruiz, M. (2006). ¿Apoya Cabri la práctica de la justificación? *Epsilon*, 22(3), 395-410.
- Tall, D. (2002). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). New York: Kluwer Academic Publishers
- Vinner, S. (2002). The Role of Definitions in the Teaching and Learning. Mathematics. *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). New York: Kluwer Academic Publishers.
- Watson, A. y Mason, J. (2005). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.) *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 377-385). Norwich, UK.