El carácter algebraico en el conocimiento matemático de maestros en formación

- Algebraic Character in the Mathematics Knowledge in Prospective Elementary School Teachers
- O caráter algébrico no conhecimento matemático de professores em formação

Lilia P. Aké*

* Doctora en Didáctica de la Matemática, investigadora posdoctoral en la Maestría en Didáctica de las Matemáticas, Universidad Autónoma de Querétaro, Santiago de Querétaro, México.
lake86@gmail.com
Código Orcid: 0000-0003-4303-4895

Resumen

La integración del pensamiento algebraico en la escuela primaria es un tema de interés actual para la investigación en Didáctica de la Matemática. Sin embargo, esta integración demanda por parte de los maestros el desarrollo de un conocimiento que les permita construir una visión para reconocer tanto el carácter algebraico de las tareas matemáticas como promover el pensamiento algebraico en los niños. La presente investigación de tipo cualitativo analiza el carácter algebraico del conocimiento matemático de futuros maestros. Se utilizaron las propuestas teóricas sobre el conocimiento didáctico-matemático y los niveles de algebrización que permitieron, a partir de la aplicación de un cuestionario, describir y analizar los conocimientos manifestados por un grupo de cuarenta maestros de primaria en formación cuando resuelven tareas matemáticas, al poner de manifiesto en su resolución el carácter algebraico. Los resultados informan que los futuros docentes presentan dificultades para resolver tareas utilizando un conocimiento algebraico consolidado. Se concluye que es necesario proporcionar a los futuros maestros escenarios en donde experimenten procesos de desarrollo para el pensamiento algebraico relacionados con la generalización de las propiedades estructurales y relaciones funcionales que subyacen en las ideas matemáticas.

Palabras clave

educación primaria; formación docente; actividades matemáticas; generalización; álgebra

Abstract

The integration of algebraic thinking in elementary school is a current topic for the research in Didactics of Mathematics. However, this integration demands for the teachers the development of a knowledge that allows them to construct a vision to recognize the algebraic nature of mathematical tasks and promote algebraic thinking in elementary school children. This qualitative research analyzes the algebraic character of the mathematical knowledge of future teachers. We used theoretical proposals about didactic-mathematical knowledge and levels of algebraization that allowed, through the implementation of a questionnaire,

Fecha de recepción: 17/04/2019
Fecha de aprobación: 22/06/2019

CC BY NC

to describe and analyze manifested knowledge of 40 elementary school training teachers when they solve mathematical tasks, identifying in their resolution the algebraic character revealed. The results show that future teachers have difficulties solving tasks using a consolidated algebraic knowledge. We conclude that it is necessary to provide future primary teachers with scenarios where they experience development processes for algebraic thinking related to the generalization of structural properties and functional relations that underlie mathematical ideas.

Keywords

primary education; prospective teachers; mathematics activities; generalization; algebra

Resumo

A integração do pensamento algébrico no ensino fundamental é um tema atual para a pesquisa em Didática da Matemática. No entanto, essa integração exige que os professores desenvolvam um conhecimento que lhes permita construir uma visão para reconhecer a natureza algébrica das tarefas matemáticas e promover o pensamento algébrico em crianças do ensino fundamental. Esta pesquisa qualitativa analisa o caráter algébrico do conhecimento matemático de futuros professores. Foram utilizadas propostas teóricas sobre conhecimentos didático-matemático e níveis do raciocínio algébrico que permitiram, a partir de um questionário, descrever e analisar o conhecimento expresso por um grupo de 40 professores do ensino básico quando resolvem tarefas matemáticas, identificando em sua resolução o caráter algébrico. Os resultados mostram que os futuros professores têm dificuldades para resolver tarefas usando um conhecimento algébrico consolidado. Concluímos que é necessário fornecer aos futuros professores cenários nos quais eles experimentam processos de desenvolvimento para o pensamento algébrico relacionados ao processo de generalização de propriedades estruturais e relações funcionais que fundamentam as ideias matemáticas.

Palavras-chave

educação primária; formação de professores; atividades matemáticas; generalização; álgebra

Introducción

El álgebra es un área compleja para los estudiantes de la escuela secundaria. Las múltiples dificultades manifestadas en su aprendizaje se reportan en diversas investigaciones (Greenes y Rubenstein, 2008; Kieran et ál., 2016) en las que se señalan: a) errores sobre el significado de las letras; b) errores al resolver ecuaciones con variables en ambos lados del signo igual, que refleja una limitada interpretación del símbolo; c) la tendencia a aceptar solo valores numéricos como respuesta a un problema, que implica el rechazo a aceptar expresiones algebraicas como solución, y d) la tendencia de recurrir a la memorización de procedimientos por la falta de comprensión de los aspectos conceptuales.

Las dificultades y los errores que tienen la mayoría de los estudiantes con el álgebra motivan la incorporación del pensamiento algebraico en los distintos niveles de educación primaria (Kaput, 2000; Radford, 2015) e incluso existen pesquisas que sugieren esta introducción en preescolar (Castro et ál., 2017). Esta tendencia implica seguir varias líneas de cambios sobre lo que ya se sabe de la enseñanza y aprendizaje del álgebra: su naturaleza en los primeros grados, la práctica matemática de los niños, las tareas que permiten su desarrollo y la formación de profesores de primaria. Este último aspecto, cumple un papel esencial en el cambio de la actividad matemática que se gesta en las aulas debido a que el profesor es quien gestiona el desarrollo de determinado tipo de tareas en el salón de clase. Por esta razón se plantea, en el ámbito de la formación inicial de profesores de estos niveles educativos, la cuestión: ¿Qué conocimientos deben ser promovidos en los maestros para que puedan reconocer el carácter algebraico de las tareas matemáticas, y promover el pensamiento algebraico en los niños? Cuestiones como estas, referidas a los conocimientos del profesor, constituyen una problemática actual para la comunidad de investigadores en didáctica de la matemática. Avanzar en la determinación de una formación de maestros que les faculte para reconocer y promover el pensamiento algebraico en los niños es una necesidad, dadas las demandas curriculares actuales. Investigaciones referidas en este campo se justifican porque "la mayoría de los profesores de la escuela primaria tienen poca experiencia con los aspectos del pensamiento algebraico [...] [por lo que] se debe proveer formas apropiadas de apoyo profesional que produzcan cambios en las prácticas instruccionales" (Blanton y Kaput, 2005, p. 414). Considerando la existencia de relaciones significativas entre las competencias de los maestros y el desempeño de los niños, y la poca evidencia sistemática de los efectos en la formación en maestros de acciones instruccionales específicas (Aké et ál., 2014, Borko et ál., 2005; Jacobs et ál., 2007), este tipo de investigaciones es pertinente.

Para lograr que el maestro pueda desarrollar esta tarea compleja, es necesario formarlo para algebrizar su propia actividad matemática e incidir progresivamente en la algebrización de la actividad matemática de los niños. De esta manera, como parte de una investigación más amplia sobre la formación de profesores de primaria, el presente estudio reporta la exploración diagnóstica de algunos aspectos del conocimiento matemático que poseen los maestros de primaria en formación sobre el álgebra. Así, en el siguiente apartado se describen los elementos teóricos considerados para el diseño de un cuestionario y posterior análisis de la experiencia con los maestros. En el tercer apartado se desarrollan los elementos metodológicos considerados en el estudio, así como la delimitación de la muestra y la descripción de las tareas utilizadas. En el cuarto apartado se detallan y discuten los hallazgos encontrados. Se finaliza con algunas conclusiones e implicaciones para el profesorado de primaria.

Elementos teóricos

Dada la tendencia internacional de introducir formas de pensamiento algebraico en la escuela primaria, diversos investigadores se han centrado en estudiar el desarrollo de este tipo de pensamiento y se han apoyado en explorar aspectos estructurales, proporcionales, funcionales y de generalización, entre otras. Sin embargo, las investigaciones discrepan sobre cuáles son los rasgos característicos del álgebra que debieran considerarse para el desarrollo del pensamiento algebraico a lo largo del currículo escolar de primaria (Carraher y Schliemann, 2007). Además, manifiestan que "aún falta mucho por hacer en lo que respecta a la introducción del álgebra en la primaria, especialmente con respecto a la teorización de los aspectos algebraicos en el trabajo de los estudiantes" (Kieran et ál., 2016, p. 31). Como respuesta, desde el *enfoque ontosemiótico* (Godino et ál., 2007) se ha realizado una propuesta teórica para describir seis niveles de algebrización en la práctica matemática de índole algebraica. Los niveles contribuyen al desarrollo progresivo del pensamiento algebraico en los estudiantes (6-18 años), su conceptualización lo describe en tres tipos (Aké et ál., 2013): a) de objetos algebraicos, es decir, entidades que tienen un carácter de generalidad o de indeterminación; b) de tratamiento que se aplica a estos objetos algebraicos, en operaciones o transformaciones, basado en la aplicación de propiedades estructurales; c) de lenguaje o simbolización utilizado. De esta manera, la propuesta de los niveles de algebrización implica una visión ampliada que sugiere que "los objetos algebraicos inmersos en el pensamiento funcional y estructural, que pueden estar o no en un contexto de modelización, van adquiriendo un significado diferente conforme haya una 'evolución' en los procesos de generalización o indeterminación, simbolización y transformación" (Aké y Godino, 2018, p. 175). Dada la naturaleza del estudio que aquí se reporta con maestros de primaria se describen los cuatro primeros niveles de algebrización (Aké et ál., 2013; Aké y Godino, 2018):

- *Nivel 0 de algebrización.* En este nivel no hay objetos algebraicos pues se trabaja con números particulares, se usan las variables como números específicos y el significado operacional del signo igual en su acepción de resultado. Los objetos son representados de manera informal a través de formas tabulares, gráficas, icónicas, es decir, se recurre a representaciones diferentes al alfanumérico. Los procedimientos son aritméticos. En tareas de carácter estructural no se reconocen propiedades de las operaciones como la asociativa, conmutativa y otras. Por otro lado, en tareas de carácter funcional, se puede iniciar el trabajo con patrones, pero se determina solamente una regla recursiva.

Nº 49 • Primer semestre de 2021 • pp. 15- 34
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web
TED

- *Nivel 1 de algebrización*. Aquí, los objetos algebraicos conforman conjuntos o clases, se usa la variable en su significado de incógnita y se trabaja el significado relacional del signo igual, esto es, como equivalencia. A diferencia del nivel anterior, puede manifestarse el uso de símbolos más no de letras. Los procedimientos continúan siendo de carácter aritmético, pero emerge el trabajo con propiedades de la estructura algebraica en los naturales. En tareas de tipo estructural se identifican propiedades y relaciones, además se trabaja la equivalencia a través de *ecuaciones numéricas* enmarcadas en el pensamiento relacional. Para tareas de carácter funcional, se expresa una regla general.
- *Nivel 2 de algebrización*. Los objetos algebraicos son de la misma naturaleza que en el nivel previo, se utiliza la variable como incógnita y como número generalizado, además se trabaja con el significado de equivalencia del signo igual. En este nivel existe un cambio en las representaciones utilizadas, emerge la simbolización formal, es decir, de carácter alfanumérico y se aplican propiedades de la estructura algebraica en los naturales. En tareas de tipo estructural se comienzan a resolver ecuaciones de la forma $Ax+B=C$ o bien resolución de ecuaciones con cajones vacíos o símbolos, pero en esos casos no se opera con ellos en ambos lados de la ecuación. En el caso de las tareas de tipo funcional se obtiene una regla general en términos simbólicos literales.
- *Nivel 3 de algebrización*. En este se trabaja con las variables y se continúa utilizando el significado de equivalencia del signo igual. Los objetos siguen siendo representados de manera formal. La característica aquí es que se opera con las variables, por tanto, existe un tratamiento de ecuaciones y de funciones. En tareas estructurales se resuelven ecuaciones de la forma $Ax+B=Cx+D$, es decir, se opera con la literal en ambos lados de la ecuación. En el caso de las tareas con carácter funcional, se obtiene una regla general y se opera con las variables para obtener formas equivalentes de expresión.

La propuesta de niveles de algebrización indica que el nivel 0 implica la ausencia de carácter algebraico, mientras que los niveles 1 y 2 son considerados un acercamiento incipiente a formas de pensar algebraicamente, por lo que se denominan *protoalgebraicos*. El nivel 3 se enmarca en el álgebra propiamente. De esta manera, el grado de algebrización será proporcionado a partir de las manifestaciones externas observables que el maestro en formación realice durante la actividad matemática de resolución, considerando el carácter algebraico de esta.

Respecto al conocimiento del profesorado que enseña matemáticas, Godino (2009) propone un sistema de categorías de análisis que denomina *conocimiento didáctico-matemático* que se ha ido ampliando y consolidando hasta la propuesta actual de conocimiento y competencia didáctico-matemático del profesor (Godino et ál., 2017). En este modelo, el conocimiento del profesor se articula en tres dimensiones: la primera es el conocimiento del contenido matemático *per se* que constituyen los conocimientos, común (correspondiente al nivel en que se enseña) y ampliado (relativos a niveles superiores). En esta dimensión, el docente tiene que conocer las matemáticas escolares del nivel educativo donde imparte, pero también debe estar en la capacidad de articular esos conocimientos con los correspondientes a algunos niveles posteriores. La segunda dimensión es el conocimiento didáctico-matemático que articula seis facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, indicativos de un conocimiento especializado. La tercera dimensión es la metadidáctica-matemática, que refiere, entre otros aspectos, al conocimiento necesario para reflexionar sobre la propia práctica.

Para fines de nuestro estudio se incluyen consignas para explorar dos tipos de conocimientos de los futuros maestros, a saber:

- *Conocimiento común*. Requerido para resolver la tarea matemática correctamente. Las tareas propuestas a los maestros son resolubles en la escuela primaria.
- *Conocimiento ampliado*. Se requiere para conectar la resolución de la tarea con objetos matemáticos más avanzados. Estos conocimientos tienen un carácter relativo al currículo del nivel educativo, por lo que el tipo de conocimiento y las conexiones con objetos matemáticos más avanzados son dependientes de las diferentes etapas escolares.

Aspectos metodológicos

El estudio parte de una investigación más amplia, de tipo exploratorio y descriptivo, que reporta la aplicación de un cuestionario a un grupo de maestros de primaria en formación, a través del cual se propuso analizar e interpretar las soluciones llevadas a cabo por los futuros maestros al enfrentarse a tareas matemáticas de carácter algebraico.

Los participantes

La investigación se realizó con 40 maestros en formación en el contexto de un curso que pertenece a un programa de licenciatura para formar a maestros de educación primaria en México. Los futuros docentes cursaban el último año de la Licenciatura en Educación Primaria. La muestra se escogió de un muestreo no probabilístico (León y Montero, 2003), por tanto, la elección fue de tipo incidental, no aleatoria, ya que los futuros maestros participaron en tanto que estaban inscritos en el curso de formación referido.

Descripción y análisis previo de las tareas

Las seis tareas incluidas en el cuestionario son de respuesta abierta. Estas tareas fueron seleccionadas de las diferentes investigaciones referidas al álgebra en la escuela primaria, así como de los libros de texto. Para la selección y modificación de las tareas se tomaron en cuenta dos criterios: por un lado, el nivel de algebrización según su carácter potencial para promover el pensamiento algebraico

(Aké y Godino, 2018), y por otro, el tipo de conocimiento que puede manifestarse a través de la resolución (Aké et ál., 2014; Godino et ál., 2017). En las primeras cuatro tareas, la información sobre el conocimiento común busca caracterizar el nivel de algebrización de la actividad matemática expuesta. Las tareas 5 y 6 fueron incluidas en el cuestionario por sus contenidos situados, a nivel curricular, en la educación secundaria. Su resolución permitió caracterizar el conocimiento ampliado de los maestros en formación y el nivel de algebrización que podían alcanzar los futuros docentes al abordarlas. A continuación, se realiza la descripción y análisis previo de cada una de las tareas incluidas en el cuestionario; lo que facilitó la comparación de las soluciones esperadas con los hallazgos encontrados en las resoluciones de los futuros docentes.

La tarea 1 plantea la determinación de dígitos desconocidos representados por letras en una suma (figura 1).

Tarea 1

Observa la siguiente suma y determina el número que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.

$$\begin{array}{r} A\ B\ C \\ A\ B\ C \\ +\ A\ B\ C \\ \hline 2\ A\ C\ C \end{array}$$

Responde: ¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C? Explica.

Figura 1. Sumar con letras

Fuente: modificado de Ferrero et ál. (2007, p. 141).

La resolución de esta tarea implica hallar el valor de C, para ello se considera la condición que se establece en la primera columna, la de las unidades: $3C=C$, o $3C=10+C$; de la lectura de la segunda columna (la de las decenas) se obtiene que $C=5$. Para hallar el valor de B, se consideran los casos posibles $3B+1=20+C$ o $3B+1=30+C$. Se determina que $3B+1= 25$ cumple con las condiciones establecidas en la columna de las decenas, así $B=0$. Para hallar el valor de A se puede establecer: $3A+2=20+A$, de donde A es 9. También es apreciable que la tarea potencia el planteamiento de una ecuación que describe la condición general de la suma $3\ (100A+10B+C)=2000+100A+10C+C$, donde se utiliza un lenguaje simbólico-literal y el signo igual ($=$) en su acepción de equivalencia. Se pone de manifiesto la estructura y relaciones subyacentes de la suma por lo que el nivel de algebrización que implica es 2.

La tarea 2 corresponde al tipo de los problemas aritméticos verbales compuestos de estructura multiplicativa; no se requiere hacer cálculos con números particulares dado que no se proporcionan datos numéricos en el enunciado. Las alturas actúan como dos variables entre las cuales existe una relación cuantitativa (figura 2).

Tarea 2

Tomás es 4 veces más alto que María. María es 6 veces más baja que Lucía. Con esta información dibuja la altura de María, la altura de Tomás y la de Lucía, y establece las expresiones que relacionan dichas alturas.

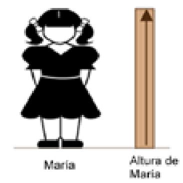

Figura 2. Comparar alturas

Fuente: modificado de Carraher et ál. (2000, p. 8).

A través de la solución es posible potenciar el concepto de *variable* y el planteamiento de dos relaciones funcionales donde las alturas son variables que podrían ser analizadas a través del uso de tablas. El nivel de algebrización que potencia la tarea es de un nivel 2, se expresa la relación entre las alturas, en la que la altura de María puede tomar un conjunto de valores y dependiendo del valor proporcionado se obtendrán los valores de las alturas de Tomás y Lucía. El establecimiento de las relaciones potencia un lenguaje simbólico-literal y el signo igual (=) indica una relación funcional.

La tarea 3 se sitúa en una perspectiva funcional para el desarrollo del pensamiento algebraico, en contraste con el enfoque más tradicional que se centra en el álgebra como la manipulación simbólica (figura 3).

Tarea 3

Una compañía fabrica barras de colores uniendo cubos en una fila. La compañía usa una máquina para etiquetar y poner pegatinas de caritas sonrientes en las barras. La máquina coloca exactamente una pegatina en cada cara. Por ejemplo, una barra de longitud 2 (dos cubos) necesitaría 10 pegatinas. Responde: ¿Cuántas pegatinas se necesitarían para una barra de: 3 cubos; 4 cubos; 5 cubos; 10 cubos? Con esta información determina ¿cuál es la regla para seguir para hallar el número de pegatinas para una barra de longitud cualquiera?

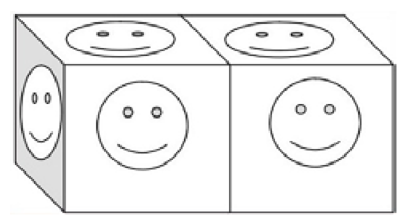

Figura 3. Generalizar con cubos adosados

Fuente: modificado de Moss y Beatty (2006, p. 461).

El maestro en formación tiene que identificar patrones, encontrar la regularidad subyacente y expresarla como una función explícita a través de un proceso de generalización. El nivel de algebrización que se puede alcanzar al resolver la tarea sería 1, si la regla se expresa en un lenguaje verbal, y de un nivel 2, si establece la relación $f(n)=4n+2$, esta última es la respuesta esperada. La actividad demanda observar el comportamiento de unos casos particulares (los suficientes) para luego expresar en términos generales una regla que describa tal comportamiento. Se potencia el uso del signo igual (=) para designar una relación funcional; además, se transita de un lenguaje numérico-aritmético para luego expresar la regla en un lenguaje simbólico-literal.

La tarea 4 planteada en el cuestionario se sitúa en los problemas aritméticos verbales simples de estructura multiplicativa sin la presencia de datos numéricos. Pone de manifiesto el uso de las letras como variables en un determinado contexto. Se tiene que identificar la relación existente entre el número de estudiantes y el número de profesores como una relación de dependencia (figura 4).

Tarea 4
Escribe una ecuación usando las variables *S* y *P* para representar lo siguiente: en una Universidad hay seis veces más estudiantes que profesores. Usa *S* para el número de estudiantes y *P* para el número de profesores.

Figura 4. Comparar cantidades

Fuente: modificado de Rosnik (1981, p. 418).

La solución a esta tarea implica un análisis similar al de la tarea 2; se define a las letras como variables: *S*= número de estudiantes y sea *P*= número de profesores; la expresión que resulta es *S*=6*P*, o bien establecerlo de la siguiente manera: $P = \frac{1}{6}S$. Se plantea relación de dependencia en un lenguaje simbólico-literal en donde el signo igual (=) indica una relación funcional. Esta solución de la tarea implica un nivel 2 de algebrización.

Las tareas 5 y 6 fueron elegidas para el cuestionario porque incluyen temas más avanzados respecto al currículum de primaria. La tarea 5 se eligió para indagar el conocimiento ampliado de los maestros en formación sobre modelización algebraica (figura 5). La solución de esta tarea conlleva al planteamiento y designación de literales para expresar las dimensiones de la hoja, por ejemplo: $L\ y\ \frac{L}{2}$ para el largo y ancho de la hoja respectivamente. Así, el área de la superficie de impresión está dada por la expresión: $(L-4)\left(\frac{L}{2}-5\right) = 300\ cm^2$; se trata de una ecuación de segundo grado L^2-14L-560 cm^2 =0 La letra *L* funge como incógnita.

Tarea 5
Una editorial necesita cortar hojas rectangulares, cuyo ancho es la mitad de su largo, para imprimir en cada página una superficie de 300 cm^2. Si los márgenes son de 2 cm arriba y abajo y 2,5 cm en cada lado, determina ¿cuáles son las dimensiones de la hoja?

Figura 5. Modelizar dimensiones

Fuente: modificado de Cerdán (2007, p. 309).

Se ponen en juego conceptos como *ecuación cuadrática* para modelizar las condiciones de la tarea, ecuaciones equivalentes al aplicar procedimientos de transformación a través de operaciones elementales. Lo previo implica una reducción de términos semejantes en donde se utilizan símbolos literales para operar con ellos de manera analítica sin referir a la información del contexto. De esta manera, la solución puede implicar un nivel 3 de algebrización.

En el caso de la tarea 6 (figura 6), aunque es posible resolverla mediante relaciones numéricas, lo que se espera es que el futuro docente plantee las literales para que emerja así el concepto de *incógnita*.

Tarea 6
Analiza la siguiente situación y responde:
588 pasajeros deberán viajar de una ciudad a otra. Dos trenes están disponibles. Un tren se compone solo de vagones de 12 asientos, y el otro solo de vagones de 16 asientos. Suponiendo que el tren con vagones de 16 asientos tendrá 8 vagones más que el otro tren, determina ¿cuántos vagones se adjuntarán a las locomotoras de cada tren para que los 588 pasajeros puedan viajar?

Figura 6. Calcular el número de vagones

Fuente: modificado de Bernardz et ál. (2001, p. 67).

El concepto de ecuación surge con el planteamiento de $12x+16y=588$ que indica la relación entre la cantidad de asientos de los vagones con el número total de pasajeros. De esta manera la solución a este problema implica operar de manera simbólica con las cantidades indeterminadas. Así, se está frente a un nivel 3 de algebrización.

En la tabla 1 se recogen las características de las tareas previamente descritas.

Tabla 1. Características de las tareas

Tarea	Conocimiento	Nivel de algebrización
1. Sumar con letras	Común	2
2. Comparar alturas	Común	2
3. Generalizar con cubos adosados	Común	2
4. Comparar cantidades	Común	2
5. Modelizar dimensiones	Ampliado	3
6. Calcular el número de vagones	Ampliado	3

Fuente: elaboración propia.

Resultados y discusión

En este apartado se organizan los resultados con la lógica siguiente: se analiza el tipo de conocimiento involucrado, en donde se detallan los resultados sobre el conocimiento común y avanzado, y se hace énfasis en el carácter algebraico a través del nivel de algebrización manifestado por los maestros en formación.

El carácter algebraico en el conocimiento común

Para el análisis de los resultados se ha usado un sistema de codificación definido por las variables *grado de corrección* (GC) y *elementos matemáticos predominantes* (EMP). Estos elementos matemáticos predominantes permitieron identificar a los maestros en formación que utilizan álgebra en sus soluciones, cuyo carácter algebraico está definido por el nivel de algebrización que alcanza.

Para el caso de la tarea 1, en la tabla 2 se indica que 30 maestros en formación resolvieron la tarea de forma satisfactoria; un profesor proporcionó una respuesta parcialmente correcta al determinar algunos de los valores de las literales, pero no concluye la tarea; cuatro proporcionan dígitos incorrectos para las literales. El grado de corrección de la tarea junto con las formas de solución se muestran en la tabla 2.

Nº 49 • Primer semestre de 2021 • pp. 15- 34
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web
TED

Tabla 2. Grado de corrección y método de solución de la tarea 1

Grado de corrección	Frecuencia	EMP	Frecuencia
Correcta	30	Algebraico	2
Parcialmente correcta	1	Aritmético	14
Incorrecta	4	Ensayo y error	18
No contesta	6	No contesta	6
Total	40	Total	40

Fuente: elaboración propia.

También se indica que dos de los maestros en formación utilizan álgebra en la tarea, de los cuales ninguno alcanzó un nivel de algebrización por presentar inconsistencias en la solución. Como ejemplo, en la figura 7 se muestra la resolución del maestro en formación E02, en su trabajo matemático se identifica el uso de propiedades de los números reales. Como procedimientos el futuro maestro plantea una relación entre las incógnitas, que deja a la letra *B* como parámetro. El establecimiento de esta relación se justifica en términos de lo que observa en la suma $B+B+B=C$, ($C=3B$) y atiende al conteo de las letras *A*, *B* y *C*. Se considera al signo igual en su acepción de resultado e interpreta la expresión algebraica $2ACC$ como una concatenación de caracteres, luego considera que concatenar es equivalente a sumar (plantea $2ACC=2A+C+C$).

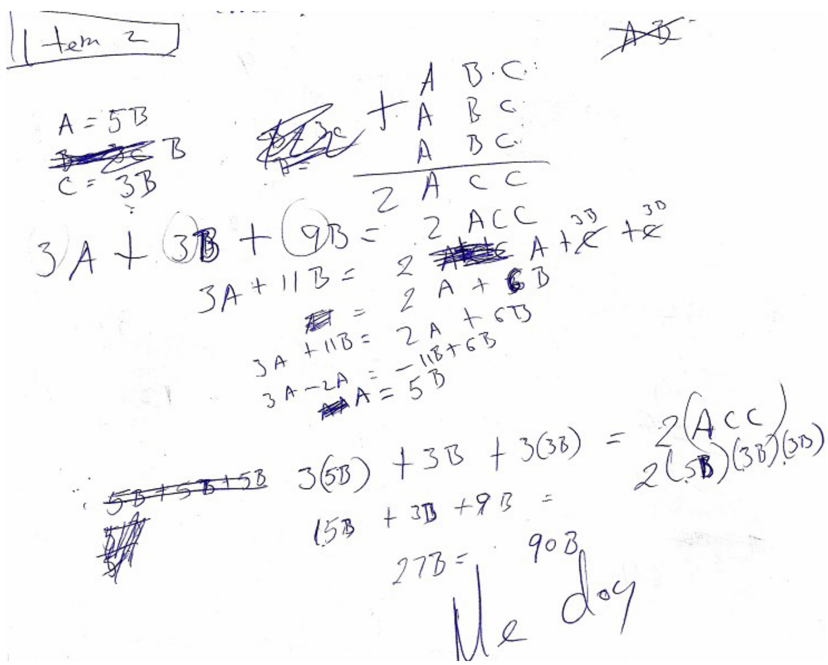

Figura 7. Resolución de la tarea 1 por el maestro en formación E02

Fuente: datos de la investigación.

La actividad expuesta por el futuro maestro pone de manifiesto objetos algebraicos; sin embargo, aunque sigue un procedimiento basado en las relaciones entre A, *B* y *C* que observa en la suma, no los percibe como dígitos de un número. Intenta operar con las letras y realizar transformaciones en ambos lados del signo igual (=), pero pasa por alto la estructura matemática que soporta al sistema posicional, lo que le lleva a que la ecuación que plantea no cumpla con las condiciones de la tarea. Lo previo también ocasiona que las simplificaciones que realiza no se correspondan a las condiciones que establece la suma. Aunque la tarea, según su análisis previo favorece un nivel 2 de algebrización para el conocimiento común, el nivel de algebrización de la actividad matemática que evidencia el futuro maestro es cero, no hay carácter algebraico, dado que la manipulación simbólica realizada carece de sentido.

En el caso de la tarea 2, el grado de corrección indica que 24 de los estudiantes para maestro establecieron la relación entre las alturas. Sin embargo, solo 2 resolvieron la tarea de manera satisfactoria estableciendo la relación adecuada considerando alguna unidad de medida. 10 futuros maestros no consideraron una unidad de medida y establecieron de manera errónea la relación entre las alturas (tabla 3).

Tabla 3. Grado de corrección y método de solución de la tarea 2

Grado de corrección	Frecuencia	EMP	Frecuencia
Correcta	2	Gráfico-algebraico	26
Parcialmente correcta	22	Icónico-algebraico	5
Incorrecta	10	Aritmético	3
No responde	6	No responde	6
Total	40	Total	40

Fuente: elaboración propia.

Cabe destacar que entre las formas que los futuros maestros usaron para dar solución a las tareas, 26 utilizaron una gráfica para señalar la relación entre las alturas, es decir, recurrieron a barras o rectas para determinar la relación con letras; 5 establecieron la relación entre las alturas mediante dibujos. Aunque 31 utilizaban las letras para determinar las relaciones entre las alturas, dichas relaciones no se correspondían con el planteamiento de la tarea; así, generaron expresiones erróneas como $M=4T$ (maestro en formación E11). De estas manifestaciones de índole algebraica, solo 2 soluciones alcanzaron un nivel 2 de algebrización, nivel que la tarea promovía. Como ejemplo, en la figura 8 se muestra la resolución del maestro en formación E30.

Nº 49 • Primer semestre de 2021 • pp. 15- 34
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web
TED

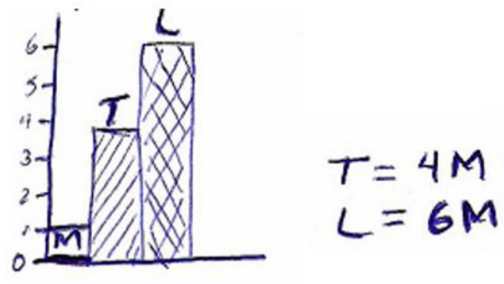

Figura 8. Resolución completa de la tarea 2 por el maestro en formación E30

Fuente: datos de la investigación.

El estudiante para maestro trabaja una representación gráfica de barras para establecer las diferencias entre las alturas; considera a la altura de María como un valor determinado pero genérico y la utiliza como unidad de medida. Intervienen tres datos: las alturas de María, Tomás y Lucía. Tomás y María actúan como dos variables entre las cuales existe una relación cualitativa "cuatro veces más alto que"; a su vez María y Lucía también actúan como variables entre las cuales existe una relación cualitativa "seis veces más baja que". Utiliza las letras *M*, *L*, *T* como indicadores o etiquetas para identificar las alturas correspondientes a María, Lucía y Tomás. En las expresiones $T=4M$; $L=6M$, el signo igual expresa una relación de dependencia entre las variables *T* y *L* con respecto a *M*.

En la tarea 3, 18 maestros la resolvieron de manera correcta al establecer la regla que describe la relación entre el número de cubos y las pegatinas de forma general, incluso si es expresado verbalmente. 11 respuestas son parcialmente correctas al no expresar la regla general que relaciona el número de caras con el de pegatinas, se quedaron en el plano de los casos particulares. 10 maestros en formación plantearon incorrectamente la relación entre los cubos y las pegatinas (tabla 4).

Tabla 4. Grado de corrección y método de solución de la tarea 3

Grado de corrección	Frecuencia	EMP	Frecuencia
Correcta	18	Icónico-numérico-verbal	37
Parcialmente correcta	11	Numérico-verbal	2
Incorrecta	10		
No responde	1	No responde	1
Total	40	Total	40

Fuente: elaboración propia.

En la tabla 4 también se recogen los elementos matemáticos predominantes utilizados por el maestro en formación para dar su respuesta. Se indica que 37 participantes usan un método icónico al pintar dibujos de cubos para identificar la variación numérica de las pegatinas respecto a los cubos, una minoría utilizó la regla de tres para encontrar la relación entre los cubos y las pegatinas, esto proporcionó respuestas incorrectas. Pese a que la tarea planteada permite acceder a un nivel 2 de algebrización, no se manifestó el uso del simbolismo para articular una regla general ($f(n)=4n+2$), pero sí se alcanzó un primer nivel al articular una expresión general de manera verbal. En la figura 9 se muestra la solución del maestro en formación E21, uno de los 18 participantes que articularon una regla de manera verbal de forma correcta, lo que implica un nivel 1 de algebrización.

El futuro maestro específica: "De acuerdo con el número de cubos, se multiplica por 4 y suma 2. Se va sumando cuatro pegatinas más conforme se agrega un cubo" (maestro en formación E21).

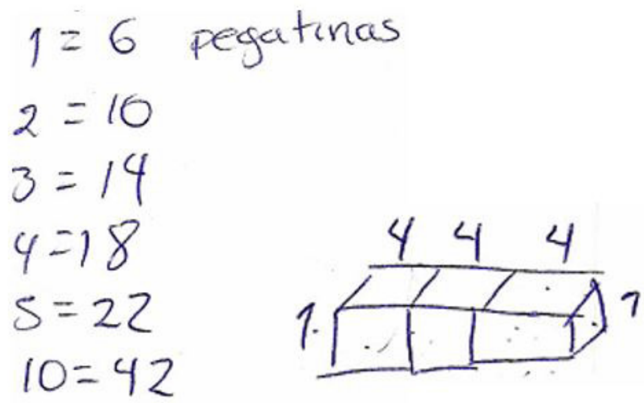

Figura 9. Resolución de la tarea 3 por el maestro en formación E21

Fuente: datos de la investigación.

En la solución del maestro en formación se plantea el signo igual (=) como un indicador de correspondencia entre el número de cubos y el de pegatinas al escribir "1=6". Con ello establece que a un cubo le corresponden seis pegatinas, que a dos cubos le corresponden diez y así sucesivamente. Utiliza una notación inadecuada para la enseñanza, pero bajo la perspectiva del futuro maestro adquiere lógica. Se apoya en un lenguaje icónico para contar las pegatinas requeridas por cubo una vez que se encuentran unidos, por lo que la simbolización y la realización de transformaciones están ausentes.

En la tarea 4 se consideró como correcto si el maestro en formación establece la expresión que relaciona el número de profesores con el número de estudiantes. Pese a que los 40 participantes utilizaron letras, 25 tradujeron incorrectamente las condiciones de la tarea al expresar, por ejemplo: "$6S=P$ de donde $S=P/6$" (maestro en formación E31). Este hecho conlleva a manifestar que las tareas de comparación multiplicativa (tarea 2 y 4) implican dificultades para los futuros maestros de primaria (tabla 5).

Tabla 5. Grado de corrección de la tarea 4

Grado de corrección	Frecuencia
Correcta	15
Incorrecta	25
Total	40

Fuente: elaboración propia.

En la figura 10 se muestra la resolución del futuro maestro E29, uno de los 15 participantes que movilizaron un nivel 2 de algebrización, el cual demandaba la tarea en el marco del conocimiento común.

Figura 10. Resolución de la tarea 4 por el maestro en formación E29

Fuente: datos de la investigación.

Los resultados referentes al grado de corrección evidencian que, aunque los futuros maestros resuelven las tareas planteadas (lo que indica un conocimiento común), los elementos matemáticos utilizados no son apropiados para el desarrollo del pensamiento algebraico, tal es el caso del ensayo y error que se puede constatar en el caso de la tarea 1. "La idea no es simplemente atribuir significado algebraico a las actividades matemáticas de la escuela primaria, sino que los contenidos matemáticos deben ser transformados sutilmente para resaltar su carácter algebraico" (Carraher et ál., 2006, p. 88). Es necesario que los maestros sean capaces de poner de manifiesto el carácter algebraico de la tarea matemática elemental y consideren al álgebra una *forma de pensamiento* y no como una lista de procedimientos a seguir (Carraher y Schliemann, 2007; Stephens, 2008).

El carácter algebraico en el conocimiento ampliado

El conocimiento ampliado se indagó a través de las tareas 5 y 6. Es importante señalar que no se precisa de tareas con temas explícitamente avanzados para analizar el conocimiento ampliado de los maestros en formación, este se puede poner de manifiesto al reconocer en las tareas las condiciones necesarias para realizar un planteamiento algebraico.

En los resultados de la tabla 6 se reconoce que la tarea 5 representó una actividad de mayor complejidad para los estudiantes para maestro; se obtuvieron dos respuestas parcialmente correctas al proporcionar un resultado aproximado evidenciando un proceso poco claro. En 15 de las soluciones se manifestó una serie de operaciones que no condujeron a un resultado concreto. La mayoría de los maestros en formación no respondió a la tarea. Hubo un predominio de elementos matemáticos de carácter aritmético. Es importante señalar que los estudiantes para maestros, en su totalidad, hicieron un dibujo para representar la situación del problema, aunque no alcanzaran a realizar algún cálculo.

Tabla 6. Grado de corrección y método de solución de la tarea 5

Grado de corrección	Frecuencia	EMP	Frecuencia
Parcialmente correcta	2	Algebraico-icónico	1
Incorrecta	15	Aritmético-icónico	16
No responde	23	No responde	23
Total	40	Total	40

Fuente: elaboración propia.

El maestro en formación E21, realizó una actividad de índole algebraica. En la figura 11 se puede observar que logra establecer la relación de dependencia entre el largo y el ancho de la hoja. En su primer intento por plantear una ecuación, no tiene claro las variables designadas $\frac{1}{2}(L-4)$ y se equivoca en el uso del paréntesis y en la designación de las variables. No reconoce la dependencia entre las variables al trabajar con dos literales diferentes, donde una puede ser expresada en términos de la otra. Aplica la misma operación en ambos lados de la ecuación y la reduce. Sin embargo, al ver que llega a una expresión que no le permite determinar datos numéricos, replantea la expresión inicial.

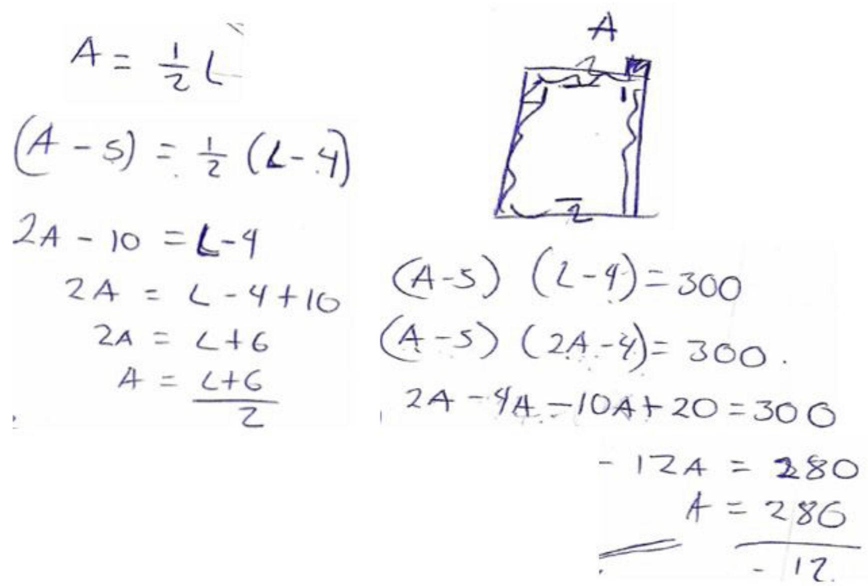

Figura 11. Resolución de la tarea 5 por el maestro en formación E21

Fuente: datos de la investigación

En su segundo planteamiento, la ecuación es correcta, (*A*-4)(*L*-4)=300, y sustituye *L*=2*A*. Sin embargo, no realiza correctamente la multiplicación de los dos binomios. Desde el análisis previo de esta tarea se estableció que promovía un nivel de algebrización 3, sin embargo, la actividad puesta de manifiesto por el futuro maestro no logró dicho nivel. El trabajo simbólico adelantado presenta inconsistencias y no se llegó a una solución congruente a la situación planteada.

La tarea 6 también fue planteada para indagar sobre el conocimiento avanzado. Los resultados expuestos en la tabla 7 ponen de manifiesto la dificultad de la tarea, se aprecia que cinco maestros en formación respondieron correctamente al proporcionar un procedimiento coherente. Particularmente dos soluciones fueron consideradas parcialmente correctas, pues evidenciaron un procedimiento que llevó a un resultado aproximado.

Tabla 7. Grado de corrección y método de solución de la tarea 6

Grado de corrección	Frecuencia	EMP	Frecuencia
Correcta	5	Algebraico	1
Parcialmente correcta	2	Aritmético	18
Incorrecta	12		
No responde	21	No responde	21
Total	40	Total	40

Fuente: elaboración propia.

De la tabla 7 también se desprende que los elementos matemáticos utilizados son de carácter aritmético. El análisis de estas tareas muestra que las resoluciones por parte de los futuros maestros no muestran conexiones con conocimientos más avanzados. En la figura 12 se ilustra el procedimiento del maestro en formación E30, actividad matemática en la que se manifestó el uso del álgebra.

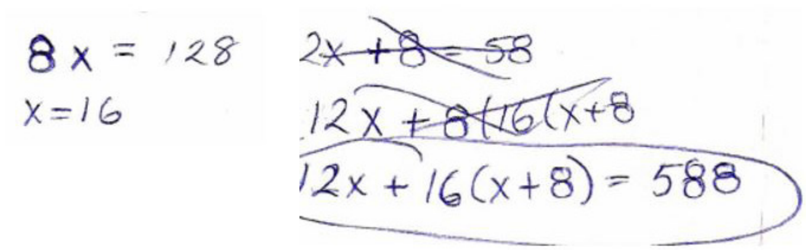

Figura 12. Resolución de la tarea 6 por el maestro en formación E30

Fuente: datos de la investigación

En la resolución del maestro en formación se aprecia que con la expresión $x=16$ intenta denotar que uno de los trenes x, solo tiene vagones de 16 asientos. Por otro lado, con la expresión $8x=128$ intenta traducir la frase: el tren con vagones de 16 asientos tendrá 8 vagones más que el otro tren. Parece que el estudiante para maestro entiende el problema, pero se le dificulta traducirlo en una notación algebraica y deja incompleta la tarea. La orientación adecuada de esta tarea implicaría un nivel 3 de algebrización de acuerdo con el análisis *a priori* realizado previamente.

El análisis de estas tareas muestra que las resoluciones por parte de los futuros maestros no muestran conexiones con conocimientos más avanzados. Muchas de sus dificultades se remontan a la limitada comprensión de los números y las operaciones, mientras que otros errores son causados por no traducir correctamente el problema verbal a su interpretación simbólica-literal.

Conclusiones e implicaciones para el profesorado de primaria

Este análisis pone de manifiesto, en el caso del conocimiento común, que los futuros maestros presentan dificultades al resolver las tareas porque utilizan elementos matemáticos de carácter algebraico de modo inadecuado o bien, no los utilizan. Esto se evidencia en las tareas 2 y 4 que exigía un nivel 2 de algebrización ya que, de los 40 participantes en el estudio, 2 alcanzaron este nivel para la tarea 2, y 15 para la tarea 4. La principal dificultad radicaba en nombrar lo indeterminado estableciendo la relación de dependencia que se indicaba en ambas tareas. Respecto a la tarea 3, que según el análisis previo también favorecía un nivel 2 de algebrización, solo 18 futuros maestros alcanzaron un primer nivel al plantear una regla general de manera verbal. En este caso no emergieron elementos matemáticos para articular una regla general mediante la simbolización. La tarea 1 representó mayor complejidad respecto al trabajo algebraico, pues hubo una tendencia en los estudiantes para maestros en resolverla probando valores específicos. Cuando intentaron llevar a cabo un trabajo algebraico, los planteamientos para nombrar lo indeterminado y las transformaciones simbólicas que realizaban carecían de sentido respecto a las condiciones de la tarea.

En el caso de las tareas sobre el conocimiento ampliado, ningún maestro en formación alcanzó un nivel 3 de algebrización, nivel que exigía la resolución de las tareas 5 y 6. La traducción del problema verbal a un lenguaje algebraico y las transformaciones sobre las expresiones representaron un reto para los futuros maestros. En ambas tareas hubo una tendencia de resolución en términos aritméticos; además, más de veinte estudiantes para maestros no realizaron ningún planteamiento para aproximarse a la solución de estas dos tareas. Esto evidencia que los conocimientos que los maestros en formación poseen sobre el álgebra son limitados, porque no permitieron resolver las tareas, al menos no de una manera algebraica.

Los resultados señalan la necesidad de analizar e incidir, en un primer plano, en los programas y planes formativos de los futuros maestros porque el hecho de que estudios evidencien que los niños son capaces de desarrollar un pensamiento algebraico, implica la necesidad de formar a los profesores para promover dicho desarrollo. Incluir tareas específicas en programas de formación del profesorado constituye un componente relevante para alcanzar una competencia algebraica que no se limite a la manipulación simbólica adecuada, sino que permita una comprensión del sentido de su uso. A través de los programas de formación inicial (y también durante la formación continua) se debe incidir en los conocimientos y creencias que tienen los maestros sobre la enseñanza del álgebra en general y en particular sobre su desarrollo en los niveles básicos. Tal como indican Vesga-Bravo y Losada (2018), es necesario incorporar cambios en los diseños curriculares de los maestros de acuerdo con los fines de la educación matemática y que facilite el desarrollo de competencias en los estudiantes. De esta manera, se necesita articular de modo coherente y congruente los programas de formación del profesorado con los programas formativos de los estudiantes, atendiendo a las competencias algebraicas que se precisan desarrollar en los aprendices. Focalizar en aspectos de generalización de propiedades y relaciones funcionales más que en la reproducción de procedimientos es una vía según las investigaciones.

Referencias

Aké, L. P. y Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, *30*(2), 171-201. https://doi.org/10.24844/em3002.07

Aké, L. P., Godino, J. D., Fernández, T. y Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática - AIEM*, 5, 25-48.

Aké, L. P., Godino, J. D., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2013). Proto-algebraic levels of mathematical thinking. En A.M. Lindmeier y A. Heinze (eds.), *Mathematics learning across the life span. Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 1-8). PME.

Bernardz, N., Radford, L., Janvier, B. y Leparge, A. (1992). Arithmetical and algebraic thinking in problem solving. En W. Geeslin y K. Graham (eds.), *Proceedings of the 16th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (vol. 1, pp. 65-72). Durham, NH: PME Programme Committee.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412.

Borko, H., Frykholm, J. A., Pittman, M.E., Eiteljorg, E., Nelson, M., Jacobs, J. K., Clark, K. K. y Schneider, C. (2005). Preparing teachers to foster algebraic thinking. *The International Reviews on Mathematical Education - Zentralblatt für didaktik der mathematik (ZDM)*, *37*(1), 43-52. https://doi.org/10.1007/BF02655896

Carraher, D. W. y Schliemann, A.L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (vol. 2, pp. 669-705). Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Carraher, D., Schiliemann, A. D. y Brizuela, B. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. En M.L. Fernández (ed.), Conferencia magistral presentada en el *22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA)*. Tucson, Arizona: PME Programme Committee.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115. https://doi.org/10.2307/30034843

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *6*(2), 1-13.

Cerdán, F. (2007). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos*. [Tesis de doctorado, Universidad de Valencia]. Repositorio institucional UV. http://hdl.handle.net/10803/9630

Ferrero, L. (2007). *Sexto de primaria: tercer ciclo Matemáticas*. Anaya.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education - Zentralblatt für didaktik der mathematik (ZDM)*, *39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática, 32*(57), 90-113. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v-31n57a05

Greenes, C. y R. Rubenstein (2008). *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 258-288.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity for an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran, K., Pang, J., Schifter, D. y Fong, S. (2016). *Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer.

León, O. G. y Montero, I. (2003). *Métodos de investigación en psicología y educación*. McGraw-Hill.

Moss, J. y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*(4), 441-465. https://doi.org/10.1007/s11412-006-9003-z

Radford L. (2015) Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. En S. Cho (ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_15

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The Mathematics Teacher, 74*(6), 418-420.

Stephens, A. C. (2008). What "counts" as algebra in the eyes of preservice elementary teachers? *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(1), 33-47. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.12.002

Vesga, G. y De Losada, M. (2018). Creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en ejercicio sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *Revista Colombiana de Educación*, *74*, 243-267. https://doi.org/10.17227/rce.num74-6909

Para citar este artículo

Aké, L.P. (2021). El carácter algebraico en el conocimiento matemático de maestros en formación. Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (49), 15-34. https://doi.org/10.17227/ted.num49-9871