ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN
RESEARCH REPORT
http://dx.doi.org/10.14482/zp.30.373

El teorema de Pitágoras en el marco del modelo de Van Hiele: propuesta didáctica para el desarrollo de competencias en razonamiento matemático en estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Anna Vitiello*

The pythagorean theorem based on the Van Hiele model: A didactic proposal for developing mathematical reasoning competences in ninth-grade students of the Educational Institution Anna Vitiello

MARYURI ZELAIDA ÁVILA MORENO

Magíster en Educación de la Universidad Autónoma de Bucaramanga. Licenciada en Matemáticas. Docente de Magisterio. Docente con 18 años de experiencia laboral en el área de Matemáticas. Trabaja en la Secretaría de Educación Norte de Santander, I.E. Anna Vitiello de Los Patios, Norte de Santander, Colombia.
Correo electrónico: mazam31@gmail.com

CÓDIGO ORCID 0000-0002-6574-8445

* Este artículo es producto de investigación de la maestría en Educación de la Universidad Autónoma de Bucaramanga.

RESUMEN

La incursión de la investigación cualitativa en el aula de clase, mediante la investigación-acción, ha planteado la necesidad de desarrollar la competencia razonamiento matemático desde el aprendizaje del teorema de Pitágoras enmarcado en el modelo de Van Hiele con los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Anna Vitiello-Hogar Santa Rosa de Lima (en adelante: AV-HSRL).

Para tal efecto, se diseñó una prueba diagnóstica, siete sesiones de clase y una prueba final, aplicando los estándares de competencias establecidos por el Ministerio de Educación Nacional, e implementando estrategias pedagógicas con base en los niveles de razonamiento geométrico del modelo de Van Hiele.

Los resultados sugieren la necesidad de implementar la formación de competencias matemáticas mediante actividades colaborativas, en las cuales el estudiante se motive e involucre en el desarrollo de su razonamiento geométrico.

Palabras clave: Competencias, competencia matemática, razonamiento matemático, teorema de Pitágoras, modelo de Van Hiele, y aprendizaje colaborativo.

ABSTRACT

The presence of qualitative research in the classroom, through action research, created the need to help the ninth-grade students of the Institución Educativa Anna Vitiello "Hogar Santa Rosa de Lima", (from now on: AV-HSRL), to develop their mathematical reasoning competence through the learning of the Pythagorean theorem based on the Van Hiele Model.

For this purpose, a diagnostic test, seven class sessions and a final test were designed, all of them meeting the standards established by the Ministry of National Education and implementing some pedagogical strategies based on the 5 levels of geometric thinking developed in the Van Hiele Model.

The results of this test suggest the need to teach mathematical skills through collaborative activities that can involve and encourage students to developing their geometric reasoning.

Key words: Competence, mathematical skills, mathematical reasoning, Pythagorean theorem, Van Hiele Model, collaborative learning.

Como citar este artículo:

Ávila, M. (2019). El teorema de Pitágoras en el marco del modelo de Van Hiele: propuesta didáctica para el desarrollo de competencias en razonamiento matemático en estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Anna Vitiello. *Zona Proxima, 30,* 1-19.

Recibido: 16 de julio de 2017
Aprobado: 8 de febrero de 2019

Introducción

Las matemáticas y la geometría constituyen un eje fundamental en la formación académica por tratarse de una competencia básica. En este sentido, y con el fin de disminuir el porcentaje de insuficiencia en los niveles de desempeño en el área de matemáticas, se toma como objeto matemático el teorema de Pitágoras, imprescindible en el ámbito escolar de noveno grado, para fortalecer el pensamiento geométrico, a través del razonamiento, y así mejorar la calidad educativa.

No obstante, esto requiere de la disposición de los estudiantes hacia el estudio de la geometría. En consecuencia, aplicando los niveles de razonamiento geométrico propuestos por el modelo de Van Hiele, se plantean una serie de actividades de aprendizaje relacionadas con experiencias de la vida cotidiana que despierten curiosidad en el estudiante, además de promover el uso de material concreto y la solución de problemas afrontando las situaciones; por ello se le invita a la reflexión, así como a buscar salidas para desarrollar pensamiento autónomo, potenciar habilidades, y desarrollar competencias desde el razonamiento matemático.

Para el desarrollo de esta propuesta se implementaron variadas estrategias con base en el enfoque de competencias, lo que permitió atender, dentro de un ámbito de aprendizaje colaborativo, el mejoramiento del razonamiento matemático-geométrico de los estudiantes de noveno grado conforme a lo establecido por el Proyecto Educativo de la Institución Educativa AV-HSRL.

Problema de investigación

Dentro del contexto nacional los resultados que se han venido dando en el aprendizaje de las matemáticas no han sido lo suficientemente competitivos, inclusive los maestros observan frecuentemente la escasa de voluntad de los estudiantes para abordar los contenidos del área y apropiarse de los conocimientos inmersos en la disciplina (Jaramillo, 2014).

Si bien es cierto que el problema de los bajos resultados en el área de matemáticas suele atribuirse a un problema de aprendizaje de los estudiantes, en realidad la situación remite a un problema de enseñanza que exige "una didáctica más centrada en el "enseñar a pensar" que en el repetir contenidos" (Jaramillo, 2014, p. 78).

De acuerdo con Brihuega (2006), como se citó en Bonilla (2015), "lo importante en nuestras clases debe ser fomentar las estrategias del pensamiento abstracto (...)" (p. 2); sin embargo, para Jaramillo (2014) las clases de matemáticas continúan siendo magistrales, expositivas o tradicionales frente a lo cual a los estudiantes les resulta difícil comprender significados sin despejar previamente esa natural abstracción con que se les representa.

Para lograr una educación más orientada al desempeño que a los contenidos, el MEN (2006) definió hace poco más de diez años los *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas* sentando las bases formativas en estas áreas a partir del enfoque pedagógico de la evaluación de competencias. Sin embargo, no se han observado mejoras en el rendimiento académico de los estudiantes respecto de su capacidad para comprender y aplicar el razonamiento matemático.

De hecho, Jaramillo (2014) insiste en que esto se debe a la tendencia a mantener formas de enseñanza basadas en la repetición, lo cual suprime la reflexión como oportunidad para el estudiante de comprender. De este modo, las propuestas de aula resultan ausentes frente a la necesidad de hacer más reflexivo y pertinente el razonamiento matemático.

Hace unos años el MEN (2016) presentó los *Derechos básicos de aprendizaje* (DBA), un conjunto de aprendizajes estructurantes para los niños y jóvenes en cada uno de los grados de los niveles de formación, que provocaron el análisis y reflexión por parte de la comunidad educativa en mesas de discusión en todo el país.

Consecuentemente, los DBA del área de matemáticas destacan que en el aspecto formativo de los estudiantes de noveno grado es fundamental el desarrollo del razonamiento espacial, lo que puede entenderse como "el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales las relaciones entre ellos y las transformaciones son construidos y manipulados" (Clements y Battista, 1992, como se cit**ó** en Fernández, 2011, pp. 12-13).

En este sentido, cuando los DBA del área de matemáticas de noveno grado hacen referencia al razonamiento espacial, están señalando que las propuestas de formación tienen como propósito conocer y ampliar la cognición geométrica y didáctica de los estudiantes desde la práctica.

Proponer la enseñanza del razonamiento espacial o geométrico, en tanto que es una forma de razonamiento matemático, significa desarrollar competencias para construir representaciones, propiedades y relaciones geométricas, así como la aplicación de teoremas para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes (MEN, 2016). Teniendo en cuenta lo anterior es necesario preguntarse:

¿En qué nivel de razonamiento matemático están en los estudiantes de noveno grado de la institución educativa AV-HSRL para el aprendizaje del teorema de Pitágoras?

¿Es viable una propuesta didáctica que permita el desarrollo de competencias de razonamiento matemático desde el aprendizaje del teorema de Pitágoras basada en el modelo de Van Hiele en los estudiantes de noveno grado de la institución educativa AV-HSRL?

¿Cómo desarrollar competencias de razonamiento matemático en estudiantes de noveno grado a través de una propuesta didáctica desde el aprendizaje del teorema de Pitágoras basada en el modelo de Van Hiele?

Justificación

El teorema de Pitágoras es uno de los teoremas más usado en las matemáticas dada su aplicabilidad algebraica, el desarrollo conceptual de los números irracionales, el concepto de distancia entre dos puntos, las relaciones de los lados de un triángulo rectángulo, el cálculo de medidas indirectas y la definición de las razones trigonométricas.

Debido a su vinculación con el pensamiento geométrico, este teorema ocupa un lugar importante dentro de los grados de octavo y noveno grado según los estándares de competencias matemáticas establecidos por el MEN (2006), si se usa como fundamento para desarrollar aquellos temas correspondientes a las distancias entre dos puntos, cónicas y trigonometría; elementos teóricos con los que guarda estrecha relación.

Sin embargo, en primaria y secundaria usualmente los contenidos de geometría son presentados a los estudiantes como el producto acabado de la actividad matemática, es decir, la enseñanza tradicional de esta disciplina ha hecho hincapié en la memorización de fórmulas para calcular áreas, volúmenes, definiciones geométricas, teoremas y propiedades; mediante elaboraciones mecanicistas y descontextualizadas (Abrate, Delgado y Pochulu, 2006).

Agregan los autores que algunos docentes priorizan la enseñanza de las matemáticas en otras áreas y van desplazando los contenidos de geometría hacia el final del curso, lo que les implica la exclusión de estos temas o su abordaje de forma superficial; por eso sus implicaciones resultan fundamentales en la instrucción de la geometría pitagórica de cara a organizar unidades de enseñanza y evaluar el progreso de los estudiantes (Clements y Battista, 1992, como se citó en Fernández, 2011).

Además, según Goncalves (2006) existen diversas investigaciones sobre la evolución del conocimiento y el aprendizaje en el área de geometría pero las diferentes situaciones que se presentan en las aulas evidencian la necesidad, por parte de docentes y estudiantes, de promover un aprendizaje más significativo sobre la base de un enfoque de competencias.

Por lo tanto, las transformaciones necesarias para alcanzar un mayor aprendizaje requieren una visión general del contexto de la enseñanza y aprendizaje de la geometría, lo cual permitirá tomar acciones tendientes a mejorar y corregir los posibles errores.

Contextualización de la institución

La institución educativa AV-HSRL es una institución de carácter oficial para la educación en los niveles de preescolar, básica primaria, secundaria y media técnica. Se halla localizada en un punto medio entre los municipios de Villa del Rosario y Los Patios, Norte de Santander, Colombia, zona fronteriza con la República de Venezuela y a su alrededor se encuentran asentamientos urbanos con estratos socioeconómicos bajos medios y bajos. La influencia de los migrantes venezolanos, producto de la crisis económica que azota al vecino país, y de aquellas personas desplazadas por la violencia en el territorio colombiano, ha contribuido enormemente a la pérdida de la solidaridad, sentido de pertenencia e identidad cultural dentro de la institución.

Tales condiciones genera, cada vez con mayor recurrencia, casos de maltrato, abuso, y abandono a los niños, pues la pérdida o ausencia de bases sólidas familiares, hacen propicio que este fenómeno se presente.

Las familias de los estudiantes pertenecen a estratos uno y dos, y están formadas en un alto porcentaje por familias incompletas con madres o padres cabezas de hogar o recompuestas, que en su mayoría poseen trabajos informales; algunos son empleados o comerciantes, poseen todos los servicios públicos, como agua, luz e incluso tienen acceso a internet.

El colegio cuenta con una única sede que atiende a 757 alumnos en total: 411 estudiantes en primaria y 346 en secundaria; de ellos 343 son hombres y 414 son mujeres. Es importante anotar que de esta población 60 niñas o jóvenes pertenecen al Hogar Santa Rosa de Lima, internado que se encuentra en el mismo terreno de la institución, pues son personas en situación de vulnerabilidad y no pueden estar con sus familias; el hogar las acoge y les garantiza protección y educación.

Objetivo general

Desarrollar la competencia de razonamiento matemático con el aprendizaje del teorema de Pitágoras enmarcado en el modelo de Van Hiele para los estudiantes de noveno grado de la institución educativa AV-HSRL.

Objetivos específicos

- Caracterizar a los estudiantes en los conocimientos previos necesarios para el aprendizaje del teorema de Pitágoras en los jóvenes de noveno grado de la institución educativa AV-HSRL.
- Diseñar una propuesta didáctica que permita el desarrollo de competencias de razonamiento matemático en los estudiantes de noveno grado de la institución educativa AV-HSRL desde el aprendizaje del teorema de Pitágoras basándose en el modelo de Van Hiele.

- Implementar una propuesta didáctica y el material de apoyo para desarrollar competencias de razonamiento matemático desde el aprendizaje del teorema de Pitágoras según el modelo de Van Hiele en estudiantes de noveno grado de la institución educativa AV-HSRL.
- Evaluar la eficacia de la propuesta didáctica implementada para desarrollar competencias de razonamiento matemático desde el aprendizaje del teorema de Pitágoras con base en el modelo de Van Hiele en estudiantes de noveno grado.

Marco teórico

A continuación se presentan los aspectos teóricos más relevantes, lo que hace necesaria una revisión del concepto de competencias que ha incursionado en la educación básica, media y superior en Colombia. Ello incluye, además de la revisión de la competencia matemática y el modelo de Van Hiele, aspectos fundamentales como el aprendizaje del razonamiento espacial o geométrico y su lugar en los estándares básicos de competencias.

Las competencias en la educación

En 1999 la Unesco definió las competencias como "el conjunto de comportamientos socioafectivos y habilidades cognoscitivas, psicológicas, sensoriales y motoras que permiten llevar a cabo adecuadamente un desempeño, una función, una actividad o una tarea" (Argudín, 2005, como se citó en Ramírez y Medina, 2008, p. 36); esto significó para la educación del siglo xxi un compromiso internacional en torno a una forma de enseñanza-aprendizaje que involucrara vivencialmente a los estudiantes con el conocimiento.

El concepto de competencia, tal y como se entiende en la educación, resulta de las nuevas teorías de cognición y básicamente significa saberes de ejecución. Los saberes en ejecución se contemplan en su conjunto y se conforman por las habilidades generales y específicas que puede demostrar un ser humano. De este modo, la competencia de los individuos se deriva de su dominio de un conjunto de atributos (como conocimiento, valores, habilidades y actitudes) que se utilizan en combinaciones diferentes para desempeñar tareas ocupacionales (Gonczi, 1997, como se citó en Ramírez y Medina, 2008).

Sin embargo, uno de los aspectos más notorios que suele dificultar la formación basada en competencias es la enseñanza tradicional centrada en los contenidos, y que suele prevalecer en las aulas. Para Orden Hoz (2011), la reflexión sobre la enseñanza tradicional llevó a la necesidad de incorporar las competencias en la educación:

> En educación, la idea de competencia como objetivo surgió, en parte, como reacción frente a la posición preeminente del conocimiento en este campo, especialmente del cono-

> cimiento propositivo, saber qué. Por tanto, esta reacción pretende acentuar la acción, es decir, el saber vinculado a las habilidades y destrezas como manifestaciones del conocimiento procedimental, o saber cómo (p. 7).

Entonces, para transformar la educación promoviendo los saberes en ejecución, el Ministerio de Educación Nacional (2006) concibe las competencias como «conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí, para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores» (p. 49). Esta afirmación posee implicaciones didácticas, pues sugiere la necesidad de ofrecer contextos novedosos a las actividades que reten el desarrollo del pensamiento, pues un ambiente carente de recursos resta impacto a los procesos de aprendizaje.

Competencia matemática

Según el Ministerio de Educación Nacional (2006) "las matemáticas son una actividad humana inserta y condicionada por la cultura y por la historia, en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos para plantear y solucionar problemas tanto internos como externos a las matemáticas mismas" (p. 50).

En consecuencia, el rol que juegan las matemáticas en la vida cotidiana involucra a las competencias para que desde allí se alcance una aplicación más pertinente; por tanto, es necesario tener en cuenta que "la competencia matemática contribuye a que los individuos sean conscientes del papel que [(...) aquellas] desempeñan en el mundo y les ayuda a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que se exigen a los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos" (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2012, p. 11).

De este modo, la competencia matemática se define como: "La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos" (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2012, p. 9).

Por otra parte, para alcanzar un mayor y mejor razonamiento matemático, la solución de problemas constituye la mejor manera de expresarse (Archer, 2010); esto significa que el estudiante debe ser capaz de elaborar, desarrollar y consolidar los esquemas mentales adecuados, comprender el enunciado determinando las diferentes relaciones existentes entre las variables y datos, conseguir una movilización de la situación problémica propuesta, encontrar la situación final que explique y justifique la situación inicial propuesta y ser capaz de verificar que la situación final a la que ha llegado corresponde a la solución del problema planteado (Archer, 2010).

Estándares básicos de competencias matemáticas

García (2003) expone en los *Estándares básicos de competencias matemáticas* que estas constituyen una clave indispensable para el desarrollo del pensamiento matemático:

> Más bien que la resolución de multitud de problemas tomados de los textos escolares, que suelen ser sólo ejercicios de rutina, el estudio y análisis de situaciones problema suficientemente complejas y atractivas, en las que los estudiantes mismos inventen, formulen y resuelvan problemas matemáticos, es clave para el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas (p. 52).

De hecho, los modelos basados en solución de problemas para el abordaje de las matemáticas son promovidos por el Icfes y el Ministerio de Educación Nacional; en el documento *Pruebas Saber 3.°, 5.° y 9.°.* Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal 2014 las competencias que evalúa la prueba son: competencias matemáticas de comunicación, modelación, razonamiento, planteamiento y resolución de problemas, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos

Desarrollo del pensamiento geométrico

El estudio de la geometría intuitiva en los currículos de las matemáticas escolares se había abandonado como una consecuencia de la adopción de la "matemática moderna". Desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no solo en lo que se refiere a la geometría.

En consecuencia, en los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial como el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus variadas traducciones a representaciones materiales (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

Además, la necesidad de aprender a mirar la realidad desde una dimensión geométrica implica manipulación de objetos y entornos, de allí la importancia de la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (1998), la investigación actual sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico señala que este sigue una evolución lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, es decir, que los niveles finales corresponden a niveles escolares bastante más avanzados que los que se dan en la escuela.

Desarrollar esta cualidad cognitiva capaz de representar dimensionalmente el espacio se encuentra determinada por características cognitivas individuales y el entorno físico, cultural, social e histórico. "Por tanto, el estudio de la geometría en la escuela debe favorecer estas interacciones. Se trata de actuar y argumentar sobre el espacio ayudándose con modelos y figuras, con palabras del lenguaje ordinario, con gestos y movimientos corporales" (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 38).

Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es uno de los más antiguos teoremas de la historia, uno de los más importantes teoremas de las matemáticas; al respecto González (2008) sostiene: "el Teorema de Pitágoras aparece por doquier en la Matemática. Es la base de multitud de teoremas geométricos, de los estudios sobre polígonos y poliedros, de la Geometría Analítica y de la Trigonometría" (p. 104).

En el marco de las observaciones anteriores este teorema se convierte en uno de los principales recursos matemáticos dentro el contexto escolar, ya que a partir de su demostración se da inicio a la deducción y razonamiento de planteamientos geométricos en los estudiantes.

Además, es necesario destacar que no se pretende que los estudiantes realicen complicadas demostraciones con alto nivel matemático, sino centrarse en el reconocimiento e integración de los aprendizajes del teorema que estos adquieren por sí mismos al crear situaciones que proporcionen las experiencias necesarias a través del desarrollo de actividades guiadas por el docente y de procesos de razonamiento coherentes con el desarrollo del pensamiento geométrico.

El modelo de Van Hiele

El modelo de Van Hiele es la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución de la capacidad de razonar geométrica y espacialmente, pues está adquiriendo cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a geometría escolar (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

Van Hiele propone cinco niveles de desarrollo del pensamiento geométrico que muestran un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría. Teniendo en cuenta las apreciaciones de Jaime (1993), el modelo de Van Hiele incluye dos aspectos:

> Descriptivo, en cuanto que intenta explicar cómo razonan los estudiantes. Esto se hace a través de la definición de cinco "niveles de razonamiento.

> Prescriptivo, porque da unas pautas a seguir en la organización de la enseñanza para lograr que los estudiantes progresen en su forma de razonar (p. 27).

Básicamente este modelo concibe como eje central del aprendizaje de la geometría el proceso que los estudiantes deben transitar para desarrollar su razonamiento geométrico; de este modo, a través de cinco niveles el estudiante progresa en esta capacidad hasta la acumulación de experiencia necesaria para alcanzar un desarrollo cada vez más alto de razonamiento, el cual va ligado a la conceptualización implícita en el lenguaje utilizado, es decir, a la forma de expresarse matemática y geométricamente.

Desde este punto de vista se trata de un modelo constructivista, pues tanto el docente como los estudiantes son sujetos activos dentro de un proceso de aprendizaje orientado por la formación basada en competencias; de allí la importancia de la manipulación de objetos y entorno como factores determinantes para el descubrimiento y generalización de las propiedades, los cuales dan forma al razonamiento geométrico y matemático.

Niveles del modelo de Van Hiele

Teniendo como base el trabajo de Jaime y Gutiérrez (1991), es posible hablar de una división o descripción del trabajo de Van Hiele, de tal manera que los niveles constituyen la aportación fundamental del modelo; es decir, se establece que la forma como se conciben los conceptos geométricos (matemáticos) no es siempre la misma y varía cuando se va progresando en la comprensión de la geometría (de las matemáticas).

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1991) hay cinco formas distintas de entender los conceptos geométricos y para ello se proponen los "niveles de razonamiento" que se construyen o elaboran dentro de un proceso organizado que plantea cinco formas de aproximación de los conceptos, esto debido a que el progreso siempre se produce desde el primero, y de manera ordenada.

A este respecto, Fouz (2006), como se citó en Vargas y Gamboa (2013), afirma que al subir de nivel se hacen explícitos en el estudiante los conocimientos que eran implícitos en el nivel anterior, lo cual indica que va aumentando de esta manera el grado de comprensión y dominio del conocimiento. Esto hace que los objetos de trabajo de este nivel superior sean extensiones de aquellos del nivel anterior

En el primer nivel de razonamiento la consideración de los conceptos es global, y no suelen tenerse en cuenta los elementos ni las propiedades, es decir, no se hace referencia a las características matemáticas tales como igualdad de lados, valor de los ángulos, paralelismo, etc. (Jaime y Gutiérrez, 1991). Se establece que el descubrimiento y la comprobación de propiedades se llevan a cabo mediante experimentación, pero su ausencia no permite apreciar, por ejemplo, que la igualdad de diagonales es consecuencia de la igualdad de ángulos.

En el segundo nivel de razonamiento geométrico la característica fundamental es que los conceptos se entienden y manejan a través de sus elementos lo que hace posible la identificación y generalización de propiedades como características del concepto en cuestión. Sin embargo, las propiedades se utilizan de manera independiente, sin establecer relaciones entre ellas (Jaime y Gutiérrez, 1991).

Este nivel implica el conocimiento de las componentes de las figuras, de sus propiedades básicas y reconocer la igualdad de los pares de lados opuestos del paralelogramo general, pero suele pasar que el estudiante no ve el rectángulo como un paralelogramo particular.

El tercer nivel consiste en el establecimiento de relaciones entre propiedades (Jaime y Gutierrez, 1991); cuando estas propiedades se comprenden y utilizan las definiciones con su sentido matemático, se da paso a la conceptualización. Por ejemplo, si el estudiante conocía la definición del triángulo isósceles como "triángulo con dos lados iguales y uno desigual" y se le introduce una variación de ese concepto como triángulo que posee "al menos dos lados iguales", será capaz de emplear esta nueva definición (Jaime y Gutiérrez, 1991).

Por lo tanto, se comprenden y utilizan clasificaciones no exclusivas, también se llegan a establecer relaciones entre los diversos conceptos a partir de sus definiciones. Por ejemplo, si se define rombo como cuadrilátero con todos sus lados iguales, los alumnos pueden comprender que todos los cuadrados son rombos, pero que no todos los rombos son cuadrados (Jaime y Gutiérrez, 1991).

El cuarto nivel de razonamiento efectúa demostraciones formales, encadenando diversas implicaciones simples desde la hipótesis hasta llegar a la tesis. El avance del cuarto nivel, respecto al tercero, en relación con las definiciones, consiste en la utilización de su equivalencia, esto es, los estudiantes de este nivel pueden admitir y demostrar si dos conjuntos de condiciones corresponden al mismo concepto.

Por ejemplo, decir "cuadrilátero con sus diagonales iguales, perpendiculares y que se cortan en el punto medio" es lo mismo que decir "cuadrilátero con los cuatro lados iguales", y los estudiantes saben que es preciso llevar a cabo la demostración de la doble implicación, para afirmar esa igualdad (Jaime y Gutiérrez, 1991). El cuarto nivel de razonamiento geométrico es propiamente el razonamiento deductivo que entiende el sentido de los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero aún no se hacen razonamientos abstractos, ni se entiende suficientemente el significado del rigor de las demostraciones (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

Finalmente, el quinto es un nivel que pocos desarrollan, por lo general solo se da en universitarios, con capacidad y preparación en geométrica. En este nivel avanzado los alumnos razonan

N° 30 (2019) PÁGS. 33-62
ISSN 2145-9444 (electrónica)

formalmente sobre sistemas matemáticos, pueden estudiar geometría sin modelos de referencia y razonar formalmente manipulando enunciados de este corte tales como axiomas, definiciones y teoremas (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

Es importante destacar que los niveles no están asignados a una edad particular de los estudiantes. Algunos no superan nunca el segundo nivel, mientras que otros alcanzan el cuarto a los 14 o 15 años. La enseñanza y la experiencia personal son un factor importante en el progreso del razonamiento (Jaime y Gutiérrez, 1991). Es por esta razón que, a través del modelo de Van Hiele, los estudiantes construyen su propio conocimiento durante cada una de las fases de aprendizaje, articulando el aprendizaje significativo.

Estándares de competencias y derechos básicos de aprendizaje

Recientemente, el Ministerio de Educación Nacional presentó los derechos básicos de aprendizaje (DBA) como un conjunto de aprendizajes estructurantes en áreas como matemáticas, lenguaje, ciencias naturales y sociales, que deben aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar, desde transición hasta once. Tales aprendizajes se comprenden como una conjunción de conocimientos, habilidades y actitudes que se desarrollan en un contexto dado y al mismo tiempo son estructurantes, en tanto expresan las unidades básicas y fundamentales sobre las cuales se fundamenta el futuro del individuo (Ministerio de Educación Nacional, 2016).

El enunciado número cinco (5) de los DBA correspondientes al grado noveno (9°) establece que el estudiante es capaz de utilizar teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes; en tanto que el aparte de aprendizaje plantea que el estudiante describe y justifica procesos de medición de longitudes; explica propiedades de figuras geométricas que se involucran en los procesos de medición; justifica procedimientos de medición a partir del teorema de Pitágoras, y hace relaciones intra e interfigurales (García, 2003).

De este modo, al finalizar el curso los estudiantes de noveno grado deben ser capaces de expresar el pensamiento espacial y los sistemas geométricos; por consiguiente, lograron: conjeturar y verificar propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas; reconocer y contrastar propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras); aplicar y justificar criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas y usar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas (García, 2003). En síntesis, los estándares básicos de competencias matemáticas reconocen el pensamiento geométrico como una forma de razonamiento matemático que deben desarrollar los estudiantes de noveno grado.

Diseño metodológico

La mayor parte de los estudios cualitativos están preocupados por el contexto de los acontecimientos y centran su indagación en aquellos espacios en que los seres humanos se implican e interesan, evalúan y experimentan directamente (Taylor, 1998, como se citó en Martínez, 2011); en este caso, el contexto del aula expresa necesidades fundamentales de enseñanza, pero al mismo tiempo es el ambiente más adecuado para hacer más participativa la formación de competencias matemáticas y el razonamiento geométrico en estudiantes de noveno grado de educación secundaria.

Mertens (2005), como se citó en Hernández, Fernández y Baptista (2004), al señalar las dos dimensiones referentes al contexto o entorno del aula: conveniencia y accesibilidad, sostiene que la investigación cualitativa aborda los contextos tomados tal y como se encuentran, puesto que no son reconstruidos o modificados por el investigador (Martínez, 2011).

Tipo de investigación

Según Martínez (2006), como se citó en Miguélez (2008), la investigación- acción como tipo de investigación cualitativa se está usando cada vez más en los países en desarrollo para brindar solución a la extensa variedad de sus propios problemas, entre los que se destacan aquellos de índole educativa, de manera que el aula se ha convertido en un espacio propicio para la investigación.

Dicho en palabras de Álvarez-Gayou (2003), la investigación-acción “es un procedimiento de investigación centrado en la búsqueda de mejores resultados, ayudado por la participación de los actores, quienes al mismo tiempo aprenden y se desarrollan como personas” (p. 161).

Teniendo en cuenta que el teorema de Pitágoras es requerido en el grado noveno de educación secundaria por los estándares y derechos básicos de aprendizaje, es adecuado y oportuno incursionar en la solución de triángulos rectángulos y el cálculo de distancias o alturas, además de definir las razones trigonométricas. En este sentido, la investigación acción orientaría un proceso para que los estudiantes del grado noveno incursionen y se apropien de este teorema, no de manera memorística, sino a través del despliegue de su razonamiento matemático.

Para ello desde el modelo de Van Hiele se plantea una serie de actividades de aprendizaje relacionadas con imágenes y experiencias cotidianas que despierten curiosidad mediante el uso de material concreto y estén dirigidas a desarrollar la competencia matemática; esto es, aprender a solucionar problemas afrontando situaciones que impliquen al razonamiento matemático y, de este modo, buscar soluciones.

De allí que concibe su aproximación como un medio para la solución de problemas permitiendo con ello mejoras en la enseñanza: “su propósito fundamental se centra en aportar información que guíe la toma de decisiones para programas, procesos y reformas estructurales" (Sandin, 2003, como se citó en Hernández, Fernández y Baptista, 2004, p. 707).

Población y muestra

La población es el conjunto de personas u objetos de los que se desea conocer algo en una investigación: «el universo o población puede estar constituido por personas, animales, registros médicos, los nacimientos, las muestras de laboratorio, los accidentes viales entre otros» (Pineda y otros, 1994, p. 108). En este caso, la población está conformada por los dos grupos de estudiantes que cursan el grado noveno de l. E. Anna Vitiello-Hogar Santa Rosa de Lima.

Ahora, según Hernández et al. (2004), la muestra en el proceso cualitativo puede estar conformado por un grupo de personas, eventos, sucesos y/o comunidades, entre otros, sobre los cuales se habrán de recolectar los datos, sin que necesariamente sea representativo del universo a población que se estudia.

De este modo, la investigación aplicó la muestra heterogénea debido a que esta presenta un mismo perfil o comparten rasgos similares como pueden ser los jóvenes estudiantes de secundaria. En este caso, la muestra se conformó por veintiocho (28) estudiantes de uno de los dos grupos del grado noveno de l. E. AV-HSRL.

Instrumentos

Una vez definido el problema de investigación, el diseño de investigación y seleccionada la muestra correspondiente, el siguiente paso consiste en la planificación del proceso de recogida de datos y la selección de las técnicas más adecuadas para abordar el problema, las características de los datos y la metodología a utilizar, en este caso, la cuantitativa.

En la indagación cualitativa, el instrumento no es una prueba estandarizada ni un cuestionario ni un sistema de medición; es el mismo investigador, quien constituye también una fuente de datos. Él genera las respuestas de los participantes al utilizar una o varias herramientas, además recolecta datos de diferentes tipos: lenguaje escrito, verbal y no verbal, conductas observables e imágenes (Hernández et al., 2004).

Se diseñó una prueba diagnóstica para caracterizar los niveles de razonamiento de los estudiantes de noveno grado, específicamente en lo referente a los pre-saberes necesarios para el aprendizaje del teorema de Pitágoras.

Posteriormente, se hizo aplicación de una prueba diagnóstica y a partir de esta se desarrollaron siete sesiones con guías orientadas por el Ministerio de Educación Nacional y textos escolares del grado noveno.

Así mismo, se implementó un diario pedagógico donde se registraron observaciones de lo acontecido en cada una de las sesiones.

Finalmente, para evidenciar el desarrollo del pensamiento matemático al término del proceso investigativo se realizó una prueba final a los estudiantes; esta prueba final también utilizó instrumentos liberados por el Ministerio de Educación Nacional. Según Hernández, Fernández y Baptista (1997): "Tal vez el instrumento más utilizado para recolectar datos es el cuestionario. Un cuestionario consiste en un conjunto de preguntas respecto a una o más variables a medir" (p. 285).

La prueba diagnóstica está conformada por ocho (8) preguntas de elaboración propia y tres (3) preguntas, recursos o insumos liberados del Icfes (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación) como el cuadernillo prueba saber 9-2013, el cuadernillo Prueba Saber 9-2015 y el cuadernillo Prueba Saber 9-2012 (Ávila Moreno, 2017).

Las preguntas responden a los tres (3) niveles de razonamiento matemático establecidos en el modelo de Van Hiele, es decir, el reconocimiento (primer nivel) o visualización del objeto, el análisis (segundo nivel), que corresponde a la identificación de manera general de las propiedades del triángulo, y la clasificación (tercer nivel).

El cuestionario prueba final contiene siete (7) preguntas de elaboración propia, cinco (5) preguntas, recursos o insumos tomados del Proyecto Educativo XXI de Sánchez (2016) y tres (3) preguntas liberadas por el Icfes. Este cuestionario permitió contrastar si hubo mejoramiento en la adquisición de la competencia razonamiento matemático por parte del grupo de noveno grado seleccionado como muestra.

Como estrategias didácticas para el fortalecimiento de la respectiva competencia matemática se elaboraron siete guías o cuestionarios que permitieron a los estudiantes profundizar en cada uno de los niveles de razonamiento matemático planteados para el modelo de Van Hiele durante nueve semanas.

También se llevó registro en un Diario Pedagógico. En este diario de trabajo se anotaron las actividades realizadas en cada sesión donde los estudiantes del grado noveno resolvían la respectiva guía. Al utilizar el diario pedagógico como instrumento análogo al diario de campo en la investigación-acción, necesariamente se está incluyendo la observación participante en el contexto del aula.

Proceso de la investigación

De acuerdo a las tres fases esenciales de los diseños de investigación-acción, se hizo necesario hacer un acercamiento de la problemática mediante una revisión de la literatura relacionada con el área a evaluar, esto previo a la elaboración de una prueba diagnóstica de selección múltiple; posteriormente se implementó una prueba piloto con el objetivo de revisar las actividades, los tiempos, las preguntas, los ejemplos y los razonamientos realizados por los estudiantes durante siete (7) sesiones de trabajo y una prueba final.

La implementación del proceso investigativo fue llevado a cabo a partir del mes de agosto de 2016 con los estudiantes de noveno grado; el modelado por competencias orientó una prueba final de selección múltiple que permitió determinar el mejoramiento en la adquisición y desarrollo de la competencia razonamiento matemático-geométrico.

Teniendo en cuenta los resultados del pilotaje, la participación y evaluación de los actores educativos, se identificó un problema mediante un proceso valorativo, posteriormente, siguiendo las instrucciones de Katayama (2014), se propusieron alternativas de solución a la problemática con acciones concretas en las que participaron los propios miembros de la comunidad educativa involucrada por medio de guías para el fortalecimiento de la competencia matemática.

Es decir, una vez determinado el estado de la problemática, se plantea una solución o propuesta que requiere el planteamiento de planes operativos por medio de actividades que refuerzan el nivel de profundización respecto del desarrollo de la competencia.

Finalmente, según Katayama (2014), "se implementan y se evalúan los resultados. En cada una de estas etapas es necesario hacer continuas evaluaciones y retroalimentarse para ir mejorando los procesos o incluso ir realineando el plan operativo" (p. 61).

En tanto que como actividad de diagnóstico se aplicó un instrumento o prueba diagnóstica a los estudiantes del grado noveno que, como se mencionó, estaba compuesto por preguntas de selección múltiple con única respuesta liberadas por el Icfes (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación) y otras de elaboración propia siguiendo el modelo de Van Hiele.

El instrumento permitió valorar el dominio que poseían los estudiantes respecto de los tres niveles del modelo de Van Hiele para determinar los aspectos a mejorar en la competencia razonamiento matemático en los estudiantes del grado noveno (9º) en la institución educativa AV-HSRL. Cabe anotar que los resultados de la prueba piloto realizada en agosto de 2016 y la desarrollada con los estudiantes de noveno grado de 2017 no mostraron cambios significativos en sus resultados ya que sus respuestas eran muy similares.

Una vez identificada la situación problemática, se adecuaron las actividades en siete intervenciones a través de las cuales se profundizó en el desarrollo del pensamiento matemático mediante guías con problemas relacionados con el teorema de Pitágoras y los niveles de Van Hiele.

Para el diseño definitivo de las sesiones de intervención, se tuvieron en cuenta los resultados obtenidos en la experimentación piloto del 2016. Es decir, los alumnos habían explorado sus razonamientos matemáticos por medio de siete (7) sesiones de trabajo y después, se registraron los correspondientes diarios de campo.

Lo anterior dio lugar a que se rediseñaran las sesiones de trabajo en siete (7) sesiones organizadas y planeadas para el estudio del teorema de Pitágoras teniendo en cuenta las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, e implementando el enfoque de competencias y el aprendizaje colaborativo para incentivar y promover la reflexión y análisis de los estudiantes.

En este orden de ideas, dentro de cada intervención se diseñaron experiencias con el objetivo de propiciar el avance de un nivel de razonamiento a otro, para cada uno de los elementos conceptuales necesarios en la comprensión del teorema de Pitágoras.

Triangulación de métodos

Dada la complementariedad del enfoque de competencias en el campo educativo, la versatilidad de sus instrumentos constituye un insumo pedagógico valioso para el estudiante; sin embargo, para analizar la información, la complementariedad la aporta la triangulación de métodos. Esto ofrece diferentes perspectivas de aproximación a la valoración de la problemática; al decir de Todd, Nerlich y McKeown (2004), como se citó en Hernández et al. (2004), estos autores sostienen que “la triangulación de métodos solamente se aplica cuando estos son complementarios” (p. 790).

La triangulación de métodos requiere una perspectiva conjunta que incluye, además de la prueba diagnóstica inicial y la prueba final, los cuestionarios o siete (7) guías orientadas por el Icfes conforme al enfoque de competencias promovido por el Ministerio de Educación Nacional; así como el registro del diario pedagógico que “contrasta los hallazgos, resultados y conclusiones que se hubiesen obtenido a través de la observación participante” (Sandoval, 1996, p. 144).

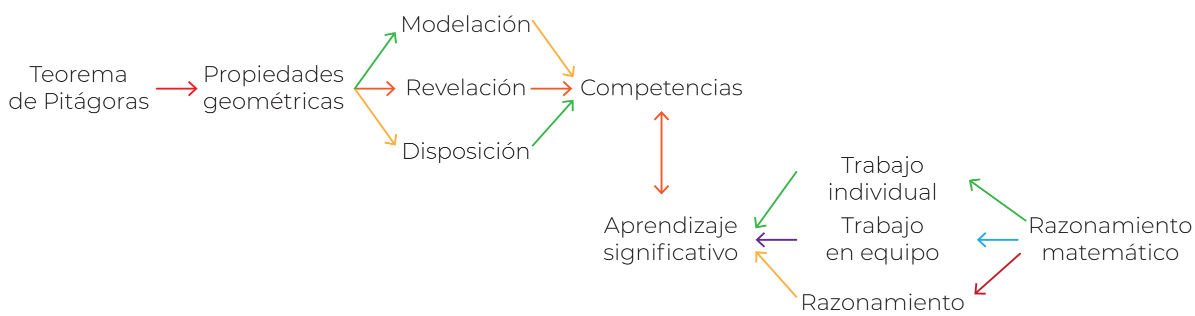
Categorización

Tabla 1. Categorización y descriptores de aprendizaje

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍAS	DESCRIPTORES DE APRENDIZAJE
TEOREMA DE PITÁGORAS	PROPIEDADES GEOMÉTRICAS	Identifica los diferentes tipos de triángulos, sus características y propiedades.
		Reconoce los criterios de congruencia de triángulos.
		Identifica los diferentes elementos de un triángulo rectángulo.
COMPETENCIA RAZONAMIENTO MATEMÁTICO	MODELACIÓN DEL TEOREMA	Construye triángulos para modelar situaciones problemas.
		Construye modelos de representación de la demostración del teorema de Pitágoras a través de material concreto.
	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	Aplica los criterios de congruencia de triángulos para resolver situaciones.
		Resuelve problemas cotidianos utilizando el teorema de Pitágoras.
APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO	TRABAJO INDIVIDUAL	Aplicación independiente de la actividad.
	TRABAJO EN EQUIPO	Comunicación y colaboración entre pares.
		Apoyo al grupo de trabajo.
	RAZONAMIENTO MATEMÁTICO	Explica.
		Resuelve.
		Recuerda.
		Comprende.

Fuente: elaboración propia.

Figura 1. Diagrama de categorías



Fuente: Elaboración propia.

Validación de los instrumentos

Una investigación tiene un alto nivel de validez si al observar o apreciar una realidad, esta se observa o aprecia en sentido pleno y no solo considerando un aspecto o parte de la misma (Martínez Miguélez, 2016); es decir, una investigación tendrá un alto nivel de validez en la medida en que sus resultados reflejen una imagen amplia, clara y representativa de la realidad o situación estudiada.

Por su parte, en las aproximaciones cualitativas ha de desarrollar una actividad científica y sistemática. Luego, se siguió la ruta planteada por Gómez y Roquet (2012), para dar cuenta de la validez de la investigación:

1) Asegurar el rigor de su investigación y ello implica garantizar la credibilidad del estudio desarrollado con el auspicio de la I. E. Por tanto, la vinculación del docente investigador a la institución educativa que le sirve de contexto ratifica la credibilidad de la misma.

2) Garantizar la veracidad del estudio, tanto como la fiabilidad y la validez de los resultados obtenidos. Para ello se dispuso de varias estrategias: a) triangulación: de datos y de fuentes; de técnicas de recogida de información y triangulación de metodologías y b) confirmación del estudio por parte de expertos o informantes secundarios (Gómez y Roquet, 2012); en este caso, los instrumentos fueron aprobados por la Dirección de la investigación.

Resultados y discusión

Para organizar el análisis se organiza la información en tablas que dan cuenta de las categorías, subcategorías, observaciones del diario de campo, el análisis y algunas conclusiones generales.

Tabla 2. Categoría teorema de Pitágoras: propiedades geométricas

Categoría	Subcategorías	Observaciones	Análisis	Conclusiones
Teorema de Pitágoras	Propiedades geométricas	Se hizo evidente que el reconocimiento de las propiedades geométricas fue simplemente visual. En cuanto al triángulo rectángulo, fue notoria la falta de apropiación de los estudiantes respecto de sus partes y sus propiedades.	Los estudiantes se limitaron a describir en forma global las figuras evidenciando pre-saberes básicos. En consecuencia, los estudiantes aún no comprenden la demostración y aplicación del teorema de Pitágoras.	En un principio, los estudiantes no hicieron evidente en la práctica las relaciones de los lados del triángulo con el área de los cuadrados, esto permitió caracterizar a los estudiantes en el primer nivel de dominio de Van Hiele.

Tabla 3. Categoría competencia matemática: comunicación y modelación

Categoría	Subcategorías	Observaciones	Análisis	Conclusiones
Competencias matemáticas	Comunicación y modelación	El grupo evidencia un manejo de las propiedades de los triángulos, incluso algunos describen implicaciones de estas propiedades, y podría decirse que se encuentran en la transición del nivel dos al tres. Sin embargo al momento de resolver situaciones es necesario utilizar aprendizajes anteriores como operaciones con decimales y solución de ecuaciones; se hace necesario reforzar estos algoritmos y sus correspondientes procesos. Con la manipulación de triángulos en cartulina, la actividad se tornó más atractiva y esto se evidenció en una mayor participación.	Al haberse apropiado del vocabulario característico de la temática y de los conceptos relacionados, Jaime y Gutiérrez (1998) sostienen que los estudiantes tienen que utilizar el vocabulario adecuado para describir la estructura sobre la que han estado trabajando, pues se debe aprender y afianzar el lenguaje que le corresponde a cada nivel.	Los pre-saberes referentes al tema parecen estar claros para el grupo, que identifica los elementos de un triángulo rectángulo y reconoce los criterios de semejanza de triángulos. Los alumnos manejan con propiedad el vocabulario de la temática y los conceptos relacionados. Solo hasta la sesión cinco los estudiantes demostraron ser capaces de encontrar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, así como lograron hallar el valor de dos ángulos basados en la propiedad de los triángulos, lo que significa apropiación del nivel dos de razonamiento del teorema de Van Hiele.

Tabla 4. Categoría aprendizaje significativo: trabajo individual y trabajo en equipo

Categoría	Subcategorías	Observaciones	Análisis	Conclusiones
Aprendizaje significativo	Trabajo individual y trabajo en equipo	Durante el desarrollo de cada problema se observa el intercambio de ideas y experiencias según el modelo de Van Hiele "la interacción entre alumnos/as es importante ya que les obliga a ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de modo comprensible para los demás. Se puede observar que los estudiantes identifican y manejan las propiedades de los triángulos y el teorema de Pitágoras; sin embargo, cuando necesitan resolver raíces o despejar ecuaciones presentan dificultades. Se evidencia la transición de los niveles de razonamiento; fue necesario retomar el análisis de los lados y ángulos para llevarlos a definir conclusiones sobre las relaciones de estos elementos.	El trabajo entre pares fortaleció las actividades, pues la manipulación y demostración del teorema de Pitágoras con material específico relacionó las nuevas experiencias de aprendizaje y los conocimientos previos de los estudiantes; así como también las habilidades, los intereses, las motivaciones y las expectativas con las se aproximaron a una nueva situación o actividad de aprendizaje para construir una primera comprensión, es decir, un primer conjunto de significados relativos a esa situación o actividad y a sus componentes (Coll et al., 2010).	La manipulación y demostración del teorema de Pitágoras con material concreto abrió las puertas a la comprensión del tema, el hecho de que los estudiantes vieran por ellos mismos y demostraran este teorema afirmó la confianza y comprensión de los estudiantes lo que constituye un avance en la tarea de aprendizaje mediado significativa y colaborativamente. La temática denominada congruencia de triángulos y el uso de una herramienta interactiva familiar permitieron dar a conocer el tema exponiendo figuras y valiéndose de imágenes relacionadas con su entorno inmediato, y asimismo posibilitando significativamente el intercambio de ideas entre pares.

Tabla 5. Categoría aprendizaje significativo: Razonamiento matemático

Categoría	Subcategorías	Observaciones	Análisis	Conclusiones
Aprendizaje significativo	Razonamiento matemático	Se observó que los estudiantes avanzaron grupalmente en el razonamiento de las propiedades de los triángulos para obtener conclusiones; pues en contraste con el estado inicial que estos presentaban, resulta evidente el avance progresivo con el paso de uno a otro nivel. En este sentido, la actividad que realiza el estudiante para desarrollar su capacidad de razonamiento debe orientarse a hacerle consiente de esta habilidad, ya que la práctica repetida y la experiencia son las que darán lugar al desarrollo de su forma de razonar. (Jaime y Gutiérrez, 1990)	Evidentemente, el razonamiento del grupo es diferente en los estudiantes; es decir, aunque se ha proporcionado la misma experiencia para todos, es notorio que unos pocos expresan un avance más significativo que otros. Puede tener mucha relación el manejo de saberes necesarios para la solución de ciertos problemas; en este caso, las operaciones con decimales y la solución de ecuaciones con una incógnita permitió el avance a estos estudiantes, mientras que los que no manejaban estos conceptos presentaron mayor dificultad.	El razonamiento matemático de los estudiantes logró el nivel dos de Van Hiele; sin embargo, continúa siendo un tropiezo el manejo de operaciones como la radicación. Este inconveniente se va subsanando poco a poco con el manejo frecuente de estas operaciones, tal y como ocurrió con los decimales Fue notorio el avance del razonamiento matemático en cuanto a la contrastación de propiedades de los triángulos, así como la modelación y resolución de problemas, pues la mayoría respondió acertadamente, ya que utilizaron la información y propiedades requeridas en su justificación para la solución de dichas situaciones.

Tabla 6. Categoría competencia matemática: resolución de problemas

Categoría	Subcategorías	Observaciones	Análisis	Conclusiones
Competencias matemáticas	Resolución de problemas	Se puede observar que el razonamiento de los estudiantes no es el mismo en cada uno de ellos, sin embargo, se podría decir que hay una división en dos grandes grupos: algunos muestran más agilidad en el momento de resolver situaciones problemas que otros, pero lo más importante es que aquellos que mostraban inseguridad y timidez, ahora son cada vez más autónomos y seguros. Como estrategia de formación, la solución de problemas en la dinámica de la enseñanza docente dentro del marco de las competencias impacta en el aprendizaje de los estudiantes, pues el razonamiento matemático encuentra en la solución de problemas la mejor manera de expresarse.	En general el grupo muestra avances en la solución de los problemas planteados, pues comienzan a identificar errores en las soluciones presentadas y a verificar sus hallazgos. Aplicar la resolución de problemas mediante el enfoque de competencias requiere tener en cuenta los procesos de desarrollo que son propios de los estudiantes lo cual implica procesos formativos graduales; en consonancia con Jaime y Gutiérrez (1998) afirman que no se debe pretender que una persona alcance un nivel de razonamiento mientras no haya adquirido suficiente destreza en las anteriores.	Se observa un avance en la solución de los problemas planteados al desarrollar más agilidad con las operaciones algebraicas. El grupo adquirió poco a poco las destrezas requeridas en la solución de los problemas matemáticos. En general los estudiantes identificaron los criterios de semejanza, pues aunque en los problemas evaluados cometieron errores en operaciones, no fue así en el planteamiento de las proporciones.

N° 30 (2019) PÁGS. 33-62
ISSN 2145-9444 (electrónica)

Conclusiones

Para cada intervención se diseñaron experiencias con el objetivo de propiciar el avance de un nivel de razonamiento a otro acorde con cada elemento conceptual necesario en la comprensión del teorema del teorema de Pitágoras, es decir, los triángulos, el teorema de Pitágoras y solución de problemas geométricos en la vida cotidiana. Estas experiencias de aprendizaje se fundamentaron en políticas educativas nacionales tales como los estándares de competencias matemáticas.

A partir de su revisión, se hizo aplicación diagnóstica o prueba diagnóstica del razonamiento matemático y/o geométrico del grado noveno implementando el modelo de competencias matemáticas establecido por el Ministerio de Educación Nacional.

El reconocimiento del teorema de Pitágoras durante la fase diagnóstica fue simplemente visual, es decir, los estudiantes asumían la gráfica dada como la representación del teorema, pero no reconocieron en su demostración las relaciones de los lados del triángulo con el área de los cuadrados dibujados sobre ellos.

En lo concerniente a los conocimientos previos del teorema de Pitágoras, se determinó que los estudiantes se situaban en el nivel uno (1) de razonamiento geométrico. Se hicieron notorias las debilidades en la descripción y contrastación de propiedades geométricas al igual que en el afrontamiento de situaciones sencillas y resolución de problemas en contextos estructurados.

Así mismo, se observó que aunque definían literalmente características del triángulo rectángulo, los estudiantes no pudieron contrastar estas definiciones con los modelos presentados en la prueba diagnóstica, es decir: no relacionaron estas características para hacer una representación lógica de los lados del triángulo rectángulo.

La falta de reconocimiento de los lados de un triángulo rectángulo no permitió que se relacionara la ubicación de la hipotenusa respecto al ángulo recto, al igual que la posición de los catetos con dicho ángulo. Se observó que un gran porcentaje de los estudiantes no reconocían esta característica propia de los triángulos rectángulos

Con la manipulación de triángulos en cartulina, la actividad se tornó más atractiva; esto se evidenció a través de la importancia que recibió el trabajo colaborativo, pues el aporte de algunos estudiantes en la organización y explicación de la actividad o al interior de sus grupos ayudó a que otros pudieran entender mejor el tema.

Los estudiantes al principio de las sesiones solían sentirse inseguros al solicitárseles ciertas formas de razonamiento geométrico y espacial; sin embargo, este temor fundado sobre una metodología previa de enseñanza tradicional de las matemáticas disminuyó a medida que fueron transcurriendo las sesiones, pues se mostraron más confiados y dispuestos.

Se evidenciaron diferentes maneras de razonar de los estudiantes para procesar información, las cuales pueden ser usadas como “modelo” en el diseño de secuencias instruccionales en el tópico matemático de semejanza de figuras planas.

Como estrategia de formación, la solución de problemas en la dinámica de la enseñanza docente dentro del marco de las competencias impacta en el aprendizaje de los estudiantes, pues el razonamiento matemático encuentra en la solución de problemas la mejor manera de expresarse.

Por eso, para desarrollar la capacidad de razonamiento matemático y geométrico la actividad del estudiante debe orientarse a hacer consciente tal habilidad; la práctica repetida y la experiencia son las que darán lugar al desarrollo de su forma de razonar espacial y geométricamente.

En este sentido, aunque es más dispendioso para el docente preparar y programar situaciones o problemas que estimulen el desarrollo del razonamiento matemático y/o geométrico, es importante lograr que el desempeño se vea reflejado en el uso comprensivo del lenguaje en torno al teorema de Pitágoras.

La aplicación del modelo de Van Hiele y la manipulación de figuras van de la mano y su accionar didáctico conduce a los estudiantes hacia el descubrimiento de las características de los triángulos.

Es decir, la necesidad de implementar recursos didácticos disponibles en el entorno para estimular el razonamiento matemático y geométrico de los estudiantes va haciendo pertinente el conocimiento.

Así, los estudiantes establecieron las características de los triángulos con ayuda de instrumentos de medición como el transportador o la regla durante el proceso diagnóstico, pero ni aun así clasificaron estas figuras según sus características.

Dado que el paso de un nivel de razonamiento al siguiente se produce de manera gradual y que durante algún tiempo el estudiante se suele encontrar en un periodo de transición en el que combinará razonamientos de un nivel a otro; las experiencias y los conocimientos previos, las habilidades, los intereses, las motivaciones y las expectativas con los que el aprendiz se aproxima a una nueva situación o actividad de aprendizaje conforman la matriz inicial que le permite construir una primera comprensión; de allí que hasta la cuarta sesión hubo necesidad de enfatizar y reforzar sobre los pre-saberes de los estudiantes.

Solo cuando llegaron a la quinta sesión, los estudiantes fueron capaces de encontrar la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Así mismo, hacia la fase cinco de dicha sesión fueron capaces de hallar el valor de dos ángulos basados en la propiedad de los triángulos, lo que significa apropiación del nivel dos de razonamiento del modelo de Van Hiele.

Durante la sexta sesión se observó que los estudiantes identificaban y manejaban las propiedades de los triángulos y el teorema de Pitágoras; sin embargo, cuando necesitaban resolver raíces o despejar ecuaciones presentaban dificultades, que luego se fueron superando gracias al continuo manejo o familiarización con estas. Se puede decir que, en este aspecto, a los estudiantes se les dificultó alcanzar el nivel tres de razonamiento matemático.

Por último, fue notorio el avance de la competencia razonamiento matemático; en cuanto a la contrastación de propiedades de los triángulos, la modelación y resolución de problemas, un gran porcentaje respondió acertadamente, ya que utilizaron la información y propiedades requeridas en su justificación para la solución de dichas situaciones.

Referencias

Abrate, R.; Delgado, G. & Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 39*(1), 1-9. Recuperado el 22 de octubre de 2007 desde http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf

Álvarez-Gayou, J. L. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología*. Colección Paidós Educador. México: Paidós Mexicana.

Ávila Moreno, M. (2017). *El teorema de Pitágoras en el marco del modelo de Van Hiele: propuesta didáctica para el desarrollo de competencias en razonamiento matemático de los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Anna Vitiello-Hogar Santa Rosa de Lima* (tesis de maestría).

Archer, M. (2010). *Estudio de casos sobre el razonamiento matemático de alumnos con éxito académico en la ESO* (tesis doctoral). Barcelona: Universidad de Barcelona.

Coll, C., Bustos, A. C., Del Rey, F., Engel, R., Escaño, A., de la Serna, J. G. & Ortega, J. (2010). *Desarrollo, aprendizaje y enseñanza en la educación secundaria*. Instituto de Formación del Profesorado. Investigación e Innovación Educativa.

Eggen & Kauchak. (1999). *Estrategias docentes. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento*. Brasil: Fondo de Cultura Económica.

Fernández, M. (2011). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y razonamiento espacial* (tesis doctoral). Facultad de Educación, Universidad de Santiago de Compostela. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Teresa_Fernandez_tesis.pdf

García, G. (2003). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Gómez, D. R., & Roquet, J. V. (2012). *Metodología de la investigación.* México: Red Tercer Milenio. Recuperado de http://www.aliatuniversidades.com.mx/bibliotecasdigitales/pdf/axiologicas/Metodologa_de_la_investigacion.pdf

González, P. (2008). El teorema llamado de Pitágoras una historia geométrica de 4000 años. *Sigma*, (32).

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1991). El Modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática, 3*(2), 49-65.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2004). Metodología de la investigación (4.a ed.). México: McGraw-Hill.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa. (2012). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012. Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Icfes. (2005). *Evaluación censal-pruebas saber guía y fundamentación*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Icfes. (2014). *Pruebas Saber 3.°*, 5.° y 9.°. Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal 2014. Bogotá: Ministerio de Educación.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías en el plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (tesis doctoral). Universidad de Valencia, España.

Jaramillo, A. (2014). Enseñanza de las matemáticas. *Revista del Programa de Matemáticas MATUA, 1*(2). Recuperado de *http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA/article/view/1197*

Katayama Omura, R. J. (2014). *Introducción a la investigación cualitativa: Fundamentos, métodos, estrategias y técnicas*. Lima, Perú: Universidad Inca Garcilaso de la Vega. Nuevos tiempos, Nuevas ideas, Fondo Editorial.

Martínez, J. (2011). Métodos de investigación cualitativa. *Silogismos de Investigación, 8*(1).

Martín, A. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele: un estudio con profesores en ejercicio* (doctoral dissertation, Universidad de La Laguna). Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1132

Miguélez, M. M. (2016). Validez y confiabilidad en la metodología cualitativa. *Paradigma, 27*(2), 7-33

Miguélez, M. M. (2008). *Epistemología y metodología cualitativa en las ciencias sociales*. Trillas.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Serie lineamientos curriculares.* Bogotá: Autor.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Autor.

Ministerio de Educación Nacional. (2013). *Sistema Nacional de Evaluación Estandarizada de la Educación Alineación del examen Saber 11.°*. Bogotá: Autor.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. V2. Bogotá: Panamericana Formas e Impresos S.A.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Así están las regiones según las pruebas saber. Estadística años 2010-2014*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-347318_Presentacion.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Boletín Saber en breve. Prueba Saber 3.º*, 5.º y 9.º: Resultados 2015. *Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes)*. Bogotá: Autor.

Orden Hoz, A. D. L. (2011). Reflexiones en torno a las competencias como objeto de evaluación en el ámbito educativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 13*(2), 1-21.

Proyecto Educativo Institucional, PEI (2013). Institución Educativa Anna Vitiello-Hogar Santa Rosa de Lima.

Ramírez, L., & Medina, G. (2008). Educación basada en competencias y el proyecto Tuning en Europa y Latinoamérica. Su impacto en México. *Ide@ s Concyteg, 3*(39), 8.

Sánchez C. (2016). *Proyecto Educativo XXI* 9. Bogotá: Ed. Santillana.

Sandoval, C. (1996). *Investigación cualitativa. Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (Icfes). Módulos de Investigación Social.* Bogotá.

Tobón, S. (2004). *Formación basada en Competencias*. Bogotá: Ecoe.

Vargas, G. & Gamboa R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia, 27*(1), 74-94.