El razonamiento covariacional y su papel en el estudio de la integral definida desde la resolución de problemas

Covariational Reasoning and its Role in the Study of the Defined Integral from Problem Solving

Raciocínio covariacional e seu papel no estudo da integral definida a partir da resolução de problemas

Mihály André Martínez-Miraval*
Martha Leticia García-Rodríguez**

Resumen

El objetivo del presente estudio fue analizar si existen descriptores asociados con un razonamiento covariacional en los procesos de resolución de problemas sobre la integral definida. En las investigaciones sobre este tema se identifica de forma implícita o explícita la presencia del razonamiento covariacional, lo que sugiere la necesidad de conocer sobre la relación entre este tipo de razonamiento y los procesos de resolución que involucran el concepto de integral definida. En este estudio se adoptó el constructo teórico de razonamiento covariacional y se llevó a cabo una investigación documental mediante una revisión sistemática de trabajos de investigación que abordaron el estudio de la integral definida y que fueron publicados durante los últimos ocho años, de acuerdo con cuatro índices de valoración en el área de Educación Matemática. Como resultado de la revisión sistemática, se identificaron cuatro trabajos que abordan este concepto mediante procesos de aproximación o acumulación; en ellos se reporta que los estudiantes hicieron referencia a: cambios en el valor de una cantidad como si ocurrieran simultáneamente con los cambios en el valor de otra; dos variables cambiando continuamente; y, un elemento que resulta de la coordinación de los valores de dos cantidades que varían juntas, todos descriptores de diferentes niveles de razonamiento covariacional. Se concluye que los estudiantes razonan covariacionalmente durante la resolución de problemas sobre la integral definida y parece que las características de su razonamiento están relacionadas con el éxito en el proceso de resolución, aspecto que requiere de mayor investigación.

Palabras clave

integral definida; razonamiento covariacional; resolución de problemas; tecnologías

* Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Docente a tiempo completo, Pontificia Universidad Católica del Perú, Departamento de Ciencias - Sección Matemáticas, Lima, Perú. martinez.ma@pucp.edu.pe

* Doctora. Profesora investigadora del Instituto Politécnico Nacional, Programa de Maestría y Doctorado en Matemática Educativa, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, CDMX, México. mlgarcia@ipn.mx

Fecha de recepción: 13/05/2022
Fecha de aprobación: 17/10/2022

Abstract

This study aims to analyze if there are descriptors associated with covariational reasoning in the processes of problems-solving related to definite integrals. In research about this subject, the presence of covariational reasoning is implicitly or explicitly identified, which suggests the need to know about the relationship between this type of reasoning and the resolution processes that involve the concept of definite integral. In this study, the theoretical construct of covariational reasoning was adopted, and a documentary research was carried out through a systematic review of research papers that addressed the study of the definite integral published during the last 8 years, according to four assessment indexes in Mathematics Education. As a result of the systematic review, four works were identified that address this concept through approximation or accumulation processes; in which is reported that the students made reference to: changes in the value of one quantity as occurring simultaneously with changes in the value of another; two variables continuously changing; and, a new element that result from the coordination of the values of two quantities that vary together, . all descriptors of different levels of covariational reasoning. It is concluded that student's reason covariationally during the resolution of problems related to the definite integral and it seems that the characteristics of their reasoning are related to success in the resolution process, an aspect that requires further investigation.

Keywords

definite integral; covariational reasoning; problem-solving; technologies

Resumo

O objetivo do presente estudo foi analisar se existem descritores associados ao raciocínio covariacional nos processos de resolução de problemas da integral definida. Nas pesquisas sobre este tópico se identificam de maneira implícita ou explicita a presença de raciocínio covariacional, o que sugere a necessidade de conhecer a relação entre este tipo de raciocínio e os processos de resolução que envolvem o conceito da integral definida. Neste estudo, foi adotada a construção teórico do raciocínio covariacional, e foi realizada uma pesquisa documental por meio de uma revisão sistemática de trabalhos de pesquisa que abordavam o estudo da integral definida e que foram publicados nos últimos 8 anos, de acordo com quatro índices de avaliação na área de Educação Matemática. Como resultado da revisão sistemática, foram identificados quatro trabalhos que abordam este conceito através de processos de aproximação ou acumulação; neles é relatado que os alunos fizeram referência a: mudanças no valor de uma quantidade como se ocorressem simultaneamente com as mudanças no valor de outra; a duas variáveis mudando continuamente; e, a um elemento que resulta da coordenação dos valores de duas quantidades que variam entre si, todos os descritores de diferentes níveis de raciocínio covariacional. Conclui-se que os estudantes raciocinam covarialmente durante a resolução de problemas sobre a integral definida e parece que as características de seu raciocínio estão relacionadas ao sucesso no processo de resolução, um aspecto que requer investigação adicional.

Palavras-chave

integral definida; raciocínio covariacional; resolução de problemas; tecnologias

Introducción

La forma de razonar de los estudiantes en matemáticas está estrechamente relacionada con el desarrollo de conceptos, con la destreza para la resolución de problemas, con la habilidad para esbozar e interpretar gráficas y, en general, con el avance en conocimientos matemáticos sólidos desligados de la memorización de algoritmos (Ikram *et al*., 2020).

El término *razonamiento* es definido por Lithner (2000) como la línea de pensamiento o el camino que sigue el pensamiento para producir afirmaciones y conclusiones. En particular, razonar acerca de cantidades que covarían es importante para el estudio de distintos conceptos del cálculo, como el de función (Oehrtman *et al*., 2008), para comprender y desarrollar tareas relacionadas con los conceptos de límite y acumulación (Carlson *et al*., 2001), para conceptualizar la derivada como un proceso dinámico (Zandieh, 2000) y para estudiar el concepto de integral (Thompson y Silverman, 2008).

Los conceptos de *función, límite, derivada* e *integral* permiten modelar y estudiar el comportamiento de fenómenos dinámicos (Carlson *et al*., 2001). En ellos se establecen relaciones funcionales entre las variables mediante procesos de variación, covariación, aproximación y acumulación, y se identifica el razonamiento covariacional como un elemento importante para analizar tales procesos y para construir significados asociados con las relaciones funcionales como modelos de situaciones de cambio (Carlson *et al*., 2003).

Si bien es posible identificar numerosas investigaciones sobre el tema de integral definida (Aranda y Callejo, 2020; Martínez-Miraval y García-Cuéllar, 2020; Caglayan, 2016) en las que se alude a relaciones de coordinación entre variables y se reconoce que estas se dan de forma simultánea, solo se encontraron dos investigaciones orientadas a identificar qué papel tiene el razonamiento covariacional en el estudio de este concepto.

Esto ha dado pauta para reflexionar en dos aspectos: el razonamiento covariacional parece estar presente en los procesos de resolución que realizan los estudiantes cuando trabajan en problemas sobre la integral definida; y, la exigua atención que en las investigaciones se da a estos procesos. Por ello, surge la necesidad de conocer sobre la posible relación entre el razonamiento covariacional de un estudiante y el estudio de la integral definida. Para esto se realizó una investigación documental mediante una revisión sistemática que tuvo como objetivo analizar en los procesos de resolución de problemas sobre la integral definida, si existen descriptores asociados con un razonamiento covariacional.

Este documento se compone de cinco secciones. En la primera se realiza una revisión sobre la importancia del razonamiento covariacional para la comprensión de conceptos fundamentales del cálculo y su implicación al abordar la integral definida mediante procesos de aproximación y acumulación de áreas. En la segunda sección se presentan los elementos teóricos relacionados con el razonamiento covariacional. En la tercera sección se realiza una revisión sistemática de un conjunto de artículos publicados en revistas académicas y se presenta un análisis de ellos desde una perspectiva del razonamiento covariacional. En la cuarta sección se realiza una discusión de los resultados obtenidos; y la última sección corresponde a las conclusiones.

Antecedentes

El concepto de *integral definida* puede concebirse a partir de procesos de aproximación y acumulación, en los que la covariación entre los valores de las cantidades involucradas en cada uno de estos procesos toma un rol preponderante. En el caso de procesos de aproximación a la medida del área que se forma bajo la gráfica de una función f en $[a, b]$, utilizando sumas de Riemann, se da la coordinación entre la medida de base de cada rectángulo, el número de rectángulos y la suma de las medidas de las áreas de todos los rectángulos (Martínez-Miraval y García-Rodríguez, 2022; Tatar y Zengin, 2016); en el caso de procesos de acumulación del área que se forma bajo la gráfica de una función f en $[a, b]$, se da la coordinación entre los valores de la variable x en ese intervalo, la función $f(t)$, $t \in [a, x]$, y la función integral $F(x)$ (Aranda y Callejo, 2017).

El proceso de aproximación se relaciona con la noción de integral definida, asociada con el uso de figuras geométricas para realizar un acercamiento al área de una región limitada por una curva (Kouropatov y Dreyfus, 2014); el método de exhaución o el uso de sumas de Riemann son utilizadas en estos procesos. El procedimiento de acumulación se relaciona con el desarrollo de nociones de integración, como el caso de la función integral, o para entender aspectos del teorema fundamental del cálculo desde una perspectiva geométrica (Thompson y Silverman, 2008).

La literatura en educación matemática hace notar que el estudio de la integral definida presenta dificultades para los estudiantes cuando tienen que coordinar valores que cambian simultáneamente (Martínez-Miraval y García-Rodríguez, 2022; Caglayan, 2016) e interpretar los resultados obtenidos (Sealey, 2014; Kouropatov y Dreyfus, 2014), tanto en procesos de aproximación a la medida del área mediante sumas de Riemann (Aranda y Callejo, 2020; Martínez-Miraval y García-Cuéllar, 2020) como en procesos de acumulación para determinar la función integral (Harini *et al*., 2018; Aranda y Callejo, 2017), en contextos matemáticos o no matemáticos (Jiménez y Mejía, 2015; Jones, 2015). Estos elementos de coordinación de valores están presentes cuando un sujeto razona covariacionalmente, lo que refuerza la importancia de conocer sobre el papel que tiene este razonamiento en el estudio de la integral definida.

Referentes teóricos

Entre los autores que han brindado una definición de razonamiento covariacional figuran Carlson *et al*. (2003), quienes lo definen como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (p. 124). Imaginar dos cantidades covariando implica tener en mente una imagen sostenida de los valores de esas cantidades variando simultáneamente, esto es, acoplar las dos cantidades de modo que se forme un solo elemento que presenta atributos de cada una de ellas, por lo tanto, a partir de la percepción del cambio de una de las cantidades, se puede percibir el cambio simultáneo de ambas; a este nuevo elemento Saldanha y Thompson (1998) le denominan *objeto multiplicativo*.

De acuerdo con Thompson (1994), la imagen de covariación que una persona tiene en un momento dado está sustentada en las acciones mentales que esa persona realiza. Las acciones mentales pueden asociarse con un conjunto de comportamientos observables en un sujeto que está involucrado en la resolución de un problema de covariación (Carlson *et al*., 2003); estos comportamientos se identifican, ya sea en la explicación del sujeto sobre sus respuestas o procedimientos —de forma verbal o escrita—, o en sus gráficas, según los detalles que estas contengan que den señales de cómo el sujeto coordina los cambios entre los valores de dos variables. La imagen de covariación y la percepción del cambio entre dos cantidades ocurren en la mente de una persona y es una forma de pensar que caracteriza su razonamiento covariacional.

La percepción de cambios simultáneos de dos variables es un rasgo de lo que se conoce como covariación continua entre ellas, que puede ser concebida de dos maneras: a trozos, que implica pensar la variación en fragmentos, es decir, poner la atención en lo que ocurre en los valores extremos de un intervalo, y no en todos los valores intermedios; y suave, que implica imaginar el cambio de los valores de las cantidades como una experiencia del cambio en el tiempo en un fenómeno de movimiento del mundo real (Castillo-Garsow *et al*., 2013).

Los trabajos de Thompson (1994), Carlson *et al.* (2003), Castillo-Garsow *et al*. (2013), entre otros (que hacen referencia a los conceptos imagen de covariación, objeto multiplicativo, acciones mentales, procesos de pensamiento pseudoanalíticos, comportamientos pseudoanalíticos, coordinación de valores y covariación continua), fueron considerados por Thompson y Carlson (2017), en su visión del razonamiento covariacional, como un constructo teórico, para el que afirman que la covariación implica "conceptualizar los valores de cantidades individuales como variables, y luego conceptualizar dos o más cantidades como que varían simultáneamente" (p. 423); asimismo, hacen énfasis en el razonamiento cuantitativo que se pone en juego al comprender una situación en términos de cantidades y de relaciones entre ellas, en la construcción de objetos multiplicativos como elementos que relacionan simultáneamente los valores de dos cantidades, y la coordinación de los cambios en los valores de las cantidades.

Método y procedimiento

La investigación se realizó mediante una revisión sistemática cualitativa de tipo descriptivo de un conjunto de artículos publicados en revistas académicas. En el presente estudio se hizo una reinterpretación de los datos: análisis y expresiones textuales de los estudios revisados a la luz del marco adoptado, dado que este tipo de revisiones se basa en recopilar y sintetizar la evidencia científica sobre un tema específico, mediante un método que asegure que se reducen al máximo los sesgos en la búsqueda de información (Araujo, 2011).

Gisbert y Bonfill (2004) señalan que la revisión sistemática presenta un enfoque práctico al momento de sintetizar y analizar la información; busca que la evidencia científica sea la más apropiada, y, requiere que se formulen preguntas claras que definan la investigación que se realiza, y que se empleen métodos sistemáticos para ubicar los estudios, evaluarlos críticamente, y analizar los datos que generen interés. Los investigadores definen seis etapas para realizar una revisión sistemática, que fueron adaptadas en el presente estudio integrando el análisis y presentación de los resultados con la interpretación de estos (etapas 5 y 6).

Primera etapa: formulación del problema, establecido mediante el objetivo

En las investigaciones sobre integral definida se identifica que de manera implícita está presente el razonamiento covariacional, aun cuando los autores no hacen referencia explícita a este. Si bien los investigadores pueden tener diferentes concepciones del razonamiento covariacional, no las hacen explícitas en sus análisis; entonces, para conocer si esta forma de razonar de los estudiantes es un elemento esencial para la construcción del concepto de integral definida, es posible analizar en los procesos de resolución de problemas sobre este concepto si existen descriptores de un razonamiento covariacional que ya han sido trabajados y sistematizados por otros investigadores, como Thompson y Carlson (2017) y Carlson *et al*. (2003), entre otros, sin menoscabo de que estos puedan ser extendidos o complementados a partir de investigaciones empíricas.

Segunda etapa: criterios para la identificación y selección de investigaciones

Se revisaron e identificaron artículos en revistas académicas indexadas de los últimos ocho años y se consideraron tres criterios de selección, que fueron utilizados para generar una ecuación de búsqueda: 1) que incluyera las palabras *integral definida* en el título, resumen, o en las palabras clave de los artículos; 2) que se reportara en el documento el proceso de resolución de los problemas por parte de los estudiantes, y, 3) que las investigaciones estuvieran relacionadas con el estudio de fenómenos de cambio. La ecuación de búsqueda utilizada fue "*covariational reasoning & definite integral & journal*".

Tercera etapa: evaluación de la calidad de los estudios

Se consideraron revistas académicas indizadas en Web of Science, Scopus, Scielo y Latindex, porque presentan criterios de selección, constan de un comité científico y realizan una revisión doble ciego por pares, que garantiza la calidad y rigurosidad de la información obtenida.

Cuarta etapa: selección de los estudios

La ecuación de búsqueda dio como resultado un total de 31 artículos para los cuales se dio lectura al resumen, palabras clave, métodos y procedimientos, y conclusiones. Lo anterior permitió identificar diez artículos, indexados de acuerdo con cuatro índices de valoración, siete de Scopus, uno de WoS, uno de Scielo y uno de Latindex, que cumplieron los criterios de selección. De acuerdo con el objetivo de cada autor, las investigaciones seleccionadas se referían al tema de integral definida, reportaban procesos de resolución de problemas, y estos se ubicaban en el contexto de fenómenos de cambio, en los que se requiere de un razonamiento covariacional, como lo reportan Carlson *et al.* (2003) y Thompson y Carlson (2017), que puede hacer uso de tecnologías digitales (Aranda y Callejo, 2017). Los trabajos se clasificaron en: 1) estudios sobre la enseñanza o el aprendizaje del concepto, ya sea como una propuesta para introducir el estudio de la integral definida o un conjunto de tareas para medir el aprendizaje de los estudiantes de aspectos relacionados con dicho concepto matemático; 2) contexto de los problemas utilizados, matemático o no matemático (física, economía, ingeniería, etc.), o una combinación de las dos anteriores, y 3) tipo de tecnología utilizada por los estudiantes, diferenciados en tareas, problemas, etc., que son resueltos utilizando solo lápiz y papel, o mediados por tecnologías digitales. La tabla 1 muestra información sobre los diez artículos seleccionados.

Tabla 1. *Clasificación de los artículos en categorías*

Autor(es)	Orientación	Contexto	Recurso
Aranda y Callejo (2020)	Aprendizaje	Matemático	Digital
Martínez-Miraval y García-Cuéllar (2020)	Aprendizaje	Matemático	Digital
Harini *et al.* (2018)	Aprendizaje	Ingeniería	Lápiz/papel
Aranda y Callejo (2017)	Enseñanza	Matemático	Digital
Wagner (2017)	Aprendizaje	Matemático/físico	Lápiz/papel
Caglayan (2016)	Enseñanza	Matemático	Digital
Jiménez y Mejía (2015)	Enseñanza	Matemático	Digital
Jones (2015)	Aprendizaje	Matemático/físico	Lápiz/papel
Kouropatov y Dreyfus (2014)	Enseñanza	Matemático/físico	Lápiz/papel
Sealey (2014)	Enseñanza	Físico	Lápiz/papel

Fuente: elaboración propia.

De los artículos incluidos en la tabla 1, en relación con los trabajos sobre la enseñanza o el aprendizaje del concepto, se identificó que las propuestas de enseñanza para introducir el concepto de integral definida incluyen procesos de aproximación a la medida del área o procesos de acumulación para construir la integral como una función. En ambos, cobra relevancia el desarrollo de nociones intuitivas de cambio simultáneo en los valores de cantidades, como la suma de medidas de áreas de rectángulos con respecto a la medida de la base o del número de rectángulos (Caglayan, 2016) o la aproximación del valor de acumulación de cantidades a medida que el valor de una variable cambia en el dominio de la función (Aranda y Callejo, 2017); estas nociones surgen al observar la transformación y coordinación entre las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas de las cantidades involucradas.

En relación con la medición del aprendizaje, una pregunta reiterada en los estudios se refiere al significado o la interpretación que da el estudiante al símbolo de integral definida, $\int_a^b f(x)dx$. En estos se reportan interpretaciones asociadas con el cálculo de un área, antiderivada, límite de una suma de Riemann o relacionadas con el teorema fundamental del cálculo (Wagner, 2017). Para saber si un estudiante desarrolla su aprendizaje de forma conceptual, en las investigaciones se utilizan preguntas que involucran la relación integral-área y la noción de integral como una suma algebraica de áreas; o si lo hace de forma procedimental, prevalecen preguntas en las que se aplican técnicas de integración (Jones, 2015).

En relación con el contexto de los problemas utilizados, los componentes producto, suma, límite y función en los que se descompone la integral definida desde una perspectiva de sumas de Riemann son adaptados para interpretar conceptos de la física (como la distancia, energía y fuerza, que son utilizados por Sealey [2014] en su trabajo de investigación). Harini *et al.* (2018) identifican cómo el razonamiento covariacional juega un papel importante en la interpretación y representación de la acumulación del volumen de agua de una piscina en un contexto de un problema de ingeniería.

En relación con el tipo de tecnología utilizada, se investiga cómo los estudiantes utilizan tecnologías digitales, en particular GeoGebra, para realizar un proceso de aproximación al área limitada por funciones positivas o negativas mediante rectángulos, y coordinar los procesos de partición, suma de áreas de rectángulos y el límite de esta suma, para lograr la génesis instrumental de la integral definida como el límite de una suma de Riemann (Martínez-Miraval y García-Cuéllar, 2020), o para construir la función integral mediante un proceso de acumulación (Aranda y Callejo, 2017).

Quinta etapa: análisis de datos y discusión de resultados

Para analizar los procesos de resolución de los problemas incluidos en los artículos seleccionados, se utilizó el constructo teórico de Thompson y Carlson (2017). Las respuestas escritas de los estudiantes se analizaron a partir de las descripciones de cada uno de los niveles de razonamiento covariacional, propuestas por los autores en el constructo teórico. Estas descripciones fueron utilizadas para identificar rasgos del razonamiento covariacional de los estudiantes al desarrollar tareas sobre la integral definida. La tabla 2 presenta los niveles de razonamiento covariacional del marco teórico y una descripción de cada nivel.

Tabla 2. *Niveles de razonamiento covariacional*

Nivel	Descripción
Covariación continua suave	La persona hace referencia a cambios en el valor de una variable como si ocurrieran simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable, para todos los valores que pertenecen a un dominio determinado. La persona hace referencia a ambas variables variando continuamente, como la velocidad de un objeto en movimiento y el tiempo transcurrido.
Covariación continua a trozos	La persona hace referencia a cambios en el valor de una variable como si ocurrieran simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable, para los valores extremos de los intervalos en los que se puede dividir un dominio determinado. La persona hace referencia continuamente a ambas variables, como la velocidad de un objeto en movimiento y el tiempo transcurrido en intervalos.
Coordinación de valores	La persona hace referencia a valores de una variable relacionados individualmente con valores de otra variable y representa el par de valores en tablas, como puntos en el plano, o en lenguaje natural. La persona determina una nueva variable que resulta de la coordinación de los valores de dos variables que varían juntas, como la distancia recorrida de un objeto que resulta del producto de la velocidad por el tiempo.
Coordinación gruesa de valores	La persona se expresa en términos de aumentos o disminuciones en los valores de las variables que varían juntas.
Precoordinación de valores	La persona hace referencia a que los valores de dos variables varían, pero de forma asincrónica; una variable cambia, luego la segunda variable cambia, luego la primera, y así sucesivamente.
Sin coordinación	La persona hace referencia a la variación de una u otra variable, pero sin coordinar los valores de ambas.

Fuente: adaptado de Thompson y Carlson (2017, p. 435).

De los diez trabajos de investigación (tabla 1), se retoman los dos orientados a la construcción del concepto de integral definida mediante procesos de aproximación con sumas Riemann (Caglayan, 2016; Sealey, 2014) y dos que abordan la integral definida a través de procesos de acumulación (Jiménez y Mejía, 2015; Kouropatov y Dreyfus, 2014). El resto de trabajos presentaron, en algunos casos, procedimientos similares a los elegidos, realizaron un análisis según un enfoque del razonamiento covariacional, o, simplemente, mostraban comportamientos asociados a los niveles más bajos del constructo teórico del razonamiento covariacional; por esos motivos no fueron considerados en nuestro estudio.

Problemas relacionados con procesos de aproximación con sumas Riemann

Caglayan (2016) trabajó en actividades relacionadas con el cálculo de áreas, con estudiantes de nivel universitario, quienes utilizaron métodos numéricos de aproximación a la integral definida a través de sumas de Riemann de extremo izquierdo, punto medio, extremo derecho y trapezoidal. En el trabajo de Caglayan se reporta la intervención de una estudiante que relaciona la suma de las medidas de áreas de un número infinito de rectángulos con el valor de la integral definida: "Será simplemente una suma infinita, […] porque si dejamos que el lado de los rectángulos vaya a 0, […] entonces *n* va al infinito y los rectángulos son muy, muy pequeños, […] cuando llegue al infinito, irá a toda el área" (Caglayan, 2016, p. 1272).

La figura 1 muestra el entorno de GeoGebra utilizado por la estudiante para resolver la tarea. La estudiante explora en GeoGebra distintos valores de *n*, que corresponden a diferentes particiones del intervalo [-1, 1]. En la vista algebraica se muestra el valor de la suma de las áreas de los rectángulos para cada una de las posiciones de los rectángulos:

la suma tendrá el valor b, si el vértice superior izquierdo de cada rectángulo coincide con la gráfica de la función; tendrá el valor c, si ahora coincide con la gráfica de la función el vértice superior derecho de cada rectángulo; y el valor de d, si el punto medio del lado superior del rectángulo coincide con la gráfica de la función. El valor de a corresponde a la medida del área de la región.

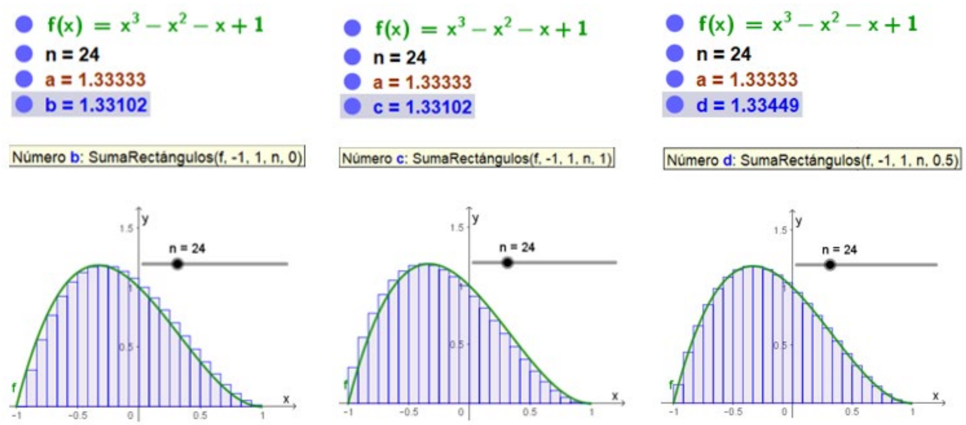


Figura 1. *Aproximaciones realizadas con GeoGebra*

Fuente: adaptado de Caglayan (2016, pp. 13-15).

Al analizar la intervención de la estudiante con el marco teórico de Thompson y Carlson (2017), se identifica que cuando menciona que "el lado de los rectángulos vaya a 0, entonces, *n* va a infinito" (Caglayan, 2016, p. 1272). está coordinando los cambios de la medida de sus bases con el número de rectángulos. En un momento posterior señala: "Cuando [se refiere a *n*] llegue al infinito irá a toda el área" (Caglayan, 2016, p. 1272), la estudiante coordina el número de rectángulos con la suma de las medidas de sus áreas.

En la participación de la estudiante se identifican expresiones que revelan su forma de concebir el proceso: "el lado de los rectángulos vaya a 0", "*n* va al infinito", "cuando llegue al infinito", o "irá a toda el área". Ello da indicios de ver el cambio de las variables como que varían de manera simultánea y continua al mencionar palabras que dan la idea de movimiento (vaya, va, llega, irá). Thompson y Carlson (2017) señalan que cuando una persona se encuentra en el nivel de covariación continua suave hace referencia a cambios en los valores de las variables involucradas como si ocurrieran simultáneamente. Con esto la estudiante parece concebir que la base de cada rectángulo puede tomar todos los valores en cada subintervalo de la partición hasta llegar a 0, es decir, ve los rectángulos como piezas infinitamente pequeñas que al acumularse completan toda el área. Estos fragmentos de la respuesta de la estudiante corresponden a comportamientos de un razonamiento de covariación continua suave (Thompson y Carlson, 2017).

Sealey (2014) reporta una investigación en la que participaron veintidós estudiantes de nivel universitario en actividades sobre los temas distancia, energía y fuerza. Una de las actividades llamada "el problema del gorila" requería aproximar la distancia recorrida por un gorila al caer desde una altura dada, conociendo los valores de la velocidad instantánea cada medio segundo. En esta actividad se utilizaban sumas de Riemann para su solución, considerando valores cada vez más pequeños para el tiempo, asociados con valores para la velocidad.

En el problema del gorila se proporcionó, como información, el registro de la velocidad del gorila durante su caída cada 0,5 segundos. En palabras de la autora, "entender la distancia como un producto de la velocidad y el tiempo requiere que uno coordine las cantidades de velocidad y tiempo de una manera específica" (Sealey, 2014, p. 238). Luego de la primera aproximación a la distancia recorrida por el gorila, obtenida por los estudiantes, Sealey les solicitó declarar si el valor hallado era la distancia exacta, o, de no ser exacta, si se trataba de una sobreestimación o subestimación. En un segundo momento, los estudiantes debían reducir el error de aproximación, indicar qué tan pequeño lo podrían hacer y explicar su razonamiento.

En el trabajo de Sealey (2014), se reporta la intervención de dos estudiantes, Jake y Ben, que dieron respuesta al problema del gorila. Jake señaló que se lograría una mejor aproximación si se consideraran intervalos más pequeños y Ben mostró un razonamiento similar al indicar que se necesitaban más puntos, lo cual se lograría al tener como información una expresión que modelara la velocidad en función del tiempo.

De acuerdo con Thompson y Carlson (2017), cuando Jake menciona "Si tuviéramos intervalos más pequeños. [...] A medida que te acerques a 0 con tus puntos dados de datos, te acercarías tanto que eres bastante exacto" (Sealey, 2014, p. 242), es posible decir que el estudiante está coordinando los cambios en los valores del tiempo con la distancia recorrida por el gorila. En la participación de Jake también se identifican expresiones que revelan su forma de concebir el proceso: "Te acerques a 0" o "te acercarías tanto que eres bastante exacto"; ello permite inferir que ve el cambio simultáneo de las variables tiempo y distancia recorrida y los asocia con una idea de movimiento (acerques, acercarías). Del mismo modo, al utilizar expresiones como "si tuviéramos intervalos más pequeños", al parecer se concibe que el cambio ocurre en fragmentos de tiempo. Estos extractos de la respuesta de Jake corresponden a comportamientos de un razonamiento de covariación continua a trozos (Thompson y Carlson, 2017), porque al hablar de intervalos más pequeños parece concebir intervalos en los que se puede dividir un dominio determinado, con énfasis en los extremos de dicho intervalo.

En cuanto a la participación de Ben, cuando realizó cálculos numéricos para determinar la distancia recorrida por el gorila en un intervalo de tiempo y mencionó "Multiplicamos [...] el cambio en la velocidad por el cambio en el tiempo" (Sealey, 2014, p. 238), está reconociendo que el tiempo y la velocidad varían; las expresiones "cambio en la velocidad" y "cambio en el tiempo" dan fe de ello. Sin embargo, el producto de estos valores no proporciona la distancia recorrida por el gorila en cada intervalo de tiempo, lo que de acuerdo con Thompson y Carlson (2017) evidencia una falta de coordinación de los valores de estas variables en el producto, lo cual también es reportado por Sealey (2014).

Ben buscó un valor aproximado de la distancia recorrida por el gorila al mencionar “se necesitan más puntos. […] Si tuviéramos una función podríamos llegar a la integral para darnos la distancia exacta” (Sealey, 2014, pp. 241-242); esto se identifica como una coordinación de los cambios en el tiempo con la distancia recorrida por el gorila.

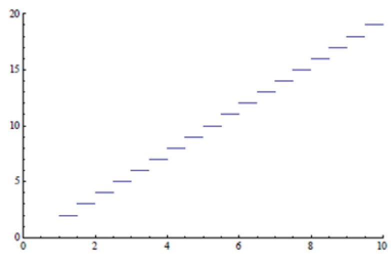
En la participación de Ben, nuevamente, se distinguieron expresiones que revelan su forma de concebir el proceso, por ejemplo: “Si tuviéramos una función [se refiere a la velocidad de caída del gorila respecto del tiempo] podríamos llegar a la integral para darnos la distancia exacta”; con esto da indicios de que reconoce que, para todo instante de tiempo, el gorila presenta una velocidad, lo que se relaciona con un cambio continuo entre los valores de la velocidad para cada valor del tiempo. Del mismo modo, expresiones como “Podríamos llegar a la integral” y “para darnos la distancia exacta” pueden ser relacionadas con un reconocimiento de que la suma de los productos entre la velocidad y el tiempo pueden dar el valor de la integral. Estas afirmaciones parecen ser la consecuencia de ver el cambio de las variables tiempo y velocidad como que varían continuamente, de forma similar a la velocidad de un objeto en movimiento y el tiempo transcurrido. Estos extractos de la respuesta del estudiante corresponden a comportamientos de un razonamiento de covariación continua suave (Thompson y Carlson, 2017).

Problemas relacionados con procesos de acumulación

Jiménez y Mejía (2015) trabajaron con diez estudiantes de nivel universitario en tareas centradas en contextos matemáticos, para propiciar que los estudiantes construyeran su concepto de integral definida mediante el desarrollo de una concepción-proceso de las sumas de Riemann de acuerdo con la teoría APOE, y del análisis de una función denominada función de acumulación. Se plantearon tareas para determinar el valor de acumulación de una función en un intervalo dado y para construir una función que permita determinar el valor de estas acumulaciones usando el *software* Mathematica. Utilizaron una función g definida por $g(x) = 2x$ en el intervalo $[1, 10]$ y realizaron una partición del intervalo; refinaron dicha partición, acumularon una suma de productos de la medida de cada subintervalo y la función evaluada en el extremo izquierdo del mismo.

Al solicitar a los estudiantes la construcción de una función para determinar las acumulaciones obtenidas, Jiménez y Mejía (2015) resaltan la respuesta del equipo 2, quienes manifestaron que lo harían con la integral definida de la función f desde el inicio hasta el final del intervalo $[a, b]$. En la figura 2 se identifica el trabajo de este equipo, que realizó una partición del intervalo en 18 subintervalos.

Nº 54 • Segundo semestre de 2023 • pp. 154-171
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web
TED



$$\text{Table}[\sum_{n=0}^{n} f[(1+(n*h))]*h,\{n,0,17\}]$$

$$\{1,\frac{5}{2},\frac{9}{2},7,10,\frac{27}{2},\frac{35}{2},22,27,\frac{65}{2},\frac{77}{2},45,52,\frac{119}{2},\frac{135}{2},76,85,\frac{189}{2}\}$$

Figura 2. *Acumulación de la función g(x) = 2x en el intervalo [1; 10] realizada por el equipo 2*

Fuente: adaptado de Jiménez y Mejía (2015, p. 90).

Al analizar la interacción del equipo 2 se identifica que conocen que el valor de la integral corresponde al área comprendida bajo la gráfica de una función en el intervalo [*a*, *b*]. Una de las estudiantes, Ara, reconoce que al cambiar el límite superior de la integral $\int_a^x f(x)$ estaría obteniendo el valor de acumulación en [*a*, *x*] con *x* ∈ [*a*, *b*]. La coordinación de valores de la variable *x* con el valor del área bajo la gráfica de la función son comportamientos de un razonamiento covariacional (Thompson y Carlson, 2017).

Ara, integrante del equipo 2, explica la forma de acumular valores de la función *f* con integrales: "Si escribimos $\int_1^{1.5}$, $\int_1^2$ en la primera, se tiene la acumulación de 1 a 1.5 y en la segunda se tiene la acumulación [...] de 1 a 1.5 más 1.5 a 2" (Jiménez, 2017, p. 110). En la intervención de la estudiante se identifica que puede obtener el valor de una integral acumulando el valor de esta en cada subintervalo generado, lo que se puede interpretar como una coordinación simultánea entre el extremo superior del intervalo y el área acumulada, pero considerada en intervalos.

Ara plantea que la expresión *f*(*s*) $= \int_a^s f(x)dx$ representa la función que determina el valor de las acumulaciones (Jiménez, 2017). Esta intervención evidencia una coordinación entre los valores de la variable *x*, *x* ∈ [*a*, *b*], con la función *f*(*x*), *x* ∈ [*a*, *s*], y con la función integral *f*(*s*). Estos extractos de la respuesta de la estudiante corresponden a comportamientos de un razonamiento de covariación continua suave (Thompson y Carlson, 2017), porque al plantear la integral definida en un intervalo dado, se considera que la acumulación de áreas ocurre de forma simultánea con los cambios de la variable *x* ∈ [*a*, *s*] en todos los valores que pertenecen a un dominio determinado.

Por último, Kouropatov y Dreyfus (2014) trabajaron una propuesta de aproximación al concepto de integral con ocho estudiantes de bachillerato, basada en la idea de acumulación, como preparación para desarrollar el teorema fundamental del cálculo. Presentaron a los estudiantes la gráfica de una función cuadrática que representa la relación velocidad-tiempo, y se les pidió explicar por qué el área acumulada debajo de la curva correspondía al desplazamiento. Los investigadores señalan que los estudiantes utilizaron la función para obtener una aproximación analítica del valor acumulado y lo hicieron con éxito. La figura 3 muestra la hoja de trabajo de uno de los estudiantes.

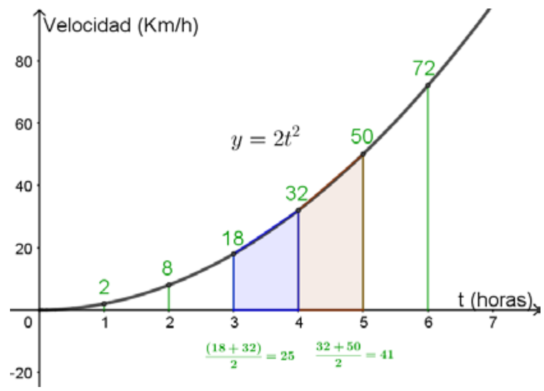


Figura 3. *Cálculo del valor de acumulación de velocidades*

Fuente: adaptado de Kouropatov y Dreyfus (2014, p. 543).

Al analizar los trazos y operaciones realizados sobre la hoja de trabajo de uno de los estudiantes con el marco teórico de Thompson y Carlson (2017), se observa que utiliza la expresión $y = 2t^2$, que modela la velocidad en seis momentos distintos de tiempo: 1h, 2h, …6h, y determina las velocidades respectivas: 2km/h, 8km/h, …, 72km/h. Para hacer esto, el estudiante coordina los valores de tiempo, en intervalos de una hora, con los valores de la velocidad, valores relacionados mediante una expresión algebraica.

El estudiante utiliza fórmulas de geometría para aproximar el área bajo la curva (figura 3). Cuando el tiempo varía de 3 a 4 horas, determina que el área es 25, y cuando el tiempo varía de 4 a 5 horas obtiene el valor de 41. Estas operaciones indican que el estudiante coordinó los cambios individuales de la velocidad con los cambios individuales en el tiempo, para establecer una nueva variable que es la distancia recorrida, la cual es representada por el área bajo la gráfica de la velocidad, en dos intervalos de tiempo consecutivos. Lo anterior coincide con la descripción de un razonamiento en el nivel de coordinación de valores (Thompson y Carlson, 2017).

Discusión

El análisis realizado permitió identificar comportamientos asociados con las acciones mentales que ponen en juego los estudiantes al resolver problemas sobre integral definida, las cuales fueron descritas con el constructo teórico del razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017). Estos comportamientos quedaron evidenciados mediante extractos de las intervenciones de los estudiantes, que pueden pasar desapercibidas por los investigadores o profesores, sin embargo, dan señales de que los estudiantes utilizan su razonamiento covariacional: como cuando el estudiante mencionó que la distancia recorrida sería más exacta si tuviera intervalos de tiempo más pequeños que tienden a 0, respuesta que caracteriza un razonamiento de covariación continua a trozos; o cuando la estudiante señaló que, si el número de rectángulos tiende al infinito, la medida de la base de cada rectángulo tiende a 0, y la suma de áreas de estos rectángulos llega a toda el área de la región, quedó representado un razonamiento de covariación continua suave.

Asimismo , no se identifican extractos que correspondan a comportamientos relacionados con un razonamiento de coordinación gruesa de valores, precoordinación de valores y sin coordinación, lo cual no significa que no se hayan dado, ya que al respecto Thompson y Carlson (2017) afirman que, si en algún momento un estudiante razona de manera variable entre niveles, se considera que razona en el nivel superior y que puede razonar de acuerdo con niveles inferiores, lo que se interpreta como una evolución en el razonamiento. La falta de evidencia para comportamientos de otros niveles puede estar relacionada con las preguntas que se proponen al estudiante.

La evidencia identificada sugiere que la coordinación de los cambios en los valores de las variables en la resolución de los problemas sobre integral definida es relevante, debido a que, a medida que el estudiante avanza en la resolución, se logra una evolución en su razonamiento que se refleja en la forma de analizar el problema y en la forma de aproximarse a una respuesta más refinada, es decir, más completa. Al respecto, Carlson *et al.* (2013) señalan que a medida que un individuo desarrolla acciones mentales que forman su imagen de covariación, se va logrando un razonamiento covariacional más sofisticado.

En este estudio se presentan coincidencias con lo expuesto en los trabajos Harini *et al.* (2018) y Aranda y Callejo (2017), centrados en el estudio de la integral definida desde una perspectiva del razonamiento covariacional, dado que se identificaron descriptores asociados con un razonamiento covariacional en los tres niveles superiores del constructo teórico; la diferencia con el primero de ellos radica en el constructo teórico de razonamiento covariacional utilizado y, con el segundo trabajo, en el objeto de estudio, que no era el razonamiento covariacional.

Conclusiones

La revisión de la literatura muestra investigaciones que abordan la integral definida a través de procesos de aproximación con sumas de Riemann; sin embargo, se encontraron solo dos artículos que tienen que ver con procesos de acumulación. Si se desea hacer un estudio de esta naturaleza, se requiere contar con más investigaciones que se reporten con esta orientación.

El análisis realizado nos permite afirmar que, en los artículos seleccionados, se identifican comportamientos relacionados con el razonamiento covariacional de los estudiantes, durante los procesos de resolución de los problemas. Esto se identifica cuando en sus soluciones involucran procesos de aproximación con sumas de Riemann y procesos de acumulación; esto resulta relevante porque permite identificar una relación entre el razonamiento covariacional y el estudio de la integral definida. Esta relación puede ser un indicio de que el razonamiento covariacional es un eje para el estudio de la integral definida a través de estos procesos dinámicos.

Se identificó que, en los procesos de aproximación a la medida de un área, emerge un razonamiento covariacional a partir de la coordinación de dos variables, entre el número de rectángulos y la suma de las medidas de sus áreas. Por su parte, en los procesos de acumulación surge un razonamiento covariacional basado en la coordinación de tres variables, entre el extremo superior derecho del intervalo donde termina la acumulación, la función que permite las acumulaciones y el valor de la acumulación. Otro aspecto por considerar es la importancia de tomar en cuenta las diferentes variables que se manipulan y los cambios simultáneos que ocurren entre ellas; las evidencias encontradas sugieren que es importante poner énfasis en la coordinación de valores, y fomentar que el estudiante vaya transitando de una covariación continua a trozos a una covariación continua suave.

Se identificó que los estudiantes pudieron avanzar en la resolución de los problemas a través de procesos de aproximación o procesos de acumulación sin hacer visibles comportamientos de los primeros niveles del razonamiento covariacional propuestos por Thompson y Carlson (2017).

Al identificar en los trabajos revisados descripciones asociadas con un razonamiento covariacional en los ejercicios de los estudiantes durante la resolución de las tareas propuestas, se puede inferir que el razonamiento covariacional es un elemento por tomar en cuenta para el estudio de la integral definida. Esto abre nuevas preguntas de investigación, tal como: ¿qué aporta el razonamiento covariacional para el estudio de la integral definida? Las respuestas podrían sugerir la necesidad de utilizar otros enfoques teóricos para poder analizar este proceso, como la teoría APOE que habla del proceso y del objeto cuando se estudia un concepto. Es decir, utilizar la descomposición genética de la integral definida de Boigues *et al.* (2010) para aproximarse a este concepto y buscar los descriptores en trabajos que la utilicen. Este hallazgo lleva a cuestionar sobre la posibilidad de identificar comportamientos del razonamiento covariacional de los estudiantes cuando resuelven problemas relacionados con la integral definida desde enfoques distintos al de aproximación o acumulación.

Como una limitación de este trabajo, se reconoce la necesidad de un estudio que incluya un mayor número de trabajos que permita confirmar los hallazgos de esta investigación.

Agradecimientos

A la Pontificia Universidad Católica del Perú y al Instituto Politécnico Nacional a través de los proyectos de investigación 20201191 y 20210725 por el apoyo brindado para la realización del artículo.

Referencias

Aranda, C. y Callejo, M. (2017). Construcción de la función integral y razonamiento covariacional: dos estudios de casos. *Bolema, 31*(58), 777-798. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a13

Aranda, C. y Callejo, M. (2020). Construcción del concepto de integral definida usando geometría dinámica utilizando distintos sistemas de representación. *Paradigma, 41*(2), 305-327. https://doi.org/10.37618/paradigma.1011-2251.0.p305-327.id901

Araujo, M. (2011). Las revisiones sistemáticas (I). *Medwave, 11*(11), 1-4. http://doi.org/10.5867/medwave.2011.11.5220

Boigues, F., Llinares, S. y Estruch, V. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,13*(3), 255-282.

Caglayan, G. (2016). Teaching ideas and activities for classroom: integrating technology into the pedagogy of integral calculus and the approximation of definite integrals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(8), 1261-1279. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1176261

Carlson, M., Larsen, S. y Jacobs, S. (2001). An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation. En R. Speiser, C. Maher y C. Walter (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 145-153). PME-NA.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *EMA, 8*(2), 121-156.

Castillo-Garsow, C., Johnson, H. y Moore, K. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics, 33*(3), 31-37.

Gisbert, J. y Bonfill, X. (2004). ¿Cómo realizar, evaluar y utilizar revisiones sistemáticas y metaanálisis? *Gastroenterología y Hepatología, 27*(3), 129-149. https://doi.org/10.1016/S0210-5705(03)79110-9

Harini, N., Fuad, Y. y Ekawati, R. (2018). Students' covariational reasoning in solving integrals' problems. *Journal of Physics: Conference Series, 947*(1), 1-7. https://doi.org/10.1088/1742-6596/947/1/012017

Ikram, M., Purwanto, P., Parta, I. N. y Susanto, H. (2020). Mathematical reasoning required when students seek the original graph from a derivative graph. *Acta Scientiae, 22*(6), 45-64. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5933

Jiménez, M. y Mejía, H. (2015). Una orquestación instrumental para el estudio de la integral definida. *El Cálculo y su Enseñanza*, 6, 71-102. https://1library.co/document/z3oj60mz-orquestacion-instrumental-estudio-integral-definida.html

Jiménez, M. (2017). *Estudio de la integral definida: un acercamiento a través de la función de acumulación.* [Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. https://matedu.cinvestav.mx/~tercercoloquiodoctorado/memorias/art/001.pdf

Jones, S. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *Journal of Mathematical Behavior*, 38, 9-28. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.001

Kouropatov, A. y Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM Mathematics Education, 46*(4), 533-548. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0571-5

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 165-190. https://doi.org/10.1023/A:1003956417456

Martínez-Miraval, M. y García-Cuéllar, D. (2020). Estudio de las aprehensiones en el registro gráfico y génesis instrumental de la integral definida. *Formación Universitaria, 13*(5), 77-190. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000500177

Martínez-Miraval, M. y García-Rodríguez, M. (2022). Razonamiento covariacional de estudiantes universitarios en un acercamiento al concepto de integral definida mediante sumas de Riemann. *Formación Universitaria, 15*(4), 105-118.

Oehrtman, M, Carlson, M. y Thompson, P. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. En M. P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics, MAA Notes* (Vol. 73, pp. 27-42). Mathematical Association of America.

Saldanha, L. y Thompson, P. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S. B. Berensah, K. R. Dawkins, M. Blanton, W. N. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood, & L. Stiff (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 298-304). North Carolina State University.

Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *Journal of Mathematical Behavior*, 33, 230-245. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.12.002

Tatar, E. y Zengin, Y. (2016). Conceptual Understanding of Definite Integral with GeoGebra. *Computers in the Schools, 33*(2), 120-132. https://doi.org/10.1080/07380569.2016.1177480

Thompson, P. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181-234). SUNY Press.

Thompson, P. y Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. En M. P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics, MAA Notes* (Vol. 73, pp. 43-52). Mathematical Association of America.

Thompson, P. y Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Wagner, J. (2017). Students' Obstacles to Using Riemann Sum Interpretations of the Definite Integral. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4*(3), 327-356. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0060-7

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld y J.J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, IV* (Vol. 8, pp. 103-127). American Mathematical Society.

Forma de citar este artículo

Martínez-Miraval, M. A. y García-Rodríguez, M. L. (2023). El razonamiento covariacional y su papel en el estudio de la integral definida desde la resolución de problemas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (54), 154-171. https://doi.org/10.17227/ted.num54-16602