La caja de polinomios y el método tradicional: dos alternativas didácticas para la enseñanza de la multiplicación y la división de polinomios

The Box of Polynomials and the Traditional Method: Two Didactic Alternatives for Teaching the Multiplication and Division of Polynomials

A caixa de polinômios e o método tradicional: duas alternativas didáticas para o ensino da multiplicação e divisão de polinômios

José Martín Villarroel Solís*
Natalia María Mazo Barrera**

* Magister en Enseñanza de las ciencias exactas y naturales, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín. Docente de aula SEM Medellín, I. E. María Cano. Medellín, Antioquia, Colombia.
martinvilla15@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3349-8592

** Especialista en aplicación de TIC para la enseñanza, Universidad de Santander. Docente de aula SEM Medellín, I. E. María Cano. Medellín, Antioquia, Colombia.
nataliamazobarrera91@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8629-1501

Resumen

Este artículo es la síntesis de una investigación realizada en 2017, en la I. E. María Cano de Medellín, cuyo objetivo fue comparar el nivel de aprendizaje que alcanzaron los estudiantes de grado octavo al estudiar multiplicación y división de polinomios bajo los principios de dos estrategias didácticas: 1) Caja de polinomios, fundamentada en la teoría de aprendizaje significativo de David Ausubel; 2) el método tradicional, que se fundamenta en los procesos de Explicar-Ejemplificar-Ejercitar, de ahora en adelante (EEE). Se tomaron cuatro grupos de grado octavo. En dos de ellos se trabajó con la estrategia didáctica *caja de polinomios*, fundamentando el trabajo en la teoría cognitiva propuesta por David Ausubel denominada *aprendizaje significativo*, y en los dos restantes se trabajó con la estrategia EEE. Finalmente, se contrastaron los resultados cualitativa y cuantitativamente. Los resultados evidencian que los promedios de notas de los grupos no varían con respecto a los promedios históricos; que la diferencia entre promedios es relativamente pequeña y que si bien las notas no presentan mejoría, la dispersión se reduce significativamente. Se concluye que la utilización de material didáctico en las aulas de clase no garantiza que los estudiantes alcancen el objetivo de aprendizaje, pero influye positivamente en aspectos relevantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tales como: organización, interés y motivación por el conocimiento, participación activa, interacción, entre otros.

Palabras clave

aprendizaje significativo; caja de polinomios; multiplicación y división de polinomios

Fecha de recepción: 04/07/2018
Fecha de aprobación: 16/07/2019

Abstract

This paper is the synthesis of a research conducted in 2017 at I. E Maria Cano of the city of Medellin, which aim was to compare the level of learning that reached the students of the eighth degree when studying multiplication and division of polynomials under the principals of two didactic strategies: 1. Box of polynomials based on the theory of David Ausubel; 2. The traditional method, which is based on the processes of Explaining - exemplify -exercise, henceforth (EEE). Four eighth grade groups were taken. In two of them we worked with the polynomial box teaching strategy, basing the work on the cognitive theory proposed by David Ausubel called significant learning, and in the remaining two we worked with the eee strategy. Finally, the results were checked qualitatively and quantitatively. The results show that the average scores of the groups do not vary with respect to the historical averages; that the difference between averages is relatively small and that although the notes do not show improvement, the dispersion is significantly reduced. It is concluded that the use of teaching material in classrooms does not guarantee that students reach the learning objective, but positively influences relevant aspects in the teaching-learning process, such as: organization, interest and motivation for knowledge, active participation, interaction, among others.

Keywords

meaningful learning; box of polinomyals; polinomyal multiplication and division

Resumo

Este artigo é a síntese de uma investigação realizada em 2017 na I.E. María Cano da cidade de Medellín, cujo objectivo foi comparar o nível de aprendizagem que atingiram os estudantes de grau oitavo ao estudar as operações de multiplicação e divisão de polinômios baixo os princípios de duas estratégias didáticas: 1. Caixa de polinômios, fundamentada na teoria de aprendizagem significativa de David Ausubel; 2. O método tradicional, que se fundamenta nos processos de Explicar-Ejemplificar-Ejercitar, de aquí em diante (EEE). Foram realizados quatro grupos da oitava série. Em dois deles, utilizamos a estratégia de ensino da caixa polinomial, baseando o trabalho na teoria cognitiva proposta por David Ausubel, denominada aprendizado significativo, e nos dois restantes, trabalhamos com a estratégia eee. Finalmente, os resultados foram verificados qualitativa e quantitativamente. Os resultados mostram que as pontuações médias dos grupos não variam em relação às médias históricas; que a diferença entre médias é relativamente pequena e que, embora as notas não apresentem melhora, a dispersão é significativamente reduzida. Conclui-se que o uso de material didático nas salas de aula não garante que os alunos atinjam o objetivo de aprendizagem, mas influencia positivamente aspectos relevantes no processo de ensino-aprendizagem, tais como: organização, interesse e motivação para o conhecimento; participação ativa, interação, entre outros.

Palavras-chave

aprendizagem significativa; caixa de polinômios; multiplicação e divisão de polinômios

Introducción y antecedentes

La didáctica de la matemática tiene como objeto delimitar y estudiar los fenómenos que se presentan durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático (Rico, Sierra y Castro, 2000). Demanda de sus profesionales, primero, identificar las diferentes situaciones que puedan catalogarse como un problema a resolver, en ese sentido encontramos un trabajo muy interesante de Acevedo y Del Valle (2016), quienes hacen un completo análisis y caracterización de los problemas que existen en el aprendizaje del algebra escolar; de esta manera se continua con la segunda parte, que es producir y/o utilizar herramientas para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje a partir de resultados de investigaciones, dado que

> se ha comprendido que el aprendizaje y la enseñanza de las ciencias no constituyen actividades sencillas, por lo que se requieren investigaciones sistemáticas en torno a los problemas que plantean y la construcción de un cuerpo coherente de conocimientos que fundamente los cambios necesarios, más allá de innovaciones puntuales y aisladas. (Gil y Vilches, 2013, p. 17).

Muchos profesores han documentado su trabajo, por lo que actualmente se cuenta con gran variedad de documentos que describen experiencias que se han aplicado para enseñar.

Los autores han implementado estrategias metodológicas en el aula, al adaptar una teoría de aprendizaje a las características de un material didáctico, similar al trabajo de Vinholi (2011), que utilizó la teoría de aprendizaje significativo de David Ausubel para enseñar conceptos de botánica en escuelas de Brasil. En el campo de la didáctica de las matemáticas se cuenta con algunos registros como el de Urbano (2011) y Valbuena et ál., (2015), quienes trabajaron enseñanza de las matemáticas por medio del computador en la escuela.

Las universidades que ofrecen carreras de formación de maestros, particularmente en el área de matemáticas, y aun las que no, cuentan con aulas-taller especializadas en la creación y experimentación de material didáctico para la enseñanza de los diferentes conceptos matemáticos. Esto, sumado a la dinámica de aprendizaje de los estudiantes contemporáneos, ha conllevado a que sea una necesidad utilizar herramientas didácticas para enseñar matemáticas en el aula.

La *caja de polinomios* es un material didáctico creado por Oscar Fernando Soto,[1] con el fin de brindar a los maestros de la región una alternativa didáctica para enseñar operaciones básicas con polinomios y factorización. Este material ha sido aplicado en diversos contextos educativos, experiencias que han quedado documentadas. Soto, Gómez y Mosquera (2005) dan a conocer a la comunidad académica el material didáctico que denominaron la *caja de polinomios*, a partir de un artículo publicado en la *Revista de la Escuela Regional de Matemáticas* (ERM). Soto, Lozano y Naranjo (2009) utilizaron este material para enseñar operaciones básicas con polinomios a personas en condición de discapacidad auditiva. Por su parte, Villarroel (2014) adaptó este material para generar una propuesta didáctica y así enseñar operaciones básicas y factorización de polinomios, al fundamentar teóricamente la propuesta de *caja polinomios* con la teoría cognitiva de *aprendizaje significativo* de David Ausubel. Este trabajo se convirtió finalmente en su tesis de maestría.

1 Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Nariño, especialista en computación para la docencia, Universidad Mariana; Magister en Modelos de Enseñanza Problémica, Universidad de Nariño. Profesor titular del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, director de la Biblioteca "Alberto Quijano" entre los años 2014 y 2017, rector del Liceo de la Universidad de Nariño. Conferencista invitado en diversos eventos nacionales e internacionales de matemáticas, educación matemática, asesor pedagógico de instituciones educativas del departamento de Nariño y creador de *La caja de polinomios*.

Hablar de aprendizaje significativo remite al trabajo de Marco Moreira, quien en el Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo expuso que las personas aprenden a partir de lo que ya saben, principio que originó, en su momento, la propuesta de Ausubel. Pero, además, incorpora a este principio la idea de abandonar la narrativa en el aula de clase, a lo que denominó *aprendizaje significativo crítico* (Moreira, 1997).

Teniendo en cuenta lo anterior, la intención de este trabajo es tomar los cuatro grupos de grado octavo; con dos de ellos aplicar la propuesta para la enseñanza de la multiplicación y la división de polinomios, que surge al asociar la propuesta de la *caja de polinomios* con la teoría cognitiva de *aprendizaje significativo* propuesta por David Ausubel, y de forma paralela, en los dos grupos restantes del mismo grado, trabajar con el método convencional con que generalmente se enseña, al que se ha denominado método EEE. Principalmente, se busca realizar análisis de los resultados obtenidos cuantitativa y cualitativamente; con el primero, se aplica algunos conceptos de estadística descriptiva, y en el segundo, se establece un cuadro que compara las características de aspectos que los maestros consideran fundamentales en el desarrollo de una clase. Con ello, se divulga la existencia del material didáctico y se dan a conocer sus características fundamentales, para proporcionar a los maestros la información que se requiere cuando se trata de elegir la herramienta didáctica para utilizar en el aula.

Marco teórico

Método EEE

Tradicionalmente, y por razones específicamente matemáticas, se trabajaron las operaciones con polinomios de manera similar como se trabajan las operaciones básicas con números reales, esto es, en el siguiente orden: multiplicación, luego división.

Multiplicación

Explicar: El proceso que se utilizó para trabajar esta operación consistió en discriminarla en tres casos:

1. Multiplicación de monomio por monomio:

   Se explicó que para multiplicar dos monomios se agotan los siguientes pasos en su orden:

- Se aplica ley de signos.
- Se multiplican coeficientes.
- Se multiplican partes literales.

   Ejemplificar: Considere los monomios $A = -2x^3y^4$ y $B = -4xy^3z$. Determinar AB.

$$AB = -2x^3y^4(-4xy^3z) = +8x^4y^7z$$

Nº 47 • Primer semestre de 2020 • pp. 71-92
ISSN 2665-3184 impreso• ISSN 2323-0126 Web
TED

De donde:

- El signo "+" se obtiene al aplicar la ley de signos entre el signo del monomio A y el signo del monomio B.
- El coeficiente "8" se obtiene al multiplicar los coeficientes 2 y 4.
- x^4 se obtiene al multiplicar x y x^3
- y^7 se obtiene al multiplicar y^3 con y^4
- El factor z pasa a formar parte del producto.

Ejercitar: Se propusieron ejercicios donde el nivel de complejidad incrementaba, iniciando por multiplicación de enteros, pasando a multiplicación de monomios con una sola letra en su parte litera, hasta llegar a multiplicación de monomios con coeficientes fraccionarios y parte literal con varias letras y exponentes literales.

2. Monomio por polinomio:

Explicar: Para multiplicar un monomio por un polinomio se procede a multiplicar el monomio por cada término del polinomio. Para ello, hay que aplicar varias veces la multiplicación de monomios.

Ejemplificar: Sean $A = 3a - 2b^2 + 5$ y $B = -2ab^3$. Determinar AB.

$$AB = -2ab^3(3a - 2b^2 + 5) = -2ab^3(3a) - 2ab^3(-2b^2) - 2ab^3(+5)$$
$$= -6a^2b^3 + 4ab^5 - 10ab^3$$

Ejercitar: Se propusieron ejercicios donde el nivel de complejidad incrementaba, iniciando por multiplicación de números por polinomios de dos términos, hasta llegar a multiplicación de monomios con coeficientes fraccionarios y partes literales con exponentes literales y polinomios con términos de similares características.

3. Polinomio por polinomio:

Explicación: Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada término de un polinomio por el otro polinomio, implica que se repite el caso anterior varias veces. Finalmente, se redicen términos semejantes si los hay.

Ejemplificación: Hallar AB si $A = 2a + 3b$ y $B = -5a - b$.

$$AB = (2a + 3b)(-5a - b) = 2a(-5a - b) + 3b(-5a - b)$$
$$= 2a(-5a) + 2a(-b) + 3b(-5a) + 3b(-b)$$
$$= -10a^2 - 2ab - 15ab - 3b^2 = -10a^2 - 17ab - 3b^2$$

Método alternativo

Se ubica uno de los polinomios una línea, y el otro polinomio en la línea inferior. Cada término del polinomio de la segunda línea se multiplica por cada término de la primera, simulando el proceso que se lleva a cabo en la multiplicación de números naturales.

Consideremos los polinomios $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ del ejemplo anterior.

$$\begin{array}{r} A = \ 2a + 3b \\ B = -5a - b \\ \hline -10a^2 - 15ab \\ -2ab - 3b^2 \\ \hline -10a^2 - 17ab - 3b^2 \end{array}$$

Ejercitar: Al igual que en los casos anteriores, se proponen ejercicios de menor a mayor nivel de complejidad.

División

Se trabajó esta operación en tres casos:

1. Monomio entre monomio:

   Explicar: Se explicó que para dividir dos monomios se procede de la siguiente manera, en su orden:

- Se aplica ley de signos.
- Se dividen coeficientes.
- Se dividen partes literales.

Ejemplificar: Considere los monomios $A = -8x^3y^4$ y $B = -4xy^3$. Determinar $\boldsymbol{A/B}$.

$$\frac{A}{B} = \frac{-8x^3y^4}{-4xy^3} = +2x^2y$$

De donde:

- El signo "+" se obtiene al aplicar la ley de signos.
- El coeficiente "2" se obtiene al dividir el coeficiente 8 entre el coeficiente 4.
- $\boldsymbol{x^2}$ se obtiene al dividir $\boldsymbol{x^3}$ entre $\boldsymbol{x}$.
- $\boldsymbol{y}$ se obtiene al dividir $\boldsymbol{y^4}$ entre $\boldsymbol{y^3}$.

Ejercitar: Se propusieron ejercicios donde el nivel de complejidad incrementaba, iniciando por división de enteros, pasando a división de monomios con una sola letra en su parte litera, hasta llegar a división de monomios con coeficientes fraccionarios y parte literal con varias letras y exponentes literales.

2. Polinomio entre monomio:

   Explicar: Se explicó que, para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término del polinomio, entre el monomio, aplicando el caso anterior.

Nº 47 • Primer semestre de 2020 • pp. 71-92
ISSN 2665-3184 impreso• ISSN 2323-0126 Web

Ejemplificar: Determinar P/M si $P = 5x^4 - 6x^3 + 4x^2$ y $M = -2x^2$.

$$\frac{P}{M} = \frac{5x^4 - 6x^3 + 4x^2}{-2x^2} = \frac{5x^4}{-2x^2} + \frac{-6x^3}{-2x^2} + \frac{+4x^2}{-2x^2} = -\frac{5}{2}x^2 + 3x - 2$$

Ejercitar: Se propusieron ejercicios a través de los cuales el nivel de complejidad incrementaba, iniciando por polinomios de dos términos entre número, hasta llegar a división de polinomios con coeficientes fraccionarios y partes literales con exponentes literales entre monomios con términos de similares características.

3. Polinomio entre polinomio:

Explicar: Para que la división se pueda llevar a cabo la condición inicial es que el grado del polinomio dividendo sea mayor o igual al grado del polinomio divisor. Si la condición se cumple, se realizan los siguientes pasos.

I. Se ordenan los polinomios dividendo y divisor en orden descendente, con respecto a una letra.
II. De ser necesario se completa la secuencia de exponentes en el polinomio dividendo.
III. Se divide el termino de mayor exponente del divisor, entre el término de mayor exponente del polinomio dividendo, el resultado será el primer término del cociente.
IV. Se multiplica el término calculado en III, por el divisor; el resultado se lo resta al dividendo.
V. Se repite el proceso desde el numeral III hasta que el grado del residuo sea menor que el grado del divisor.

Ejemplificar: Considere los polinomios $D = -10x + 4x^3 + 6$ y $d = 2x + 3$. Determinar D/d.

I. $D = 4x^3 + 0x^2 - 10x + 6$

II.
$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 0x^2 - 10x + 6 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

III.
$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 0x^2 - 10x + 6 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} -4x^3 - 6x^3 \quad\quad\quad\quad & 2x^2 \\ \cline{1-1} -6x^3 - 10x + 6 & \end{array}$$

IV.
$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 0x^2 - 10x + 6 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} -4x^3 - 6x^2 \quad\quad\quad\quad & 2x^2 - 3x \\ \cline{1-1} -6x^2 - 10x + 6 & \\ +6x^2 - 9x \quad\quad & \\ \cline{1-1} -19x + 6 & \end{array}$$

V.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & +0x^2 & -10x & +6 & 2x+3 \\
\cline{5-5}
-4x^3 & -6x^2 & & & 2x^2-3x \\
\cline{1-4}
 & -6x^2 & -10x & +6 & \\
 & +6x^2 & -9x & & \\
\cline{2-4}
 & & -19x & +6 & \\
 & & +19x & +\frac{51}{2} & \\
\cline{2-4}
 & & & \frac{63}{2} &
\end{array}
$$

Como el grado del residuo es menor que el grado del divisor, decimos que la división ha terminado.

Ejercitar: Se propusieron ejercicios donde el nivel de complejidad incrementaba, iniciando por polinomios en una sola variable, hasta llegar a división de polinomios con coeficientes fraccionarios y partes literales con exponentes literales.

Método caja de polinomios.

Escritura de polinomios en el tablero

Se trabaja con polinomios de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c\ en\ \mathbb{Z}$, es decir polinomios de segundo grado en una sola variable con coeficientes enteros. La escritura de polinomios se diferencia según la operación que se pretenda realizar en el tablero.

Los signos de los cuadrantes permiten representar los signos de los coeficientes, mientras que la cantidad de fichas dispuesta en el tablero representa justamente el valor absoluto del coeficiente y el área de la ficha representa la parte literal.

Escritura de polinomios para multiplicación

La forma general de los polinomios que se podrían multiplicar con la caja de polinomios sería $P(x) = ax + b$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números enteros.

Para ubicar un polinomio (factor) en el tablero, no se tienen en cuenta las áreas de las fichas, en este caso se tienen en cuenta las dimensiones de sus lados. Los lados de las fichas deben ubicarse sobre los ejes del tablero. Ejemplo: Para ubicar $P(x) = -2x + 1$, se escoge cualquiera de los ejes y se ubican dos fichas de lado "x" sobre el semieje negativo, y una ficha de lado "1" sobre el semieje positivo, garantizando que dos fichas continuas deben coincidir en la dimensión que las unen. Para ubicar el otro factor, se tiene en cuenta las dimensiones que quedan sobre el otro eje y se agregan las fichas necesarias para complementar el polinomio a representar. En las figuras 1 y 2 se muestran dos representaciones equivalentes de $P(x) = -2x + 1$ sobre el eje horizontal. Pero en la figura 1 está representado sobre el eje vertical $Q(x) = x - 1$, mientras que en la figura 2 está representado $Q(x) = 0$.

Nº 47 • Primer semestre de 2020 • pp. 71-92
ISSN 2665-3184 impreso• ISSN 2323-0126 Web

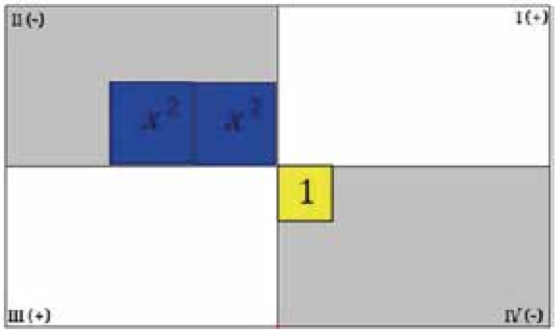

Figura 1. Representación equivalente.

Fuente: elaboración propia

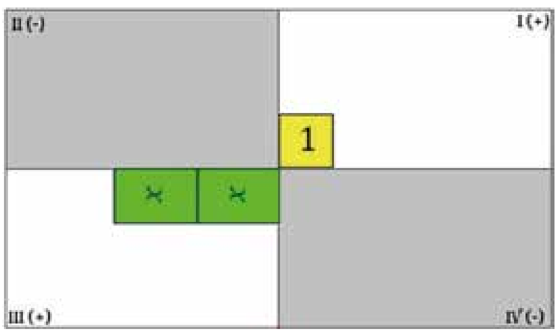

Figura 2. Representación equivalente.

Fuente: elaboración propia

Escritura de polinomios para división

La ubicación de las fichas para dividendo y divisor tiene en cuenta el signo que determina cada cuadrante del tablero, como el signo que adquiere la dimensión de una ficha que queda superpuesta sobre un semieje.

La división en la caja permite efectuar divisiones de polinomios de segundo grado entre polinomios de primer grado; para ello, se representa en el tablero solamente el polinomio dividendo, disponiendo las fichas en un rectángulo que tendrá por base al polinomio divisor, teniendo presente las condiciones para la ubicación de fichas.

Por ejemplo: Se pretende realizar la división

$$\frac{2x^2-x+3}{x-1}$$

Para efectuarse se ubicaría solamente el polinomio $2x^2 - x + 3$ como se muestra en la figura 3.

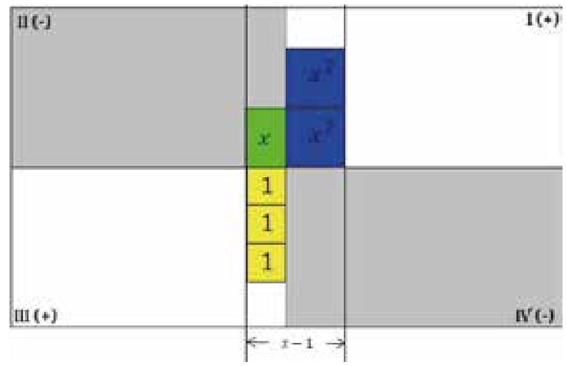

Figura 3. Ubicación para división

Fuente: elaboración propia

Observe que las fichas del polinomio dividendo se ubican dentro de unas líneas imaginarias que determinan la base del rectángulo, que justamente es el polinomio divisor. Además, las dimensiones horizontales de las fichas adquieren el signo del semieje sobre el cual están superpuestas, al igual que las áreas de ellas adquieren el signo del cuadrante en el cual están contenidas.

Ejecución de las operaciones

Ceros

Un concepto fundamental que se utilizará se denomina *cero*, que corresponde a la propiedad invertible de la adición de números reales. La caja de polinomios permite representar por medio de fichas esta propiedad de una manera muy fácil de entender, pues dos fichas de igual peso algebraico ubicadas en cuadrantes de signos opuestos son opuestas, por lo cual su suma será un cero.

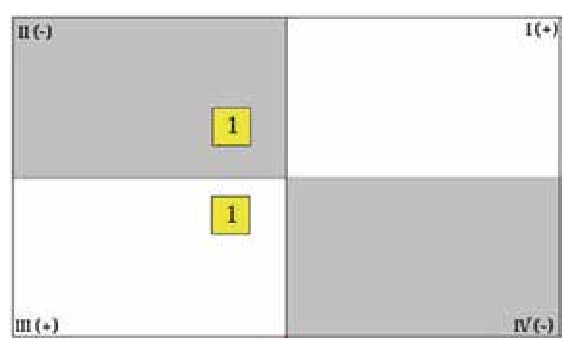

Figura 4. Ceros equivalentes.

Fuente: elaboración propia

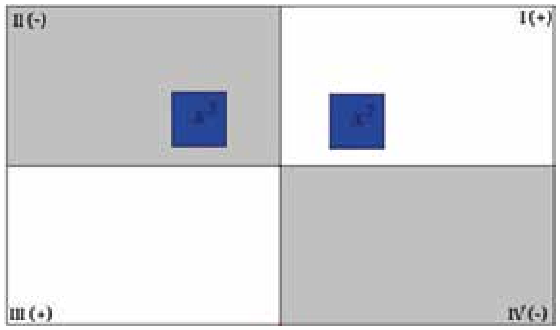

Figura 5. Ceros equivalentes.

Fuente: elaboración propia

Las figuras 4 y 5 muestran dos formas de representar un cero utilizando dos diferentes tipos de fichas. Observe que en todos los casos son dos fichas del mismo peso algebraico ubicadas en cuadrantes de signos opuestos.

Multiplicación

La multiplicación consiste en construir rectángulos cuya base sea la representación de uno de los polinomios que se multiplicarán, y la altura, el otro polinomio. Ya se explicó el proceso para ubicar los polinomios factores en el tablero; pues bien, hay que decir que la ubicación de los polinomios es el paso más importante para multiplicarlos, ya que después de ello simplemente hay que completar el rectángulo que queda determinado.

Ubicación correcta de las fichas

Partamos del siguiente ejemplo: Si se quiere ubicar $P(x) = -3x + 2$ para la operación de multiplicación, para ello se hace sobre el eje horizontal, entonces se tendrían las siguientes opciones:

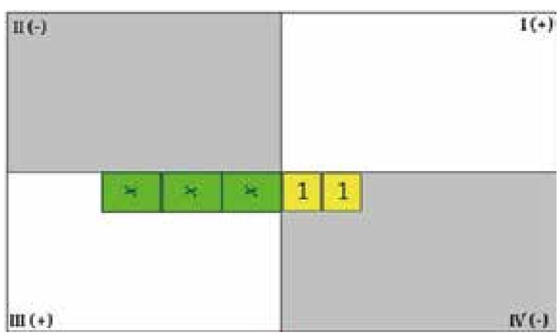

Figura 6. Representación 1 sobre eje horizontal.

Fuente: elaboración propia

Nº 47 • Primer semestre de 2020 • pp. 71-92
ISSN 2665-3184 impreso• ISSN 2323-0126 Web

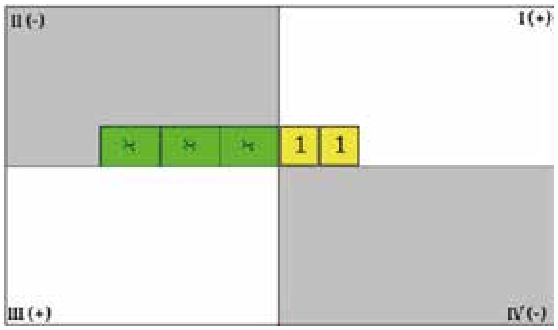

Figura 7. Representación 2 sobre eje horizontal.

Fuente: elaboración propia

En la figura 6, se representa a P sobre el eje horizontal de modo que sobre el eje vertical queda representado el polinomio $Q = -1$. Mientras que en la figura 7 está representado el polinomio P sobre el eje horizontal, pero sobre el eje vertical queda determinado el polinomio $Q = +1$.

Lo anterior es fundamental a la hora de ubicar los polinomios sobre los ejes porque la ubicación del primer polinomio es estratégica para la ubicación del segundo. La razón se ilustrará con el siguiente ejemplo: Ubicar los polinomios $P(x) = -x + 2$ y $Q(x) = 2x + 1$, para efectuar la multiplicación.

Primero, se representa a P en el eje horizontal, de las dos formas posibles.

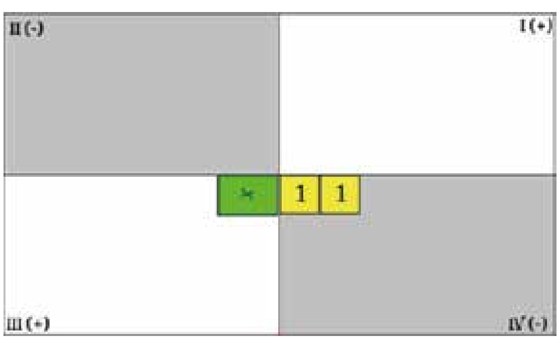

Figura 8. Ubicación para multiplicación.

Fuente: elaboración propia

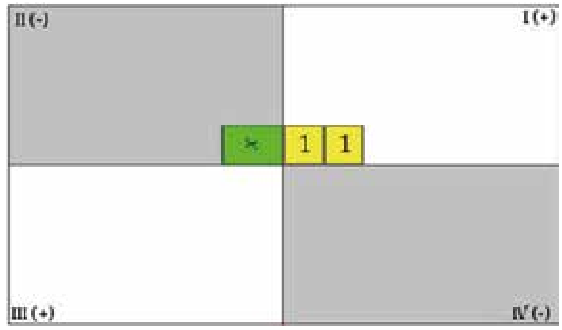

Figura 9. Ubicación para multiplicación.

Fuente: elaboración propia

La figura 8 muestra a P sobre el eje horizontal y al polinomio -1 sobre el vertical. Por su parte, la figura 9 muestra a P sobre el eje horizontal y al polinomio $+1$ sobre el eje vertical. Ahora bien, si se analiza el polinomio Q, se observa que su término independiente es positivo (+1), lo cual implica que su representación en el tablero deberá poseer fichas de dimensión 1, superpuestas sobre el eje positivo vertical, por lo cual, de las dos opciones para representar a P, la correcta es la que muestra la figura 9. A continuación se procede a ubicar a Q, de la siguiente manera.

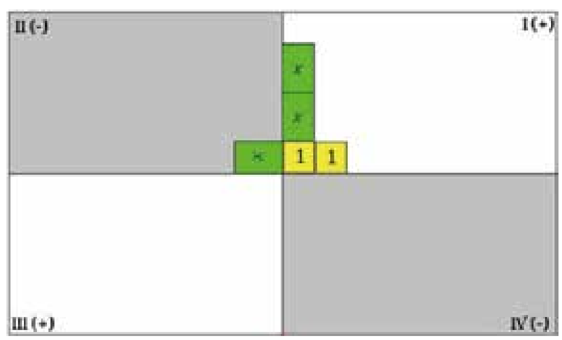

Figura 10. Ubicación polinomios factores

Fuente: elaboración propia

Construcción del rectángulo

Representados los polinomios, se procede a construir el rectángulo que queda determinado por los lados de las fichas que quedan en los cuatro. La prolongación de los segmentos que, definidos por cada ficha, determinan las fichas respectivas que conformarán el rectángulo. Retomando el anterior ejemplo se tiene:

Figura 11. Rectángulo que determinan los factores

Fuente: elaboración propia

La figura 11 muestra el rectángulo determinado por los extremos de las fichas y el tipo de ficha que tiene que colocarse en cada posición para completar el rectángulo.

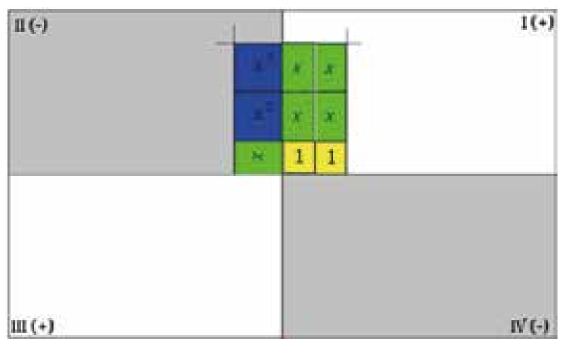

Figura 12. Rectángulo completo

Fuente: elaboración propia

Finalmente, se determinan todos los ceros, levantado las fichas del tablero y se hace lectura del polinomio que queda representado, que será el producto de los polinomios. Para el ejemplo que se está desarrollando, se tiene:

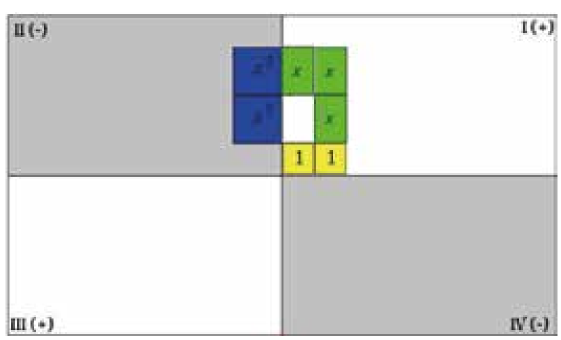

Figura 13. Resultado multiplicación

Fuente: elaboración propia

Nº 47 • Primer semestre de 2020 • pp. 71-92
ISSN 2665-3184 impreso• ISSN 2323-0126 Web
TED

Entonces:

$$P(x) * Q(x) = (-x + 2)(2x + 1) = -2x^2 + 3x + 2.$$

División

La división de polinomios consiste en completar el rectángulo cuya base es el divisor. El área del rectángulo corresponde, en algunos casos, al dividendo, a parte de él, y en otros, al dividendo más unas fichas que hay que aumentar.

Ejemplo: Efectuar la división $\frac{-6x^2+2x+1}{3x+2}$

Se representa el polinomio $-6x^2 + 2x + 1$, en una franja cuyo ancho sea $3x + 2$, intentando formar un rectángulo.

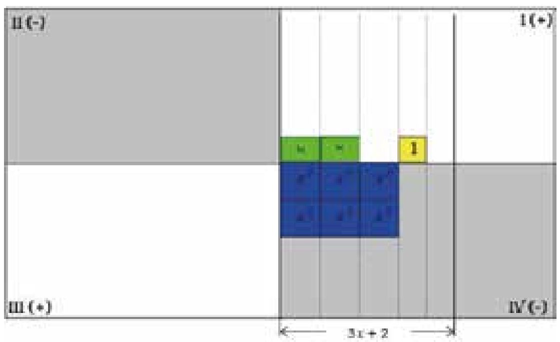

Figura 14. Ubicación dividendo

Fuente: elaboración propia

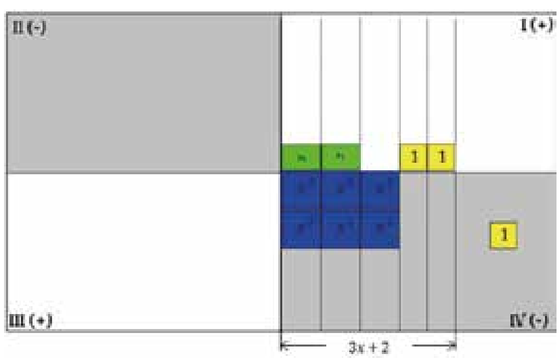

Figura 15. Ubicación de ceros y residuo

Fuente: elaboración propia

Como se observa en la figura 14, no se ha cubierto el ancho de la franja con las fichas del polinomio dividendo, pues falta cubrir un 1; para ello, se ubica una ficha 1al lado derecho de la ficha 1 que ya se encuentra ubicada, que al estar sobre el cuadrante I adquiere signo positivo, lo que implica que haya un -1 para el residuo inicialmente.

A continuación, se construye un rectángulo utilizando la menor cantidad de ceros, teniendo en cuenta que un cero formado por fichas x debe ser tal que las dos fichas (positiva y negativa) deben estar en el rectángulo. Lo cual no pasa necesariamente con los ceros formados con fichas 1, pues en algunos casos las dos fichas están en el rectángulo, pero en otros solo una de las dos con lo que la restante inmediatamente pasará a ser parte del residuo. En síntesis, las únicas fichas que pueden conformar el residuo de la división son las fichas 1.

La intersección de las fichas muestra el tipo de ficha que sebe ser puesta en algunas partes vacías del rectángulo, por ejemplo, en el cuarto cuadrante se deben colocar 4 fichas x, lo que implica que en el primer cuadrante se también se deben ubicar 4 fichas x para que se determinen los ceros. Al ubicar los ceros de fichas x, inmediatamente queda determinados dos espacios que corresponden a dos fichas 1, que por ubicarse en el primer cuadrante serán positivas lo que implica que se deben agregar dos fichas 1 negativas al residuo (véase figura 16).

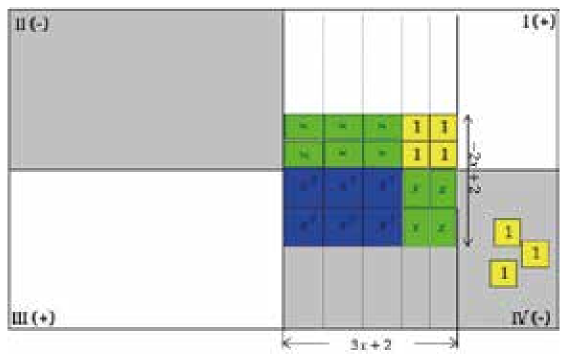

Figura 16. Rectángulo completo con ceros y residuo

Fuente: elaboración propia

Finalmente, se ha completado el rectángulo bajo todas las condiciones, obteniendo que la altura es el polinomio $-2x + 2$, que es el cociente de la división, además, se determinó el residuo -3. Es decir:

$$\frac{-6x^2 + 2x + 1}{3x + 2} = -2x + 2 + \frac{(-3)}{3x + 2}$$

Que es igual a:

$$-6x^2 + 2x + 1 = (-2x + 2)(3x + 2) - 3$$

Metodología

Caja de polinomios y aprendizaje significativo

Las fichas de la caja de polinomios corresponden a cuadrados y rectángulos, figuras que se identifican desde muy temprana edad. El área de cada ficha representa la parte literal de los diferentes términos de los polinomios. Ahora bien, al ubicar las diferentes fichas en el tablero, adquieren un signo, pues si se ubica una ficha en los cuadrantes I o III, la ficha representará un término con signo positivo; si se ubica en los cuadrantes II y IV, representará un término negativo. Los coeficientes de los términos se ven representados en la cantidad de unidades de cada ficha. Hay que precisar que la *caja de polinomios* permite la representación de términos con coeficientes enteros, con el fin de que se lleve a cabo un

Nº 47 • Primer semestre de 2020 • pp. 71-92
ISSN 2665-3184 impreso• ISSN 2323-0126 Web

proceso de abstracción que permita sumar o restar polinomios, con cualquier tipo de coeficiente, sin necesidad de utilizar la herramienta.

Subsumidores

Ausubel plantea que previo a trabajar el nuevo conocimiento, debe existir una etapa en la cual se trabajen los conocimientos requeridos, los cuales, como se mencionó anteriormente, se denominan *subsumidores* (Moreira, 1997). Para el caso de los procesos de multiplicación y división de polinomios con caja de polinomios serían: plano cartesiano, perímetro y área de rectángulos y cuadrados. En su teoría establece que los subsumidores de cada nuevo tema se deben trabajar de la manera más abstracta posible, buscando que quien aprende alcance un nivel máximo de apropiación del ellos, con el fin de poder utilizarlos y aplicarlos cuando se requiera, sin dificultad alguna (Moreira, 1997). Por ello, se trabajaron los subsumidores en dos sesiones de clase.

Subsunción

Se entiende por subsunción, el proceso mediante el cual la nueva información se ancla a un concepto ya establecido en la estructura cognitiva de quien está aprendiendo, para que finalmente se incorpore a ella (Moreira, 1997). En el trabajo con la *caja de polinomios*, los conceptos que Ausubel denomina ancla son: el concepto de área de cuadrados y rectángulos, suma de cantidades del mismo signo, de signos diferentes y opuestos.

Es importante mencionar que el proceso de subsunción es, finalmente, el objetivo de quien pretende enseñar, pero en cada caso esta se lleva a cabo de diferentes formas. En la experiencia con la *caja de polinomios* no fue diferente, pues se produjo en diferentes etapas que, vistas integralmente, dan como resultado que el estudiante aprendió los procesos de multiplicación y división polinomios, lo que se traduce en que el estudiante abstrajo e incorporó a su estructura cognitiva el proceso para multiplicar y dividir cualquier tipo de polinomios que se le presente, sin necesidad de representarlos o utilizar la caja de polinomios.

Trabajo en el aula

Los grupos considerados en el trabajo fueron 8.1, 8.2, 8.3 y 8.4 de la I. E. María Cano del municipio de Medellín (Antioquia); grupos que están asignados al mismo docente y por lo tanto es él quien ejecuta las dos propuestas didácticas en el aula y lleva a cabo todos los procesos de la investigación.

La elección de los grupos con los cuales se trabajó cada una de las metodologías se realizó aleatoriamente, quedando discriminados de la siguiente forma:

8.2 y 8.4 se denominarán grupos EEE.

8.1 y 8.3 se denominarán grupos CP.

Una vez los grupos CP conocen el funcionamiento de la caja de polinomios de forma adecuada, en el sentido que saben ubicar correctamente las fichas en los cuadrantes, representar cualquier término de diversas maneras, y en general, escribir cualquier polinomio de varias formas y hacer lectura correcta de un polinomio representado en el tablero, se procede a aplicar la guía de multiplicación y división de polinomios. Esta guía, se compone de una parte en la cual se explica el proceso para multiplicar y dividir polinomios, una segunda parte donde se propone una actividad para efectuar las operaciones con el material. Esta actividad busca, en primera instancia, desarrollar habilidad operacional para multiplicar y dividir polinomios utilizando la caja, en segunda instancia, inducir al estudiante, a partir de preguntas, a abstraer el método para multiplicar y dividir polinomios de manera formal, analizando lo que hizo con la herramienta.

Análisis y resultados

Caracterización de los grupos

Los grupos que se eligieron para aplicar esta metodología de trabajo se conforman por hombres y mujeres, cuyas edades oscilan entre los 12 y 17 años, lo que indica que están en el rango de edad adecuado para cursar el grado octavo en una institución educativa formal.

Ninguno de ellos tiene diagnóstico de problemas de aprendizaje o necesidades educativas especiales (NEE), así como tampoco discapacidades físicas que limiten el aprendizaje.

Grupos EEE

Los grupos 8.2 y 8.4 con quienes se trabajó la metodología EEE se conforman por 43 y 46 estudiantes respectivamente, entre hombres y mujeres, cada uno.

Grupos CP

Los grupos 8.1 y 8.3 están compuestos por 43 y 40 estudiantes respectivamente, entre hombres y mujeres. No hay presencia de estudiantes repitentes, y como aspecto diferenciador, es importante mencionar que son grupos en los que se facilita lograr concentrarlos y disponerlos para el trabajo. Un aspecto relevante de 8.3 es que la inasistencia ha sido un factor determinante que incide negativamente en el aprendizaje, pues el ausentismo por parte de varios estudiantes es muy alto. Por su parte, en 8.1, si bien hay inasistencia alta, se concentra en dos, máximo tres estudiantes, es decir, son esos tres estudiantes los que acumulan la mayor parte de inasistencias a las clases de matemáticas.

Análisis cuantitativo

Para realizar el análisis cuantitativo de la eficiencia que tuvo cada uno de los dos métodos, se aplicaron dos pruebas distintas.

Solución de ejercicios

Consistió en proponer 10 parejas de polinomios, con ellas plantear y resolver la multiplicación y división. Los polinomios propuestos van aumentando en nivel de complejidad, pues se inicia con polinomios cuyos términos tienen coeficiente entero y la parte literal compuesta por una sola letra, coeficientes fraccionarios, parte literal compuesta por dos o más letras con coeficientes enteros, y finalmente, términos con coeficientes fraccionarios y dos o más letras en la parte literal y exponentes literales. La escala evaluativa es la escala oficial de la institución, esto es, de 0 a 5 puntos. A cada ejercicio se le asignó igual valor numérico en cuanto a nota, siendo de 0.5 por ejercicio.

Exposición

Se asignó a cada estudiante una pareja de polinomios y en entrevista privada con el docente sustentaron el proceso de multiplicación y división, argumentando cada paso que aplicó. Este proceso se evaluó como correcto, si el estudiante explicó acertadamente los procesos, incorrecto en cualquier otro caso. Las siguientes tablas, con sus respectivos gráficos, muestran los resultados obtenidos por cada grupo, en cada una de las actividades evaluativas.

Solución de ejercicios

Tabla 1. Cantidad de ejercicios bien resueltos

Rango	8.1	8.2	8.3	8.4
0 a 5	11	14	10	12
6 a 7	20	15	17	23
8 a 9	7	10	7	6
10	5	4	6	5
Total	43	43	40	46

Fuente: elaboración propia

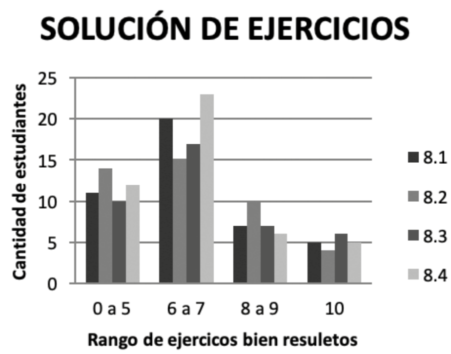

Figura 17. Ejercicios resueltos correctamente por grupo

Fuente: elaboración propia

Exposición

Tabla 2. Cantidad de estudiantes con sustentaciones correctas e incorrectas por grupo

Nota	8.1	8.2	8.3	8.4
Correcto	29	18	21	22
Incorrecto	14	25	19	24
Total	43	43	40	46

Fuente: elaboración propia

Tabla 3. Promedios y desviaciones estándar por grupo y metodología.

	8.1	8.2	8.3	8.4	CP	EEE
Promedio=	3,2	3,0	3,1	2,8	3,1	2,9
Estándar=	1,0	1,6	1,2	1,5	1,1	1,5

Fuente: elaboración propia

De la tabla 3 se observa que los promedios por grupos y por metodologías de trabajo no presentan diferencias significativas, lo cual implica que la efectividad de la metodología alternativa no se centra en incrementar el promedio de notas de un determinado grupo. Pero las desvicaciones estándar de cada grupo y de cada metodología si llevan a concluir que con la metodología alternativa se logra que la mayor parte de los estudiantes se acerquen, en cuanto a notas se refiere, a la media de notas del grupo, por su parte, la metodología tradicional genera mayor dispersión de notas, lo que significa que hay estudiantes que alcanzan notas muy altas, al tiempo que hay otra parte de los estudiantes con notas muy bajas.

Análisis cualitativo

El siguiente análisis, antes que ser un compilado de argumentos de diferentes autores, surge de la reflexión pedagógica y didáctica que se hizo después de haber finalizado la experiencia. Los años de servicio, los diferentes grupos a quienes se ha servido, el haber ofrecido en reiteradas ocasiones y de manera continua el curso de álgebra de grado octavo, el conocimiento que se ha ido adquiriendo, voluntaria o involuntariamente, entorno a los patrones de comportamiento de los estudiantes, permiten que los maestros identifiquen las características que debe tener una metodología de trabajo en cada uno de los grupos con los que se trabaja. Es innegable el hecho de que, si determinada metodología surtió efecto positivo con un grupo, no es garantía de que surta el mismo efecto con los demás. En consideración de lo expuesto, surge la necesidad de analizar características de la experiencia que quedan excluidas del análisis cuantitativo, pues hay muchos aspectos de alta relevancia dentro del aula de clase que los números no alcanzan a percibir; es por ello que se plantea un paralelo entre las dos metodologías, tratando de mostrar las fortalezas de cada una, en aspectos que se consideran fundamentales cuando se trata de elegir un método para enseñar. En la tabla 4 se hace una descripción de los aspectos que los docentes de la institución consideran más relevantes en la planeación y desarrollo de una clase.

Tabla 4. Tabla comparativa entre metodologías

Categoría	Grupo EEE	Grupo CP
Tiempo	Es fácilmente manipulable, pues dependiendo del grado de complejidad al que se quiera llegar, se puede predeterminar y discriminar con anticipación.	El tiempo está predeterminado, pero requiere destinar sesiones adicionales para explicar el manejo de la caja de polinomios.
Motivación	Se evidencian niveles muy bajos, con excepción de los estudiantes que sienten agrado por el trabajo en matemáticas.	El hecho de trabajar con material diferente a papel y lápiz, genera expectativas. Además, al estar fundamentada en un juego tradicional (rompecabezas), genera sensaciones de alegría.
Organización	Con este método se torna más sencillo controlar la organización de los grupos.	El orden inicial de la clase se ve sumamente alterado. Principalmente, en las primeras sesiones de trabajo.

Nº 47 • Primer semestre de 2020 • pp. 71-92
ISSN 2665-3184 impreso• ISSN 2323-0126 Web
TED

Interacción docente – estudiante	Es mucho más frecuente en la etapa de explicación, pues es en esta donde se abre el espacio para las dudas. Hay picos de interacción cuando el estudiante se enfrenta a los primeros ejercicios.	En ciertos momentos el proceso de interacción docente-estudiante se torna frecuente, sobre todo cuando se inicia el trabajo en fundamentación, y en la última parte de la guía, que es en donde el estudiante se enfrenta al proceso de abstracción; ocurre de igual manera cuando se enfrenta a los ejercicios para verificar si efectivamente alcanzó el objetivo del proceso.
Recursos	Son mínimos, pues son el trabajo en el tablero y el discurso del docente las principales herramientas para generar conocimiento; sin embargo, para efectos de esta investigación, se hizo el esfuerzo para entregar a cada estudiante el paquete completo de ejercicios que se trabajarían, con el fin de optimizar el tiempo.	Tablas de MDF, cartón paja, guillotina, tijeras, vinilos, marcadores. Fotocopias de las guías de aprendizaje, fotocopias de los ejercicios de verificación.
Satisfacción	Desde el punto de vista del aprendizaje, la mayoría de los estudiantes manifestaron estar satisfechos porque aprendieron e interiorizaron la técnica para multiplicar y dividir polinomios. Desde el punto de vista del goce y disfrute que produjo el trabajo con esta metodología, se encuentra que la gran mayoría manifiesta que el proceso no generó agrado porque "todo parece parte de un libreto", se explica, se muestran ejemplos y se proponen muchos ejercicios para afianzar lo que se entendió de la explicación. "Es muy aburrido", argumentan los estudiantes.	Desde el punto de vista del aprendizaje, los estudiantes manifiestan que es realmente complicado establecer una correlación entre los fundamentos de la caja de polinomios y los diferentes tipos de polinomios que se les puedan presentar para ser multiplicados o divididos, es decir, llevar a cabo el proceso de abstracción es muy complicado. Los estudiantes manifiestan que la experiencia de trabajar con la caja de polinomios fue agradable, porque nunca se llegaron a imaginar que temas del nivel de abstracción como estos pudiesen ser abordados con una herramienta que se fundamenta en un juego de disposición de rectángulos y cuadrados de varios colores.
Interacción estudiante-estudiante	Dado que se entregó material para cada estudiante, la interacción entre pares realmente fue mínima, además de que el docente sugirió que todas las preguntas que pudieran surgir después de la etapa de explicación se las realizaran directamente a él, con el fin de ser preciso en la solución de la inquietud.	A pesar de haber construido material para cada estudiante, estos interactuaron mucho entre pares, dada la emoción que genera el hecho de sentir que antes que estar aprendiendo, se está jugando. El juego es una actividad de tipo social, y dado que la herramienta se fundamenta en él, era previsible que el índice de interacción fuese muy alto.

Fuente: elaboración propia

Conclusiones

1. Utilizando la *caja de polinomios* se logra reducir la dispersión de las notas de los estudiantes, lo que significaría que la gran mayoría alcanzaría niveles similares de apropiación de la nueva información. Con el método tradicional, el promedio de notas es muy similar al que se obtiene con la *caja de polinomios*, pero el índice de dispersión es mucho más elevado, es decir,

algunos estudiantes obtienen notas muy altas, pero en contraste, algunos obtienen notas muy bajas, lo que llevaría a pensar que mientras algunos aprenden muy bien a multiplicar y dividir por medio de la exposición del docente, otra parte del grupo presenta muchas dificultades para aprender de esta forma.

2. Enseñar con metodología EEE puede lograr alcanzar niveles altos de conceptualización de la nueva información, porque en todo momento del proceso se podría trabajar de forma abstracta; pero requiere que quien aprende tenga un alto nivel de manejo de subsumidores propios de cada nuevo tema, pues finalmente son ellos los que ligan la nueva información con la que ya se tiene en la estructura cognitiva.
3. Trabajar con herramientas didácticas y garantizar un nivel alto de conceptualización requiere mucho más tiempo que trabajar con una metodología en la que la exposición magistral sea la forma de presentar la nueva información. La razón está en las limitaciones que pueden tener las herramientas en cuanto a la posibilidad de representar los objetos matemáticos que se están trabajando, frente a la posibilidad de escribir, mencionar y utilizar dichos objetos en cualquier momento cuando el método es la exposición magistral del docente.
4. Investigaciones realizadas en el campo de la educación matemática revelan que, en el proceso de enseñar y aprender matemáticas, por lo menos en la básica, hay variables que van más allá del dominio disciplinar que tenga el docente, de su adecuado discurso, de su capacidad para persuadir a sus estudiantes. Preparar una buena clase requiere, además de los componentes anteriores, idear más y mejores formas para propiciar relaciones entre pares, entre docente y estudiante, entre material y estudiante. Investigaciones como la de Briseño y Buendía (2014) soportan esta tesis, si bien no es el mismo tema matemático, las conclusiones que obtienen son similares:

> […] de forma que no solo es valioso lo que el estudiante plasma en un escrito, sino que además sus relaciones con el medio y con sus semejantes, sus formas de expresar y de proponer brindarán respuestas a algunos interrogantes de la investigación no observables en el discurso escolar cotidiano. (Briseño y Buendía, 2014, p. 128).

5. Este tipo de investigaciones demuestran que los métodos tradicionales que se utilizan en la escuela aún son productivos, que la exposición por parte del maestro surte efectos positivos en la escuela, pues vemos que el nivel de conceptualización que alcanza un estudiante que aprendió con metodología tradicional es muy similar al nivel que alcanza un estudiante que aprende por medio de herramientas didácticas. Sin mencionar que con metodología tradicional se puede llegar a niveles muy altos de abstracción y conceptualización en algunos estudiantes. Ahora, queda abierta la posibilidad

Nº 47 • Primer semestre de 2020 • pp. 71-92
ISSN 2665-3184 impreso• ISSN 2323-0126 Web
TED

de plantear nuevas investigaciones que apunten a descubrir la forma para lograr que ese número, aparentemente reducido de estudiantes que logran niveles altos con metodología tradicional, aumente significativamente.

6. La experimentación es un proceso que puede inducir a la generación de conocimiento en los estudiantes. Trabajar con material didáctico novedoso que genere expectativa, promueva y acepte el ensayo y error es una estrategia que se puede utilizar para enseñar matemáticas sin que se pierda el rigor. León (2017) concluye en la primera fase de su investigación que la tecnología aplicada en la enseñanza de las matemáticas juega un papel importante, porque permite que los estudiantes comprueben conjeturas, predigan y abstraigan.
7. La satisfacción, motivación y, en general, las emociones son componentes que generalmente no se tienen en cuenta cuando se elige una metodología de enseñanza, porque se cree que no hay correlación entre conocimiento y emocionalidad. Esta investigación revela que trabajar con didácticas que dinamicen las emociones de los estudiantes aporta en la adquisición de conocimiento y, por tanto, a que aumente considerablemente el número de estudiantes que alcanzan un nivel promedio (tesis propuestas y argumentadas por García, 2012 y Chadwick, 1999).

Referencias

Acevedo, N. y Del Valle, M. (2016). Algebra escolar: una revisión preliminar en cuanto a errores y dificultades. *Avances en matemática eductiva. Teorias y enfoques*, 3, 60-75.

Agudelo, O., Ortiz C. y Valbuena S. (2015). Desarrollo y evaluación de un material didáctico multimedia para facilitar el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Facultad de Ciencias B*ásicas. Universidad Nueva Granada, 11(1), 70-83.

Briceño, O. y Buendía, G. (2014). Una secuencia para la introducción de la función cuadrática a través de la resignificación de aspectos variacionales. *Tecné, Episteme y Didaxis:* TED, 39, 111-130.

Chadwick, C. (1999). La psicologia del aprendizaje desde el enfoque constructivista. *Revista Latinoamericana de Psicología, 31*(3), 463-475.

García, J. (2012). La educación emocional, su importancia en el proceso de aprendizaje. *Revista Educación, 36*(1), 1-24.

Gil, D. y Vilches, A. (2013). Investigación e innovación en la enseñanza de las ciencias. Necesidad de una mayor vinculación. *Tecné, Episteme y Didáxis:* TED, 34, 15-27. https://doi.org/10.17227/01213814.34ted15.27

Gómez, C., Mosquera S. y Soto F. (2005). La caja de polinomios. *Revista de Matemáticas Escuela Regional de Matemáticas, 13*(1), 83-97.

León, C. (2017). El pensamiento covariacional y GeoGebra: herramientas para la explicación científica de algunas realidades. *Tecné, Episteme y Didaxis:* TED, 42, 159-171.

Lozano J., Naranjo C., Soto F. (2009). Aprendizaje de álgebra en grupos con discapacidad auditiva utilizando la caja de polinomios. *Revista Sigma, 9*(1), 38-60.

Mallat, J. (2011). Didáctica: Concepto, objeto y finalidad. En N. Rajadell y F. Sepúlveda (Eds.), *Didácica General para Psicopedagogos* (pp. 1-31). Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Moreira, M. (1997). Aprendizaje significativo: un concepto subyacente. *Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo*, 19, 44.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Avances de investigación en educación matemática,* 1, 39-63.

Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2000). La Didáctica de la Matemática. En L. Rico y D. Madrid (Eds.), *Fundamentos didácticos de las áreas curriculares* (pp. 351-406). Madrid: Editorial Síntesis.

Urbano, M. (2011). Experiencias docentes. Experiencia didáctica lúdica basada en el computador para enseñanza de polinomios en segundo año de educación básica. *Pensamiento Matemático, 1*(1), 1-21.

Villarroel, J. (2014). *Propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el proceso de factorización de polinomios, con la herramienta didáctica la"caja de polinomios", en estudiantes de grado octavo de la I.E María Cano de Medellín* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Vinholi, J. (2011). Contribuições da Teoria da Aprendizagem Significativa para a aprendizagem de conceitos em Botânica. *Acta Scientiarum. Education, 33*(2), 281-288. 10.4025/actascieduc.v33i2.14355.

Para citar este artículo

Villarroel Solis, J. y Mazo Barrera, N. (2020). La caja de polinomios y el método tradicional: dos alternativas didácticas para la enseñanza de la multiplicación y la división de polinomios. *Tecné, Episteme y Didaxis*: TED, (47), 71-92. https://doi.org/10.17227/ted.num47-11481